Résolution faible des EDP's elliptiques linéaires cours de Master I Contrôle Optimal théorie et application et approximation

Rahima Atmania

Résolution faible des EDP's elliptiques linéaires

Master I Contrôle optimal et approximation

Dr. ATMANIA RAHIMA

LMA, Département de Mathématiques,
Faculté des sciences,
Université Badji Mokhtar-Annaba, algérie.

Email : atmanira@yahoo.fr

2021/2022

Table des matières

Résumé

Ce travail présente une introduction à la formulation variationnelle des EDP's linéaires elliptiques en passant par la notion de distribution qui nous permettra de définir les espaces de fonctions dits de Sobolev puis une analyse de deux EDP's elliptiques linéaires basiques à savoir celles de Poisson et Laplace.

On commence par énumérer quelques prérequis pour la bonne compréhension du module :

1- La dérivation et l'intégration des fonctions réelles à une et à plusieurs variables ;

2- les espaces fonctionnelles, ceux de Banach (espaces normés complets), ceux de Lebesgue $L^p(\Omega), p \in [1, +\infty]$ définis par la notion de presque partout (p.p.) et ceux de Hilbert munis de produits scalaires ;

3- les outils de résolution des EDP's de la physique spécialement l'analyse de Fourier (séparation de variables, série et transformation de Fourier).

Le module comporte quatre chapitres avec les objectifs d'apprentissage suivants :

1-nouvelles notions : les distributions et leurs propriétés ; la solution faible ;

2-nouvelles connaissances : les espaces de Sobolev ; l'opérateur trace et l'opérateur de prolongement, théorème de Green, théorème de Lax-Milgram pour l'existence et l'unicité de la solution faible ;

3-nouvelle méthode : la formulation faible et la formulation variationnelle pour la détermination solution faible.

Chapitre 1

Quelques outils pour l'analyse des EDP's

1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont des équations que doivent satisfaire une fonction inconnue u de plusieurs variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et certaines de ses dérivées partielles. Le plus haut degré de dérivation qui intervient est dit ordre de l'équation. Les EDP's se divisent en deux types linéaires et non linéaires et aussi en deux familles les EDP's stationnaires où l'inconnue ne dépend pas de la variable temps et les EDP's d'évolution où l'inconnue dépend de la variable temps noté t.

Les EDP's 'odre deux sont classées en trois grandes classes fondamentales : elliptique, parabolique et hyperbolique. Les équations elliptiques sont des EDP's stationnaires et décrivent des phénomènes d'équilibre, les équations paraboliques décrivent des phénomènes de diffusion alors que les équations hyperboliques décrivent les phénomènes de propagation et ces deux classes sont des problèmes d'évolution.

L'objet de ce cours sont les EDP's elliptiques linéaires.

Notons que la démarche d'analyse pour la résolution d'un problème réel passe par ces étapes :

1- La mise en équations dite modélisation connaissant les données du problème et les inconnues à déterminer, ceci en utilisant les lois de la physique. On arrive à construire le problème continu (système d'EDP).

2- L'analyse mathématique du problème posé. (existence, unicité et propriétés de la solution).

3- La conception d'une méthode numérique et son analyse. (problème discrétisé, choix de méthodes et étude de leur stabilité, convergence, précision).

4- Algorithmique et mise en oeuvre sur ordinateur.
L'intervention des mathématiques pures se fait au niveau des étapes 2 et 3.

2 Modèle mathématique

Rappelons que la forme générale d'une EDP est :

$$Lu(x) = f(x)\,; \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

où L est un opérateur différentiel. Si L est linéaire ($L(\alpha u) = \alpha Lu$ et $L(u+v) = Lu + Lv$) l'équation est dite linéaire. Aussi, l'EDP $Lu = 0$ est dite linéaire homogène ou sans second membre et l'EDP $Lu = f$ où f est une fonction non identiquement nulle, est dite linéaire non homogène ou avec second membre.

La forme générale d'une EDP elliptique linéaire est :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)\,u(x) = f(x)\,; \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

où $A(x) = (a_{i,j}(x))$ est une matrice symétrique telle que ses valeurs propres sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives. Ici l'opérateur différentiel

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

est linaire.

Cet opérateur est elliptique étant donné que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\xi)\,\xi_i\xi_j \geq 0., \xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.1 *Sur $\mathbb{R}^2$, ce procédé (valeur propre de la matrice) est équivalent au calcul du déterminant de la première partie de l'EDP qui est*

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = a_{1,1}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + 2a_{1,2}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + a_{2,2}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x)$$

avec $a_{2,1}(x) = a_{1,2}(x)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x)$ et on a le déterminant de l'équation elliptique vérifie

$$(a_{1,2}(x))^2 - a_{1,1}(x)\,a_{2,2}(x) < 0.$$

L'étude de telles équations nécessite des conditions aux bords de l'ouvert borné Ω qui peuvent être de Dirichlet

$$u(x) = \phi(x)\,; \quad x \in \partial\Omega$$

de Neumann

$$\frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) = \varphi(x)\,; \quad x \in \partial\Omega$$

où $\overrightarrow{\eta}$ est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$, ou conditions mixtes

$$\alpha u(x) + \beta\frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) = \psi(x)\,; \quad x \in \partial\Omega; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On s'intéresse à l'existence et/ou l'unicité de la solution faible, sa régularité et sa stabilité pour prévoir un calcul approché de la solution par la méthode des éléments finis.

Remarque 2.2 *Si Ω n'est pas borné on considére des conditions aux limites nulles exemple pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ on a $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} u(x) = 0$.*

Une des propriétés importantes est :

Théorème 2.1 *(Superposition) Soient L un opérateur différentiel linéaire et $u_1, ..., u_m$, m solutions de $Lu = 0$. Alors $u = c_1u_1 + ... + c_mu_m$ est aussi solution de $Lu = 0$ pour tout choix des constantes $c_1, ..., c_m$.*

Remarque 2.3 *On peut aussi superposer un nombre infini de solutions sous réserve de convergence de la série obtenue.*

L'étude d'un problème d'EDP traite une notion importante la stabilité.

Définition 2.1 *Un problème est stable si une « petite » variation des conditions aux bord entraîne une « petite » variation de la solution.*

On aboutit alors au concept de problème bien posé au sens de Hadamard.

Définition 2.2 *Le problème est dit bien posé si la solution existe est unique et stable, sinon il est dit mal posé.*

3 Exemples de la physique

3.1 Déformation d'une membrane élastique :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ une membrane élastique horizontale à l'équilibre soumise à un chargement $f(x)$ vertical et maintenue dans une position fixe sur le bord. L'altitude de la membrane est alors solution de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)\, u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $c(x)$ représente les caractéristiques du matériau de la membrane, c'est le coefficient d'élasticité et $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$est un opérateur différentiel du second ordre dit le Laplacien. Ce problème est elliptique.

3.2 En électrostatique :

L' équation qui lie un potentiel u à la densité de charges éléctriques f est $-k\Delta u = f$ dite équation de Poisson. On peut chercher à trouver le potentiel u dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vérifiant $\Delta u = 0$ dite équation de Laplace lorsque u est connue sur le bord. Plus généralement, on étudie le problème aux limites

$$\begin{cases} -k\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) = \phi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dit de Dirichlet. On verra que ce problème est bien posé.

4 Rappels

Nous allons rappeler certains outils d'analyse et présenter des notations qui seront utilisées dans le suite du cours.

4.1 Principaux opérateurs différentiels

Pour toute fonction $F = (F_1, F_2, ..., F_p)$:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1, on note la matrice Jacobienne de F au point x :

$$Jac(F(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial F_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Si $p = n$, F est dite champ de vecteurs et sa matrice Jacobienne est carrée et on définit alors la divergence de F par :

$$div\left(F\left(x\right)\right) = tr\left(Jac\left(F\left(x\right)\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Dans le cas où $p = 1$, pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on définit le gradient de f par :

$$\nabla f\left(x\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x\right), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x\right)\right).$$

Si f est de classe C^2 on définit sa matrice Hessienne par

$$Hess\left(f\left(x\right)\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdots\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \cdots\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

et le Laplacien par

$$\Delta f\left(x\right) = tr\left(Hess\left(f\left(x\right)\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(x\right) = div\left(\nabla f\left(x\right)\right) = tr\left(Jac\left(\nabla f\left(x\right)\right)\right).$$

Remarque 4.1 *La divergence et le Laplacien sont invariants par le changement de base.*

On note $\overrightarrow{\eta}\left(x\right)$ le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de Ω au point $x \in \partial\Omega$. Si f est une fonction assez régulière définie sur $\overline{\Omega}$, on définit la dérivée normale de f sur $\partial\Omega$ par

$$\frac{df}{d\overrightarrow{\eta}}\left(x\right) = \nabla f\left(x\right).\overrightarrow{\eta}\left(x\right), \quad x \in \partial\Omega.$$

4.2 Espaces fonctionnels

Soit (a, b) un intervalle de $\mathbb{R}$; tel que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Définition 4.1 *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^P(a, b)$ des fonctions réelles sur (a, b) telles que f est mesurable et $\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty$.*

Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(a, b)$ des fonctions mesurables bornées presque partout (p.p) sur (a, b).

$L^P(a,b), p \in [1,+\infty)$ est un espace de Banach une fois muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^p .$$

De même, $L^\infty(a,b)$ muni de la norme

$$\sup_{x\in(a,b)} ess\, |f(x)| = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M, \text{ p. p. sur } (a,b)\}.$$

Pour $-\infty < a < b < +\infty$, $C\,[a,b]$ est l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ est un espace de Banach une fois muni de la norme

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f\,(x)| \,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $C^n[a,b]$ l'espace des fonctions $f \in C^{n-1}[a,b]$ telles que $f^{(n)} \in C[a,b]$, et on le munit de la norme

$$\|f\|_{C^n[a,b]} = \sum_{k=0}^{n} \left\| f^{(k)} \right\|_{C[a,b]} .$$

De plus, on a $C[a,b] = C^0[a,b]$.

4.3 Application linéaire et inclusion

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(X, \|.\|_X)$ deux espaces de Banach tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans X. On peut alors considérer E comme un sous-espace vectoriel de X et on note $E \hookrightarrow X$.

Définition 4.2 *Une inclusion est dite :*

(i) continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in E$ on a $\|u\|_X \leq C\,\|u\|_E$.

(ii) compacte, si de toute suite bornée dans E (pour la norme de E), il est possible d'extraire une sous-suite qui converge dans X (pour la norme de X).

(iii) dense si pour tout $u \in X$ il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0} \subset E$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ pour la norme de X.

4.4 Intégration

Intégration en coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}^n$

On note S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ càd

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

On définit la fonction surjective $\phi : \mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ par $\phi(r, \sigma) = r\sigma = x$ où les variables (r, σ) sont appelées les coordonnées sphériques. On passe donc des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques grâce aux relations :

$$r = \|x\| \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{x}{\|x\|}.$$

Pour tout Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose $\widetilde{\Omega} = \phi^{-1}(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ l'image réciproque de Ω par ϕ qui n'est pas forcément ouvert .

Proposition 4.1 *Pour tout $1 \leq p < +\infty$, l'application $f \to \widetilde{f} = f o \phi$ est une isométrie de $L^p(\Omega, dx)$ sur $L^p\left(\widetilde{\Omega}, r^{n-1} dr d\sigma\right)$ et on a donc :*

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx = \int_{\widetilde{\Omega}} f(r\sigma)\, r^{n-1} dr d\sigma.$$

Dans $\mathbb{R}^2$, la sphère S^1 est paramétrée par $\theta \in]0, 2\pi[\to (\cos\theta, \sin\theta) = \sigma \in S^1$. Dans ce cas, $\widetilde{\Omega} = I \times J \subset \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[$ et la formule de la proposition devient :

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx = \int_{\widetilde{\Omega}} f(r(\cos\theta, \sin\theta))\, r dr d\theta = \int_J \int_I f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta.$$

Remarque 4.2 *Sur $\mathbb{R}^2$, (r, θ) sont dit coordonnées polaires.*

Inégalité et intégrale

Proposition 4.2 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient deux fonctions f, g mesurables à valeurs réelles de carré intégrables, alors on a :*

$$\left| \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} g^2(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

Elle s'écrit aussi $|< f, g >| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$, où $< ., >$est leproduit scalaire de l'Hilbertien $L^2(\Omega)$.

Proposition 4.3 *(Inégalité de Holder) Soient deux fonctions f, g mesurables à valeurs réelles telles que $f \in L^p(\Omega), g \in L^p(\Omega)$, alors $fg \in L^r(\Omega)$ pour*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

et on a

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

En plus des inégalités de Holder, de Cauchy-Schwarz , nous avons l'inégalité de Jensen.

Proposition 4.4 *(inégalité de Jensen) Soit Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ de mesure $mes(\Omega) = 1$. Pour toute fonction $f \in L^1(\Omega, I)$,et toute fonction $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et convexe, on a :*

$$\varphi\left(\int_\Omega f(x)\,dx\right) \leq \int_\Omega \varphi(f(x))\,dx.$$

Chapitre 2

Les distributions

1 Introduction

Dans ce cours nous introduisons la notion de distribution qui génèralise celle de fonction et de mesure. Les raisons d'utilisation de cette notion sont d'ordre purement physique, expérimental et aussi mathématiques. Cette théorie aide à obtenir des solutions de problèmes d'EDP's au sens faible en utilisant des formes de problèmes évalués dans des champs tests ou presque partout au lieu de leurs formes classiques.

1.1 Notations

Soit le vecteur $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ appelé multi-indice et on note $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ la longueur du multi-indice avec

$$x^\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n)^{(\alpha_1, ..., \alpha_n)} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

où $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ de norme euclidienne $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$

. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^m on note toute dérivée partielle de f d'ordre $|\alpha| \leq m$ pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n},$$

avec $D^\alpha f(x) = f(x)$ si $\alpha = (0, ..., 0)$.

Dans la suite on note $< .,. >$ le produit de dualité entre un espace E et son dual E' qui coincide sur L^2 avec le produit scalaire.

2 Espaces de fonctions tests : $\mathcal{D}(\Omega)$

2.1 Définition

Les fonctions tests sont des fonctions très régulières et à support compact, dites aussi fonctions d'essai. Elles forment un espace vectoriel noté $\mathcal{D}(\Omega)$ où l'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^m(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) \text{ à support compact}\}$$

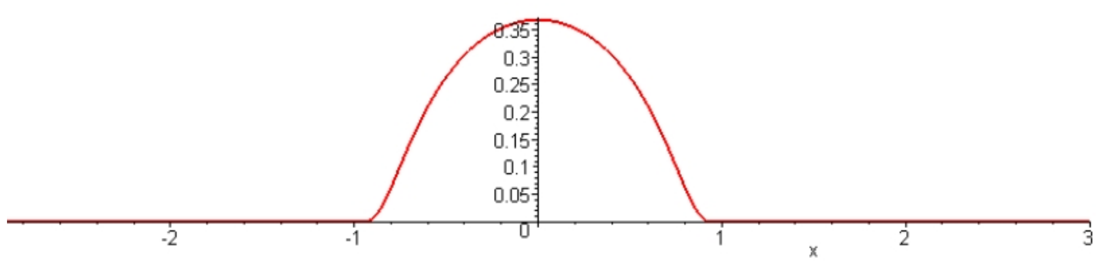
avec $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ où $\text{supp}\phi = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}$.

Remarque 2.1 *On général on utilise l'espaces de fonctions tests pour $m = \infty$.*

Exemple 2.1 *La fonction d'essai*

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{a^2}{(a^2 - x^2)}\right); & |x| < a \\ 0; \quad |x| \geq a > 0; \end{cases}$$

est une fonction paire, continue, croissante sur $[-a, 0]$, décroissante sur $[0, a]$ et de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.



2.2 Propriétés :

Une des propriétés les plus importantes est que $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace localement convexe non-métrisable.

Définition 2.1 *(convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$) On dit que $\left(\phi_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ ssi il existe un compact K dans Ω tel que les $supp\phi_j \subset K, j \in \mathbb{N}$ et $supp\phi \subset K$ et pour tout α tel que $|\alpha| \leq m$*

$$\left\|\partial^\alpha \phi_j - \partial^\alpha \phi\right\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ quand } j \to \infty.$$

Ceci veut dire que la suite et les suites de toutes ses dérivées partielles convergent vers la fonction et ses dérivées partielles respectivement.

Remarque 2.2 *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'a pas de structure topologique, on utilise alors en général sur cet espace la norme sup ess de $L^\infty(\Omega)$.*

Proposition 2.1 *$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :*

1- Si $f \in C^\infty$ on a $f\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3- La translatée $\tau_h\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et la dilatée $d_a\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec

$$\tau_h\phi(x) = \phi(x-h)\,; h \in \mathbb{R}^n; \qquad d_a\phi(x) = \phi\left(\frac{x}{a}\right); a \in \mathbb{R}.$$

Définition 2.2 *On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :*

$$supp\rho_k \subset B\left(0, \frac{1}{k}\right); \;\; \rho_k \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n; \;\; \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x)\,dx = 1.$$

Proposition 2.2 *1- Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$ alors $(\rho_k * f)_{k\geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ convergeant uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.*

2- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n), p \in [1, +\infty[$ alors $\|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quand $k \to \infty$ càd $\rho_k * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.3 *$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit sa normalisée par $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ par $\phi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right), \varepsilon > 0$ telle que $supp\phi_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$. Alors, $\forall f \in L^1_{loc}(\Omega), \forall K$ un compact de Ω, on définit $f_\varepsilon = f * \phi_\varepsilon$ telle que $suppf_\varepsilon \subset K$.*

f_ε est dite régularisée de f et ϕ_ε est dite approximation de l'identité.

Proposition 2.3 *$\forall f \in L^p(\Omega)$ on a $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.*

On conclut par un important résultat sachant que $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \forall p \geq 1$.

Théorème 2.1 *Soit un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est* ***dense*** *dans $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$.*

3 Espace des distributions : $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 3.1 *On appelle distribution sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ toute* ***forme linéaire continue*** *sur $\mathcal{D}(\Omega)$.*

On note $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$, définie ainsi $T(\phi) = < T, \phi > \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ où $<.,.>$ est le produit de dualité.

Définition 3.2 *T linéaire :$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a*

$$< T, \alpha\phi + \psi > = \alpha < T, \phi > + < T, \psi > .$$

T continue (séquentiellement) : si $\phi_i \to \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors

$$< T, \phi_i > \to < T, \phi > \quad \text{quand } i \to \infty.$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace (vectoriel) des distributions. $\mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{D}^*(\Omega)$ le dual algébrique de $\mathcal{D}(\Omega)$. Notons que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple 3.1 *Soit T définie par $T(\phi) = < T, \phi > = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Vérifions que T est une distribution :

1- T est une forme de $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ comme

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx = \int_{supp\phi = [c,d]} \phi(x)\, dx = \alpha \in \mathbb{R}$$

car $\phi = 0, x \notin supp\phi = [c, d]$ un compact.

2- T est linéaire comme l'intégrale est linéaire.(facile à vérifier).

3- T est aussi continue comme si $\phi_i \to \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (revoir définition de la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$) ceci implique que $(\phi_i)_{i\geq 1}$converge uniformément vers ϕ et il existe $K = [a, b]$ tel que les $supp\phi_j \subset K, j \in \mathbb{N}$ et $supp\phi \subset K$ alors

$$\lim_{i\to\infty} < T, \phi_i > = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_i(x)\, dx = \int_{[a,b]} \lim_{i\to\infty} \phi_i(x)\, dx = \int_{[a,b]} \phi(x)\, dx = < T, \phi > .$$

Nous avons ce théorème qui donne une définition alternative à une distribution.

Théorème 3.1 *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors, T est une distribution ssi*

$\forall$ le compact $K \subset \Omega$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $supp\phi \subset K$ on a

$$|< T, \phi >| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(\Omega)} ;$$

ou encore

$$|< T, \phi >| \leq C \|\phi\|_{C^m(K)} = C \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi\|_{C(K)} \quad .$$

Définition 3.3 *Si m ne dépend pas de K, m est dite ordre de la distribution.*

Exemple 3.2 ************

Définition 3.4 *(convergence des distributions) La suite $(T_i)_{i \geq 1} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ssi $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\lim_{i \to \infty} < T_i, \phi > = < T, \phi >$.*

Définition 3.5 *Soit $U \subset \Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

On dit que T est nulle sur U ssi $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $supp\phi \subset U$ alors $< T, \phi > = 0$.

Le complément de U est dit support de T.

Remarque 3.1 *Aussi, si on a $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $supp\phi \cap suppT = \varnothing \Longrightarrow < T, \phi > = 0$.(T est nulle).*

3.1 Types de distributions :

1- Distribution à support compact :

Ces distributions forment un espace vectoriel noté $\mathcal{E}'(\Omega)$ qui est le dual de l'espace $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ d'où $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$sachant que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ .Ces distributions sont d'ordre fini.

Exemple 3.3 ********

2- Distribution régulière :

Définition 3.6 *Une distribution T_f associée à une fonction f localement intégrable est dite régulière.*

Notons qu'une distribution n'a pas de valeur ponctuelle comme une fonction .

Théorème 3.2 *$\forall f \in L^1_{loc}(\Omega)$, l'application $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie par $T_f(\phi) = < T_f, \phi > = < f, \phi > = \int_\Omega f(x) \phi(x) dx$ est une distribution.*

Théorème 3.3 *$\forall f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$: $T_f = T_g \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$ p. p. $x \in \Omega$ càd $L^1_{loc}(\Omega) \underset{\hookrightarrow}{\subset} \mathcal{D}'(\Omega)$(injection).*

Exemple 3.4 *$f(x) = A, A \in \mathbb{R}$. On remarque que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} A\phi(x)\,dx = A \int_{supp\phi=[c,d]} \phi(x)\,dx \in \mathbb{R},$$

est linéaire (facile à vérifier) et

$$|T_f(\phi)| = \left| A \int_{supp\phi=[c,d]} \phi(x)\,dx \right| < A \int_{supp\phi=[c,d]} \sup_{x\in K} |\phi(x)|\,dx = A(d-c)\,\|\phi\|_{C(K)};$$

avec $supp\phi \subset K$. Ici la distribution est d'ordre $m = 0$, un ordre fini.

Remarque 3.2 *$suppT_f = suppf$.*

Il arrive qu'une suite de fonctions converge au sens des distributions sans converger simplement.

Exemple 3.5 *$(\cos kx)_{k\geq 1}$ et $(\sin kx)_{k\geq 1}$ convergent vers 0 au sens des distributions mais ne convergent pas simplement.*

3-Distribution singulière :

Définition 3.7 *Toute distribution non associable à une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ est dite singulière.*

Exemple 3.6 *δ_0 dite masse de Dirac définie par $<\delta_0, \phi> = \phi(0)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est non associable à une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ et est une distribution comme c'est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Cette distribution est une distribution très importante et admet une version plus générale $<\delta_{x_0}, \phi> = \phi(x_0)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.3 *Certains par abus parle de fonction de Dirac nulle partout et infinie en zéro et note $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$ avec*

$$<\delta_{x_0}, \phi> = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0)\,\phi(x)\,dx = \phi(x_0).$$

On peut avoir des fonctions non localement intégrables et qui définissent des distributions singulières après manipulations.

Exemple 3.7 $\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *définit la valeur principale de Cauchy ainsi*

$$< Vp\frac{1}{x}, \phi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx.$$

De même, $\frac{1}{x^2} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *définit la partie finie de* $\frac{1}{x^2}$ *ainsi*

$$< Pf\frac{1}{x^2}, \phi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\phi(0)}{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2} dx.$$

4- Distribution discrète :

Ce sont des distributions dont le support est discrèt et qui sont en général basées sur la masse de Dirac qui est discrète comme $\mathrm{supp}\delta_{x_0} = \{x_0\}$.

Remarque 3.4 *La fonction de Dirac, peut être définie comme la limite de diverses suites de fonctions définies par morceaux (réglées et intégrables).*

Exemple 3.8 *On a* $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda \exp\left(-\pi\lambda^2 x^2\right) = \delta_0$.

En effet, pour tout $\mathrm{supp}\phi \subset [-A, A]$

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to \infty} &< \lambda \exp\left(-\pi\lambda^2 x^2\right), \phi >= \lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \exp\left(-\pi\lambda^2 x^2\right) \phi(x)\, dx \\
&= \lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \exp\left(-\pi\lambda^2 x^2\right) \phi(x)\, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_{-A}^{+A} \exp\left(-\pi y^2\right) \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy \\
&= \int\limits_{-A}^{+A} \exp\left(-\pi y^2\right) \lim_{\lambda \to \infty} \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi y^2\right) dy \phi(0) = \phi(0) \\
&= < \delta_0, \phi >;
\end{aligned}$$

sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-z^2)\, dz = \sqrt{\pi}$ *donc*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi y^2\right) dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-z^2\right) \frac{dz}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Propriètés de δ sur $\mathbb{R}$:

1- Si $a_n \to a$ alors $\delta_{a_n} \to \delta_a$.

2- Soient $a > 0; (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe, $T = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \delta_{na}$ est une distribution qui à tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ associe $< T, \phi >= \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \phi(na)$. En plus, cette somme est à support fini et discrét.

3- Lorsque $\lambda_n = 1$, on obtient le peigne de Dirac $\Delta_a = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{na}$ càd $< \Delta_a, \phi >= \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \phi(na)$.

4- $\lim\limits_{a\to 0+} a\Delta_a = 1$ aussi si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{a\to 0+} af\Delta_a = f$.

5- Le développement en série de Fourier du peigne de Dirac est $2\pi\Delta_{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$.

6- La formule sommatoire de Poisson, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi inax} = \dfrac{1}{a}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n/a}$.

5- Distribution tempérée :

Sachant que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide alors par dualité on a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions dites tempérées.

Rappelons que l'espace de Schwartz est

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall k \in \mathbb{N}, \sup_{|\alpha|\le k; |\beta|\le k} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| \le \infty \right\}.$$

Exemple 3.9 $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Théorème 3.4 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors f s'identifie à une distribution tempérée si f vérifie une de ces conditions :*

1-f est à croissance dite modérée (ou lente) càd majorée par un polynôme $|f(x)| \le c(1+|x|)^N ; N \ge 0$.

2- $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

3- $f = f_1 + f_2$ telles que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et f_2 est à croissance modérée.

4- f est périodique.

Exemple 3.10 $e^{-|x|} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *. L'échelon de Heaviside défini par*

$$H(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

vérifie la condition (2) du théorème précédent et

$$T_H(\phi) =< H, \phi >= \int_0^{+\infty} \phi(x)\, dx$$

est alors une distribution tempérée : $H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

3.2 Opérations sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

1- Tanslation et autres :

Définition 3.8 *On définit la translation d'une distribution ainsi :*

$$< \tau_h T, \phi >=< T, \tau_{-h}\phi >; h \in \mathbb{R}^n$$

et sa dilatation par

$$< d_a T, \phi >=< T, |a|\, d_{1/a}\phi >, a \neq 0$$

avec $\tau_{-h}\phi(x) = \phi(x+h)$ et $d_{1/a}\phi(x) = \phi(ax)$.

Remarque 3.5 *On a spécialement, $\tau_h\delta_0 = \delta_h$ et $d_a\delta_0 = |a|\,\delta_0$.*

2- Les produits :

On ne peut pas définir le produit de deux distributions mais on a si $f \in C^\infty, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec

$$< fT, \phi >=< T, f\phi > \quad \text{et} \quad suppfT \subset suppT \cap suppf.$$

Proposition 3.1 *Soit $f \in C^\infty(\Omega), T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors*
1- $\tau_h(fT) = \tau_h f \tau_h T$;
2- $f\delta_0 = f(0)\,\delta_0$.

Remarque 3.6 *La propriété (2) pour $f(x) = x$ donne $x\delta_0 = 0$.*
Aussi, si $xT = 0$ alors $T = c\delta_0$.

Définition 3.9 *(produit tensoriel) Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors $T_f, T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et leur produit tensoriel $T_f \otimes T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ où*

$$< T_f \otimes T_g, \phi >= \int\limits_{\mathbb{R}^2} f \otimes g\phi(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\,g(y)\,\phi(x,y)\,dxdy$$

sachant que $f(x)\,g(y) = f \otimes g$.

En général, $< S_x \otimes T_y; \phi(x,y) >=< S_x; < T_y, \phi(x,y) >>$.

Définition 3.10 *(produit de convolution) Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors*

$$< T_f * T_g, \phi >= \int\limits_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\,\phi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z)\,g(y)\,\phi(z+y)\,dydz$$

sachant que $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,dy$.

Plus généralement, $< T * S, \phi >=< T_x; < S_y, \phi(x+y) >$ et $T * S \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarque 3.7 *$(f * g)(x)$ n'existe pas toujours.*

Proposition 3.2 *Le produit de convolution satisfait ce qui suit :*

1- $(*)$ est associatif et commutatif sur $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2- δ_0 est l'élément neutre pour le produit de convolution et en plus $T * \delta_a = \tau_a T$.

3- Pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on a

$$T * \phi(x) =< T, \phi(x-y) >=< T, \tau_{-x}\widetilde{\phi} > .$$

avec supp $(T * \phi) \subset$ supp$T$+suppϕ et

$$\partial^\alpha (T * \phi) = \partial^\alpha T * \phi = T * \partial^\alpha \phi.$$

Remarque 3.8 *Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on a $T * \phi_\varepsilon \in \mathcal{E}(\Omega)$.*

3-Dérivation :

La dérivation sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est dite dérivation au sens des distributions.

Définition 3.11 *Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et*

$$< \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi >= - < T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} >; i = 1, ..., n; \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) .$$

Plus génèralement, $< \partial^\alpha T, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \phi >$.

Exemple 3.11 *************

Proposition 3.3 *La dérivation au sens des distributions vérifie :*

1- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation.

2- La convergence d'une suite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence de ses dérivées et le support est réduit par dérivation ($supp\partial^\alpha T \subset suppT$).

3- Si T est d'ordre m alors $\partial^\alpha T$ est d'ordre $m+|\alpha|$.

Proposition 3.4 *Toute fonction localement intégrable est indéfiniment dérivable au sens des distributions.*

Proposition 3.5 *Pour une distribution réelle, on a*

1- Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, $(T_f)' = T_{f'}$ et si $f \in C^1$ par morceaux,

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(a_i^+\right) - f\left(a_i^-\right)\right)\delta_{a_i}$$

où a_i sont les N points de discontinuités de f.

2- $T' = 0$ ssi $T = A \in \mathbb{R}$ une constante.

3- $(\tau_h T)' = \tau_h T'$, la translation et la dérivation commutent.

4- $f \in C^\infty$, $(fT)' = f'T + fT'$.

Exemple 3.12 *************

Remarque 3.9 *$(ST)' \neq ST' + S'T$ pour S, T et ST tous dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Transformée de Fourier d'une distribution

Pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on définit

$$< \widehat{T}, \phi >=< T, \widehat{\phi} >$$

où $\widehat{T} = TF(T)$ est la transformée de Fourier de T. Aussi, la transformée inverse est définie par $< TF^{-1}(T), \phi >=< T, TF^{-1}(\phi) >$.

Proposition 3.6 *Sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a*

1-Pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; $\widehat{T}$ et $TF^{-1}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. (TF est bijective sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).

2- $TF\left(T^{(m)}\right) = (2i\pi\lambda)^m TF(T)$ et $TF\left((-2i\pi x)^m T\right) = (TF(T))^{(m)}$.

Exemple 3.13 *$TF(\delta_0) = 1$. En effet,$\forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$*

$$< \widehat{\delta_0}, \phi > = < \delta_0, \widehat{\phi} > = \widehat{\phi}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{2i\pi x 0} dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = < 1, \phi >$$

d'où $\widehat{\delta_0} = 1$ au sens des distributions.

On a $TF(1) = *** = \delta_0$.

Aussi, $TF(\delta_\lambda) = e^{-2i\pi\lambda y}$; $TF\left(e^{-2i\pi\lambda x}\right) = \delta_\lambda$.

4 Conclusion

Nous avons vu que les distributions généralisent les fonctions dans un certain sens. La distribution de Dirac est une des plus importantes distributions singulière.Aussi, les distributions régulières qui s'identifient à des fonctions localement intégrables et des distributions tempérées qui agissent sur l'espace de Schwartz et admettent des transformées de Fourier. Toutes ces propriètés aident à résoudre les EDO et EDP au sens faible en utilisant la dérivation, les limites et les TF au sens des distributions.

Chapitre 3

Espaces de Sobolev

1 Introduction

Dans ce cours nous allons utiliser les distributions pour définir les espaces de Sobolev. Ce n'est pas obligatoire car on peut utiliser la notion de presque partout. Ce sont des espaces de fonctions dont les puissances et celles de leurs dérivées (au sens faible) sont intégrables.

Le but de ceci est de pouvoir étudier la régularité des solutions de problèmes d'EDP's au sens faible.

2 Définitions et Notations

2.1 Les espaces de Sobolov en général : $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 2.1 *Soit $p \in [1, +\infty]$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, on définit l'espace vectoriel*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g \in L^p(\Omega), \partial_{x_i} u = g_i, i = 1, ..., n \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\}.$$

Autrement dit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ et toute ses dérivées partielles d'ordre un au sens faible $\partial_{x_i} u = g_i \in L^p(\Omega)$. Ceci est équivalent à dire que $u \in L^p(\Omega)$ et $\nabla u \in (L^p(\Omega))^n$

Cette définition peut se généraliser l'espace vectoriel $W^{m,p}(\Omega)$ pour toutes les dérivées partielles $\partial^{|\alpha|} u$ d'ordre $|\alpha| \leq m$.(voir cours précédent).

$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach (normé complet) muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}} &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i} u\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De même, $W^{m,p}(\Omega)$ est un Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1}^{m} \left\|\partial^{|\alpha|} u\right\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \left\|\partial^{|\alpha|} u\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Remarque 2.1 *Une norme équivalente est* $\|u\|_{W^{m,p}} = \max_{|\alpha|\leq m} \left(\left\|\partial^{|\alpha|} u\right\|_{L^p(\Omega)}\right)$.

Remarque 2.2 *Une norme plus utilisée, équivalente pour* $p \in [1, +\infty[$ *est*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} \left\|\partial^{|\alpha|} u\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}.$$

Remarque 2.3 *Il est clair que* $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,q}(\Omega)$ *si* $q \leq p$ *et* $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ *si* $m \leq k$.

Ces inclusions sont des injections.

2.2 Les espaces $H^m(\Omega)$

Définition 2.2 *On note les espaces* $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ *spécialement*
$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ *et* $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

$H^1(\Omega)$ est un espace de Banach et de Hilbert aussi muni du produit scalaire (cas réel)

$$< f; g >_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \partial_{x_i} f(x)\, \partial_{x_i} g(x)\, dx. \tag{3.2}$$

De même pour les $H^m(\Omega)$ de produit scalaire (cas réel)

$$< f; g >_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx + \sum_{|\alpha|=1}^{m} \int_\Omega \partial^{|\alpha|} f(x)\, \partial^{|\alpha|} g(x)\, dx.$$

Remarque 2.4 *La norme est* $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$.

Remarque 2.5 *Il est clair que* $H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ *avec injection continue.*

Sachant que $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ mais n'y est pas dense alors on définit d'autre types d'espaces de Sobolev $H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}_{H^m(\Omega)}$ et son dual par rapport à $L^2(\Omega)$ noté $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

2.3 Les espaces $H^s(\Omega)$

Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ on généralise la définition des espaces de Sobolov par l'analyse de Fourier en utilisant les distributions tempérées dont l'espace est $S'(\mathbb{R}^n)$ le dual de l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.3 *On définit pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) \left(ou \in L^2(\mathbb{R}^n) \right) : \left[1 + |\xi|^2\right]^{s/2} |\widehat{u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

qui est un Banach pour la norme

$$\|u\|_{H^s} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left[1 + |\xi|^2\right]^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right]^{1/2} ; \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et $\widehat{u}(\xi) = TF(u(x))$, transformée de Fourier.

$\forall s \in \mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n)$ est un hilbertien pour le p.s.

$$< u; v >_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} \left[1 + |\xi|^2\right]^s |\widehat{u}(\xi)| \, |\widehat{v}(\xi)| \, d\xi.$$

$S(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ qui à son tour est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.6 *Pour $s = m \in \mathbb{N}$ les deux définitions coincident.*

Théorème 2.1 *(Théorème d'injection de Sobolev). Pour $s > \dfrac{n}{2}$ les éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sont des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.*

Ceci sous entend que pour s assez grand, les fonctions de $H^s(\mathbb{R}^n)$ admettent un représentant continu.

3 Propriétés de certains espaces de Sobolev

3.1 L'espace : $H^1(\Omega)$

Presque toutes les propriètés que nous allons voir pour $H^1(\Omega)$ sont vraies pour $W^{1,p}(\Omega)$; $p \in [1, +\infty[$. Nous traitons le cas $p = 2$ car c'est un cas très important pour les EDP elliptiques.

De (3.1), on voit que pour $u \in H^1(\Omega)$ on a $\|u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H^1}$ .Aussi,

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Proposition 3.1 *Soit* $u \in L^2(\Omega)$. *Alors* $u \in H^1(\Omega)$ *si et seulement si il existe* $C > 0$ *telle que, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et pour tout* $i = 1, ..., n$

$$\left| \int_\Omega u(x)\, \partial_{x_i} \varphi(x)\, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci est dû à la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 3.2 *Si* $u, v \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *alors* $uv \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et*

$$\partial_{x_i}(uv) = u\partial_{x_i} v + v\partial_{x_i} u.$$

3.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$: une adhérence

$\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$ pour Ω borné. On définit alors l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ ainsi.

Définition 3.1 *On définit l'espace comme étant l'adhérence de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$ *ainsi*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \exists \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega) : \varphi_k \to u \text{ dans } H^1(\Omega) \right\}.$$

Muni de la norme de $H^1(\Omega)$ *ou de la norme équivalente*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i} u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)};$$

$H_0^1(\Omega)$ *est un Banach et un hilbertien.*

Remarque 3.1 *Cette norme* $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ *sur* $H_0^1(\Omega)$ *est une semi-norme sur* $H^1(\Omega)$.

Remarque 3.2 $(\varphi_k)_k$ *cnverge vers* u *dans* $H^1(\Omega)$ *càd* $\|\varphi_k - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ *quand* $k \to \infty$.

Remarque 3.3 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $H^1(\mathbb{R}^n)$ *alors* $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.3 *(Inégalité de Poincaré) Supposons* Ω *un ouvert borné. Alors, il existe une constante* $C_\Omega > 0$ *telle que pour* $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n}.$$

D'où, $H_0^1(\Omega) \underset{fermé}{\subset} H^1(\Omega)$ *strictement.*

Cas unidimensionnel : $\Omega = I =]a, b[$

Théorème 3.1 *(Injection de Sobolev en dimension). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Il existe une constante $C > 0$ (indépendante de p et dépendante de I) telle que pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $u \in H^1(I)$ on ait*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{H^1(I)}$$

càd $L^\infty(I) \subset H^1(I)$ avec injection continue. Si de plus I est borné, alors l'injection $H^1(I) \subset C\left(\overline{I}\right)$ est compacte.

On dit que les éléments de $H^1(I)$ sont des fonctions continues dans le sens où on peut identifier tout élément de $H^1(I)$ à son représentant continu par le biais du théorème suivant.

Théorème 3.2 *Soit $u \in H^1(I)$. Il existe une unique fonction $\widetilde{u} \in C\left(\overline{I}\right)$ telle que $u = \widetilde{u}$ presque partout, et l'on a, $\forall x, y \in I$ on a $\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int\limits_y^x u'(s)\, ds$.*

Remarque 3.4 *Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on a $H^1(\Omega) \nsubseteqq C\left(\overline{\Omega}\right)$.*

Corollaire 3.1 *Si I est non borné et $u \in H^1(I)$ on a $u(x) \to 0$, pour $|x| \to \infty$.*

3.3 L'espace $H^{-1}(\Omega)$: un dual

Le dual de $H_0^1(\Omega)$ s'identifie à un espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ noté $H^{-1}(\Omega)$ et peut être aussi défini par H^s pour $s = -1$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Théorème 3.3 *L'espace $H^{-1}(\Omega)$ satisfait*

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \exists f_0, f_i \in L^2(\Omega) : u(x) \underset{dans \mathcal{D}'(\Omega)}{=} f_0(x) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i(x) \right\}.$$

Remarque 3.5 *Les $f_i; i = 0, 1, ..., n$ ne sont pas uniques alors on définit la norme*

$$\|u\|_{H^{-1}} = \inf_{\{f_i; i=0,1,\dots,n\}} \sum_{i=0}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}$$

et de produit scalaire (cas réel)

$$< u, v >_{H^{-1}, H_0^1} = \int\limits_\Omega f_0(x)\, v(x)\, dx - \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega f_i(x)\, \partial_{x_i} v(x)\, dx.$$

3.4 L'espace $H^2(\Omega)$

C'est un espace de Sobolov des fonctions de $L^2(\Omega)$ telles que leurs dérivées d'ordre $\leq$ 2sont toutes dans $L^2(\Omega)$.

$$H^2(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \partial^{|\alpha|}u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 2 \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)\right\}.$$

Remarque 3.6 *Supposons $n = 1$càd $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alors $|\alpha| \leq 2$ implique que α est un de ces vecteurs* $(1,0), (0,1), (1,1), (2,0), (0,2)$.

D'où, $\partial^{|\alpha|}u$ est égale à une de ces dérivées respectivement

$$\partial_{x_1}u, \partial_{x_2}u, \partial^2_{x_1x_2}u, \partial^2_{x_1x_1}u, \partial^2_{x_2x_2}u.$$

Une propriété importante qui limite la vérification au laplacien $\Delta = \sum_{1\leq i\leq n} \partial^2_{x_ix_i}$.

Proposition 3.4 *Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors $u \in H^2(\Omega)$ si $\Delta u \in L^2(\Omega)$.*

4 Notions importantes

4.1 Opérateur trace

Définition 4.1 *Pour $u \in C(\overline{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord noté $\partial\Omega$ et $\overline{\Omega} = \Omega \cup\ \partial\Omega$.L'opérateur trace est notée $\gamma_0 : C(\overline{\Omega}) \to C(\partial\Omega)$ définie par $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$.*

La trace de u sur $\partial\Omega$ est alors $\gamma_0 u : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma_0 u(x) = u(x), x \in \partial\Omega$.

L'opérateur trace est linéaire.

Remarque 4.1 *Les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas obligatoirement continues pour de telles fonctions sur un ouvert borné Ω à bord régulier, on définit l'opérateur trace ainsi.*

Proposition 4.1 *Lapplication trace $\gamma_0 : C^1_c(\overline{\Omega}) \to C(\partial\Omega)$ se prolonge par continuité en un opérateur linéaire borné $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ tel que $\gamma u = u$ p.p. sur $\partial\Omega$ (pour la mesure de lebesgue $(n-1)$-dimensionnelle) et $\exists C > 0, \forall u \in H^1(\Omega)$*

$$\|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus, le noyau Ker$\gamma = H^1_0(\Omega)$ et l'image $\operatorname{Im}\gamma = \gamma(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ sachant que $H^{1/2}(\partial\Omega) \underset{dene}{\subset} L^2(\partial\Omega)$.

On peut alors redéfinir H_0^1 ainsi.

Proposition 4.2 *$H_0^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur le bord $\partial\Omega$,*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\right\}.$$

Remarque 4.2 *Il n'y a pas de notion de trace pour les fonctions de $L^2(\Omega)$ en général càd*

$$\nexists C > 0 : \|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 4.3 *Sur $H^m(\Omega)$, on a*

$$\begin{aligned} Ker\gamma &= H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \operatorname{Im}\gamma &= \gamma(H^m(\Omega)) = H^{m-1/2}(\partial\Omega) \underset{dense}{\subset} L^2(\partial\Omega) \end{aligned}$$

et sa norme est $\|u\|_{H^{m-1/2}(\partial\Omega)} = \inf\limits_{v\in\gamma^{-1}(u)} \|v\|_{H^m(\Omega)}$.

Aussi, $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}_{H^m(\Omega)} = H_0^m(\Omega) \subset H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Remarque 4.3 *Pour $n = 1$, $H_0^m(I)$ est l'espace des fonctions telles que*

$$\gamma u = \gamma u' = ... = \gamma u^{(m-1)} = 0.$$

Cette carctéristique n'est pas vraie pour $n \geq 1$.

4.2 Opérateur de prolongement

Théorème 4.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est de classe C^m alors il existe un opérateur de prolongement linéaire continu $P : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ tel que $Pu = u|_\Omega$ et $\exists C_\Omega > 0$*

$$\|Pu\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

Théorème 4.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1.$\forall u \in H^1(\Omega)$, on a équivalence entre ces assertions :*

1- $u \in H_0^1(\Omega)$; 2- $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$; 3- $\gamma_0 u = 0$;4- $\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x)\,; x \in \Omega \\ 0; x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$

On peut ainsi écrire $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)\}$.

Une autre version de ce théorèmeest la suivante.

Théorème 4.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1.$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire $u = u_1 + u_2$ telle que $u_1 = u|_\Omega$ et $u_2 = u|_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}$ et on :*

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 \in H^1(\Omega) \\ u_2 \in H^1(\mathbb{R}^n\setminus\Omega) \\ \gamma u_1 = \gamma u_2. \end{cases}$$

4.3 Formules de Green

Ce sont un outil fondamental pour la formulation faible des EDP's.

Théorème 4.4 *(Théorème de Green) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné à bord $\partial\Omega$ de classe C^1(ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$). Alors $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ $\left(ou\ C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)$ on a pour $i = 1, ..., n$*

$$\int_\Omega \partial_{x_i} u(x) . v(x)\, dx = -\int_\Omega u(x) . \partial_{x_i} v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u(x) . \gamma v(x)\, \eta_i dS; \tag{3.3}$$

où dS est la mesure surfacique ; $\overrightarrow{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_n)$est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$.

Remarque 4.4 *Pour $n = 1$, ceci est l'intégration par parties sachant que $\int_\Omega u(x)\, dx = \int\int_\Omega ... \int u(x_1, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n$.*

La somme de (3.3) donne la première formule de Green et l'application de cette formule à $\Delta u.v = \nabla(\nabla u).v$ au lieu de $\nabla u.v$ donne la deuxième formule de Green.

Corollaire 4.1 *La première formule de Green pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega \nabla u(x) . v(x)\, dx = -\int_\Omega u(x) . \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u(x) . \gamma v(x)\, \overrightarrow{\eta} dS.$$

La deuxième formule de Green pour tout $u \in H^2(\Omega)$ $\left(\ ou\ C^2\left(\overline{\Omega}\right)\right), v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u(x) . v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) . \gamma v(x)\, dS.$$

où dS est la mesure surfacique, $\dfrac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\partial_{x_i} u) . \eta_i = \gamma(\nabla u) . \overrightarrow{\eta}$.

De plus, pour $u, v \in u \in H^2(\Omega)$ $\left(\ ou\ C^2\left(\overline{\Omega}\right)\right)$,on a

$$\int_\Omega \Delta u(x) . v(x)\, dx - \int_\Omega u(x) . \Delta v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) . \gamma v(x)\, dS - \int_{\partial\Omega} \gamma u(x) . \frac{dv}{d\overrightarrow{\eta}}(x)\, dS.$$

Remarque 4.5 *En général, on écrit les formules sans noter γ on note*

$$\int_{\partial\Omega} \gamma u(x) \cdot \gamma v(x)\, dS = \int_{\partial\Omega} u(x) \cdot v(x) \overrightarrow{\eta}\, dS$$

et on sous entend que u et v prennent leurs valeurs en $x \in \partial\Omega$. Aussi, pour la condition de Neumann on a

$$\frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) = \nabla u . \overrightarrow{\eta}.$$

Chapitre 4

Etude des EDP's de Poisson et Laplace.

1 Généralités

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique qui correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. Nous allons montrer que les problèmes aux limites sont bien posés càd qu'elles admettent une solution, unique, et stable.

1.1 Equations elliptiques : Modèle général

Le modèle général des équations elliptiques qui sont des EDP's d'ordre deux en utilisant un opérateur différentiel $\mathcal{L}$ de la forme :

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_i}\left(a_{ij}\left(x\right)\partial_{x_j}u\right) \tag{4.1}$$

où les fonctions $a_{ij}\left(x\right)$ sont données sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1 *L'opérateur$\mathcal{L}$ est dit (uniformément) elliptique dans l'ouvert Ω si et seulement si, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right)x_i x_j \geq C\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = c\left|x\right|^2, \forall x = \left(x_1,...,x_n\right) \in \Omega.$$

Remarque 1.1 *On peut aussi définir l'équation elliptique ainsi*

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\partial_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\partial_{x_i} u + c(x)\,u(x) \tag{4.2}$$

avec les valeurs propres de la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1\ldots,n}$ *qui sont toutes non nulles et de même signe ou encore* $< A(x)\,x; x >\geq C\,|x|^2$.

On considére alors l'équation suivante :

$$\mathcal{L}u(x) = 0 \text{ ou } f(x)\,; \quad x \in \Omega.$$

Pour que le problème soit bien posé, il convient d'ajouter des conditions aux bordx de Ω noté $\partial\Omega$. Les exemples types de ces conditions sont :

- Les conditions de **Dirichlet** homogénes ($u(x) = 0$ sur $\partial\Omega$) ou non homogénes ($u(x) = u_0(x)$ sur $\partial\Omega$).

- Les conditions de **Neumann** homogénes ($\frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) = 0$ sur $\partial\Omega$) ou non homogéne ($\frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) = u_1(x)$ sur $\partial\Omega$).

- Les conditions **mixtes** ($\alpha u(x) + \beta\frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) = 0$) ou ($u = u_0$ sur Γ_1 et $\frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(x) = u_1(x)$ sur Γ_2 : $\Gamma_1 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$).

1.2 Le principe du maximum

Un des plus importants théorèmes est celui-ci.

Théorème 1.1 *(Principe du maximum)Soit* $\mathcal{L}u \geq 0$ (*resp.* ≤ 0) *pour* $\mathcal{L}$ *défini par (4.2) sur* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$.

1- Si $c(x) = 0$ *sur* Ω *alors* u *atteint son maximum(resp. son minimum) sur* $\partial\Omega$.

2- Si $c(x) \leq 0$ *alors* $\max_{x\in\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$ *où* $u^+ = \max(u, 0)$*(resp.* $\min_{x\in\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-$ *où* $u^- = \min(u, 0)$).

1.3 Cas spécial : Laplace et Poisson

Dans (4.1),

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{L}u = -\sum_{i=1}^{n} \partial^2_{x_i x_i} u = -\Delta u.$$

$-\Delta u = 0$ (ou $\Delta u = 0$) est dite équation de Laplace et $\Delta u = f(x)$ est dite équation de Poisson qui décrit un état d'équilibre.

Définition 1.2 *La solution cherchée est dite classique si elle est dans $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et est faible si elle dans $H^2(\Omega)$ (ou $H^1(\Omega)$) et vérifie l'équation au sens des distributions.*

Définition 1.3 *Soit $E(u) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2$ dite énergie. Le problème (4.5) est dit à énergie finie si $E(u) < \infty$.*

L'énergie de l'équation de Poisson est définie par

$$E(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \int\limits_{\Omega} f(x) u(x) dx \ ; \ (< f, u >).$$

Proposition 1.1 *Si $\overline{u}$ minimise $E(u)$ pour tout u tel que $E(u) < \infty$ alors $\overline{u}$ est solution du problème (4.5).*

2 Fonctions harmoniques

Rappelons que si $\Delta u = 0$, u est dite harmonique. Nous allons voir deux cas.

2.1 Fonctions harmoniques sur un borné

Ce théorème donne des propriétés importantes d'une fonction harmonique.

Théorème 2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, on a :*

1- Si u est harmonique sur Ω telle que $u = 0$ sur $\partial\Omega$ alors $u = 0$ sur $\overline{\Omega}$.

2- Si u est harmonique sur Ω et $\frac{du}{d\overrightarrow{\eta}} = 0$ sur $\partial\Omega$ alors $u = c$; constante sur Ω.

Ce théorème assure l'unicité des solutions et on aura alors si $u_1$et u_2 sont deux fonctions harmoniques sur Ω , telles que $u_1= u_2$ sur $\partial\Omega$, alors $u_1= u_2$ sur $\overline{\Omega}$.

Une autre propriété remarquable des fonctions harmoniques est le **principe du maximum**, à savoir que si u est harmonique alors elle atteint ses extrema (maximum et minimum) seulement sur le bord de Ω.

Théorème 2.2 *(Principe du maximum) Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, est harmonique sur Ω, ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$, alors :*

- soit u est constante dans $\overline{\Omega}$;

- soit $\min\limits_{x \in \partial\Omega} u(x) < u(x) < \max\limits_{x \in \partial\Omega} u(x)$; pour tout $x \in \Omega$.

Remarque 2.1 *Ceci est possible pour* $u \in H^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ *et* Ω *de bord de classe* C^2.

2.2 Fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^n$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n, n \geq 2$, on le traite comme une sphére de centre zéro ou quelconque et de rayon infini ainsi $\mathbb{R}^n = \lim\limits_{R \to \infty} B(x_0, R)$. Le Laplacien étant invariant par translation et rotation, alors pour les fonctions ne dépendant que de $r = |x - x_0|$, on a $u(x) = v(|x - x_0|) = v(r)$,$x, x_0 \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$, et $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ (ou $H^2(\mathbb{R}^n)$), le laplacien est donné par,

$$\Delta v(r) = v"(r) + \frac{(n-1)}{r} v'(r).$$

On peut écrire,

$$\Delta_x u(x) = \Delta_r v(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} v(r)\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r) + \frac{(n-1)}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(r). \quad (4.3)$$

Proposition 2.1 $\Delta u = 0$ *sur* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *si et seulement si* $v(r) = ar^{2-n} + b$ *si* $n \geq 3$ *et* $v(r) = a \ln r + b$ *si* $n = 2$ *avec* a, b *sont des constantes.*

Théorème 2.3 *Si* $\Delta u = 0$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *et* u *est bornée alors* u *est constante.*

Définition 2.1 *Une fonction ne dépendant que du module* $r = |x|$ *est dite* ***radiale***.

3 Résolution formelle de l'équation de Laplace

3.1 Cas de domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

La résolution analytique de l'équation de Laplace et aussi celle de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ est possible, le travail se complique pour $n \geq 3$.

Coordonnées cartésiennes

On prend comme exemple l'équation de Laplace sur $]0, L[\times]0, L[$ avec des conditions de Dirichlet sur les bords en x càd les droites $x = 0$ et $x = L$ homogènes et sur les bords en y càd les droites $x = 0$, homogènes et $x = L$ non homogènes. Par séparation de variables on a $\Delta u(x, y) = 0$ donne les équations

$$\begin{cases} X" = -\lambda^2 X \\ X(0) = 0 = X(1) \end{cases} \text{ et } Y" = \lambda^2 Y;$$

de solutions

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 ; \; X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) ; \quad Y_k(y) = A_k sh\left(\frac{k\pi}{L}y\right).$$

D'où la solution est une série de Fourier

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) sh\left(\frac{k\pi}{L}y\right). \end{aligned}$$

Pour déterminer les constantes A_k on a si $f \in L^2$

$$\begin{aligned} u(x,L) &= f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) sh(k\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\ f_k &= \frac{< f, \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) >}{< \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) >} = \frac{L}{2} \int_{[0,L]} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \end{aligned}$$

où les $f_k$sont les coefficients de Fourier de $f(x)$ .D'où, la solution est

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{sh(k\pi)} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) sh\left(\frac{k\pi}{L}y\right).$$

Propriètés de la solution :

1- La solution vérifie le principe du maximum comme on a :

$$\max_{(x,y)\in[0,L]\times[0,L]} |u(x,y)| \leq \max_{(x,y)\in[0,L]\times[0,L]} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right| \leq \max_{x\in[0,L]} |f(x)|.$$

2-Si $f(x) = 0$ la solution est nulle.

3- La régularité de la solution dépend de celle de f.

On doit étudier la convergence des dérivations de la série. La solution est classique càd la série $u, \nabla u$ et Δu convergent si f est de classe C^4(au moins C^3). On peut parler de solution faible au sens des distributions pour $u \in H^2$ ou H^1 et de même pour f.

Coordonnées polaires

La problème en coordonées polaires sur le disque

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < R\right\} \\ &= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\, : 0 \leq r < R\right\} \end{aligned}$$

s'écrit ainsi

$$\begin{cases} \Delta v(r,\theta) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}, \ 0 < r < R, \theta \in [0, 2\pi[\\ v(R,\theta) = g(\theta), \quad r = R. \end{cases}$$

La résolution par séparation de variables donne pour $v(r,\theta) = \Theta(\theta)\Gamma(r)$ la série

$$v(r,\theta) = g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^c \cos(k\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^s \sin(k\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^k \tag{4.4}$$

où

$$\begin{aligned} g_0 &= \ < g, 1 >= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} g(\theta)\, d\theta; \\ g_k^c &= \ < g, \cos(k\theta) >; \ g_k^s =< g, \sin(k\theta) > . \end{aligned}$$

Un développement de cette série donne une solution convolution

$$v(r,\theta) = K(r,\theta) * g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} K(r,\theta - s)\, g(s)\, ds$$

où $K(r,\theta)$ est dit noyau de Laplace donné par

$$K(r,\theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}.$$

Propriètés de la solution :

1- La solution dépend presque partout de g et si $g(\theta) = 0$ la solution est nulle.

2-La solution vérifie le principe du maximum comme on a :

$$\max_{r\in]0,R];\theta\in[0,2\pi[} |v(r,\theta)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} |K(r,\theta - s)|\,|g(s)|\, ds \leq C \max_{\theta\in[0,2\pi[} |g(\theta)| .$$

3- La régularité de la solution ne dépend de celle de g, même si g est dans L^1(ou C) la solution peut être de classe C^∞ car le noyau $K(r,\theta)$ l'est pour $r \in \,]0, R[\,; \theta \in [0, 2\pi[$.

3.2 Cas de domaine non borné $\Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

Le demi-plan

Soit le demi-plan $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } u(x,y) \underset{y\to\infty}{\to} 0. \end{cases}$$

Alors, par transformation de Fourier par rapport à $x \in \mathbb{R}$, on a le problème

$$\begin{cases} (2i\pi\xi)^2 \widehat{u} + \dfrac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2} = 0, \ \xi \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \text{ et } \widehat{u}(\xi,y) \underset{y\to\infty}{\to} 0; \end{cases}$$

de solution

$$\widehat{u}(\xi,y) = C(\xi)\exp(-2\pi|\xi|y)$$

avec

$$\exp(-2\pi|\xi|y) = TF\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right) \text{ et } C(\xi) = TF(g(x)).$$

Donc

$$\widehat{u}(\xi,y) = TF\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right) TF(g(x)) = TF\left(\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right) * g(x)\right).$$

On peut alors écrire

$$u(x,y) = K(x,y) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi\left((x-z)^2+y^2\right)} g(z)\,dz$$

où $K(x,y)$ est dit noyau de Laplace sur le demi-plan.

- u dépend de g presque partout, vérifie le principe du maximum mais a une régularité forte (C^∞) indépendemment de g ($\in L^1(\Omega)$) car $K(x,y)$ est très régulière.

Le Plan $\mathbb{R}^2$

La solution peut être obtenue en faisant tendre $R \to \infty$ en utilisant les coordonnés polaires. Dans la solution (4.4) si $r = 0$ ou $R \to \infty$ la solution est la constante

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} g(\theta)\,d\theta < \infty.$$

C'est une propriété des fonctions harmoniques.

3.3 Coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}^n$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n, n \geq 2$, on le traite comme une sphére de centre zéro ou quelconque et de rayon infini ainsi $\mathbb{R}^n = \lim\limits_{R\to\infty} B(x_0, R)$. On passe alors aux coordonnées sphériques ainsi définies

$$r = |x - x_0| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2 \right)^{1/2} \textit{ et } \sigma = \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Remarque 3.1 *En général on prend $x_0 = 0$.*

Définition 3.1 *La sphére unité de $\mathbb{R}^n$ notée*

$$\partial B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = S_1^{n-1}$$

de surface (dite aussi volume) $\omega_n = \int\limits_{S_1^{n-1}} d\sigma$, sa mesure surfacique noté dS telle que

$$dx = drdS = r^{n-1} drd\sigma.$$

On décompose le laplacien pour $u(x) = v(r,\sigma)$

$$\Delta_x u(x) = \Delta_r v(r,\sigma) + \frac{1}{r^2} \Delta_\sigma v(r,\sigma),$$

où la forme de Δ_σ n'est explicite que pour $n = 2$ ou $n = 3$ et

$$\Delta_r v(r,\sigma) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} v(r,\sigma) \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r,\sigma) + \frac{(n-1)}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(r,\sigma)$$

.

Remarque 3.2 *Le Laplacien étant invariant par translation et rotation, alors les solutions des équations elliptiques en général et celles de Laplace et Poisson spécialement sont des fonctions* ***radiales*** *càd elles ne dépendent que de $r = |x|$ d'où $\Delta_x = \Delta_r$.*

4 Equations de Poisson et solutions faibles

On commence par un résultat général pour l'unicité de solutions classiques.

Théorème 4.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné avec bord $\partial\Omega$ de classe $C^2, g \in C(\partial\Omega), f \in C(\Omega)$, la solution classique du problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

est unique. De même pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ \dfrac{du}{d\overrightarrow{\eta}} = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

la solution est unique à une constante près. Ceci pour f et g pouvant être nulles.

Remarque 4.1 *Pour qu'il existe une solution au problème de Neumann (4.6) dans Ω il est nécessaire que f et g satisfassent la condition de compatibilité suivante*

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\,dx.$$

Si $f(x) = 0$ la condition devient $\int_{\partial\Omega} g(x)\,dx = 0$.

Remarque 4.2 *Ceci est dû à la formule de Green pour $v = 1$*

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{d\overrightarrow{\eta}} dx.$$

4.1 Solution faible

Définition 4.1 *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. On appelle une fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ une solution faible du problème*

$$-\Delta u = f \qquad sur\ \mathbb{R}^n \tag{4.7}$$

si pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} -u(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{4.8}$$

Remarque 4.3 *$u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ implique que $u(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.*

Définition 4.2 *Une solution E vérifiant $-\Delta E = \delta_0$ (l'impulsion de Dirac) est dite **fondamentale**.*

C'est une solution faible au sens des distributions.

La résolution de (4.3) sur $H^2(\Omega)$ donne la solution radiale

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{r^{n-2}}; & n \geq 3 \text{ où } C_1 = \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n} \\ C_2 \ln r; & n = 2 \quad \text{où } C_2 = \dfrac{-1}{2\pi} \end{cases}$$

avec $r = |x|$; $\omega_n = \dfrac{(2\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ est la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On peut vérifier que $-\Delta F = \delta_0$, alors en supposant que u est radiale, on a

$$-\Delta u(r) = f(r) = f(r) * \delta_0 = f(r) * (-\Delta F(r)) = -\Delta (f * F)(r).$$

Donc, la solution faible de $-\Delta u = f \quad$ sur $\Omega = \mathbb{R}^n$ est $u(r) = (F * f)(r)$ au sens des distributions selon (5.2).

Théorème 4.2 *Supposons $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et que $f(r)\ln r \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si $n = 2$. Alors $(f * F)(r)$ est une solution localement intégrable de $\Delta u = f$ càd $\Delta(f * F) = f$.*

4.2 Fonction de Green

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné à bord très régulier. On considére l'équation de Poisson avec condition de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

A noter qu'on peut définir un noyau de Laplace ainsi $K(x, y) = F(|x - y|)$ solution de

$$\Delta_x K(x, y) = \delta_y \ , \quad (x, y) \in \ \Omega,$$

au sens des distributions qui est très régulier pour $x \neq y$.

Théorème 4.3 *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ (ou $H^2(\Omega)$) alors $\forall x \in \Omega$*

$$u(x) = -\int_{\Omega} K(x, y)\,\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[K(x, y)\,\frac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(y) - u(y)\,\frac{dK}{d\overrightarrow{\eta}}(x, y)\right] dS.$$

Afin de supprimer le terme contenant $\dfrac{du}{d\overrightarrow{\eta}}(y)$, l'idée est d'introduire pour x fixé une fonction correctrice $\phi(x, y)$. (à construire)

Théorème 4.4 *$\exists\phi \in C^2\left(\Omega \times \overline{\Omega}\right)$ tel que pour $\forall x \in \Omega$ on a*

$$\begin{cases} \Delta_y \phi(x,y) = 0, & y \in \Omega \\ \phi(x,y) = K(x,y), & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On pose $G(x,y) = K(x,y) - \phi(x,y)$.

Théorème 4.5 *Soit $f \in C\left(\overline{\Omega}\right), g \in C(\partial\Omega)$. Alors la solution du problème (4.9) donnée par*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{dG}{d\overrightarrow{\eta}}(x,y)\, dS + \int_{\Omega} G(x,y) f(y)\, dy \tag{4.10}$$

est solution faible.

Définition 4.3 *$\phi(x,y)$ est dite fonction correctrice.*

$G(x,y) = K(x,y) - \phi(x,y)$ est dite fonction de Green pour Ω.

$\dfrac{dG}{d\overrightarrow{\eta}}(x,y)$, $x \in \Omega, y \in \partial\Omega$ est appelé noyau de Poisson.

Remarque 4.4 *Le problème de construction de la fonction $\phi(x,y)$ et donc de Green G est difficile et qui ne peut pas être faite explicitement en général.*

Proposition 4.1 *(Estimation à priori) La solution du problème (4.9) donnée par (4.10) satisfait*

$$\max_{x\in\Omega} |u| \leq \max_{x\in\partial\Omega} |g| + C_\Omega \max_{x\in\Omega} |f|.$$

Propriétés de la fonction de Green

1- Si on fixe $x \in \Omega$ alors

$$\begin{cases} \Delta_y G(x,y) = \delta_x, & y \in \Omega \\ G(x,y) = 0, & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

au sens des distributions.

2- G est symétrique càd $\forall x, y \in \Omega$ on a $G(x,y) = G(y,x)$.

3- $\int_{\Omega} G(x,y)\, dy = 1$.

4- G est harmonique et $G(x,y) \to 0$ quand $x \to y \in \partial\Omega$.

Chapitre 5

Formulation variationnelle (FV)

1 Théorème de Lax-Milgramm

La formulation variationnelle (FV) d'un problème d'EDP, dite aussi formulation faible, est une forme équivalente à ce problème d'EDP sous sa forme classique dite formulation forte. Cette notion est cruciale pour comprendre la méthode numérique des éléments finis. Le principe est de remplacer l'EDP par une formulation équivalente (FV) obtenue en intégrant l'équation après l'avoir multiplier par une fonction quelconque, dite test sur un espace fonctionnel. Plusieurs questions importantes se posent :

1- Dans quel espace fonctionnel les fonctions test v sont admissibles ?

2- Sous quelles conditions la FV possède-t-elle une solution unique ?

3- Sous quelles conditions la FV est-elle équivalente à la formulation forte ?

C'est le théorème de Lax-Milgram qui assure l'existence et l'unicité de la solution de cette FV du problème.

Nous donnons ici la définition de la FV.

Définition 1.1 *Une formulation variationnelle est la donnée :*

- *d'un espace de Hilbert V ,*
- *d'une forme bilinéaire continue a,*
- *d'une forme linéaire continue l*

et consiste à rechercher la solution de $u \in V$ et pour tout $v \in V$, $a(u,v) = l(v)$.

Théorème 1.1 *Si a est une forme bilinéaire, continue et coercive sur un Hilbertien V. Alors le problème variationnel précédent admet une unique solution.*

De plus, si a est symétrique, alors u est l'unique minimiseur de la fonctionnelle

$$E(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - l(v).$$

Remarque 1.1 *u est l'unique minimiseur de $E(v)$ càd $E(u) = \inf_{v \in V} E(v)$.*

Définition 1.2 *Une forme bilinéaire sur un Hilbertien V est une application qui associe à un couple $(u,v) \in V \times V$ un scalaire noté $a(u,v)$linéaire en chacun de ses 2 arguments u et v.*

Définition 1.3 *a est dite continue sur $V \times V$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|a(u,v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V.$$

Définition 1.4 *a est dite coercive ou elliptique sur un Hilbertien V s'il existe une constante strictement positive $\alpha > 0$ telle que :*

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2.$$

Remarque 1.2 *Une forme bilinéaire coercive est une généralisation de la notion de matrice définie positive.*

Définition 1.5 *a est dite symétrique si $a(u,v) = a(v,u)$.*

2 Problème de Dirichlet

Un problème de Dirichlet est une équation de Poisson avec conditions aux limites de type Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{sur } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Le cadre classique serait de considérer $f \in C(\overline{\Omega})$ et chercher une solution $u \in C^2(\Omega)$. La FV sert à déterminer une fonction u dans un certain espace fonctionnel V telle que le problème est satisfait pour f donnée dans un certain espace fonctionnel H où on utilise les espaces de Sobolev et les dérivées au sens des distributions et la condition aux limites au sens de la théorie des traces.

Nous avons des formulations équivalentes au problème (5.1).

Proposition 2.1 *Soit $f \in L^2(\Omega)$, alors les problèmes suivants sont équivalents :*

i- Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ càd $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,$\forall$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\int_\Omega -u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{5.2}$$

ii- Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.3}$$

iii- Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

dite principe de Dirichlet.

Définition 2.1 *Une solution à un des problèmes équivalents formulés dans la proposition ci-dessus est appelée une solution faible ou solution variationnelle du problème de Dirichlet (5.1).*

Définition 2.2 *Le problème (ii) est la FV du problème de Dirichlet.*

Remarque 2.1 *Il est obtenue sachant que $\mathcal{D}(\Omega) \underset{dense}{\subset} H_0^1(\Omega)$ et par le thèorème de Green.*

L'approche variationnelle pour étudier problème de Dirichlet (5.1) est constituée de trois étapes

Etape 1 : Établissement d'une formulation variationnelle.

On multiplie l'équation -$\Delta u = f$ par v, on intégre sur Ω et on applique le thèorème de Green :

$$-\int_\Omega \Delta u v(x)\,dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx - \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\overrightarrow{\eta}}v(x)\,dS = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on choisit un espace de Hilbert V tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Ce qui donne l'équation (5.3) avec ∇u et ∇v qui doivent être dans $L^2(\Omega)$ alors les fonctions tests sont $v \in H_0^1(\Omega)$ qui est un Hilbertien.

Etape 2 : Existence et unicité de la solution de la FV.

Théorème 2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec un bord régulier et soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une solution unique au problème (5.3).*

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C \|f\|_{L^2}. \tag{5.4}$$

Preuve. On applique le théeorème de Lax-Milgram pour (5.3) avec $V = H_0^1(\Omega)$ avec $\|v\|_{H_0^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$; $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx$ et $l(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$.

Il est clair que la forme $a(u,v)$ est bilinéaire comme $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, w, v, z \in V$ on a

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta w, v) &= \alpha a(u,v) + \beta a(w,v); \\ a(u, \alpha v + \beta z) &= \alpha a(u,v) + \beta a(u,z). \end{aligned}$$

Aussi, lontrons que a est continue. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_\Omega |\nabla u(x) \nabla v(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H_0^1} \|u\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

donc a est continue. La forme l est linéaire comme $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall w, v \in V$ on a

$$l(\alpha w + \beta v) = \alpha l(w) + \beta l(v).$$

l est aussi continue du fait que

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \int_\Omega |f(x) v(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} = C_1 \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Vérifions que $a(u,v)$ est coercive (elliptique). On utilise l'inégalité de Poincaré puisque :

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq C_2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

on rajoute le même terme de part et d'autre, d'où

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \leq (1 + C_2) \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx;$$

alors

$$|a(u,u)| = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \geq \frac{1}{1+C_2}\left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx\right) = \frac{1}{1+C_2}\|u\|^2_{H_0^1}.$$

Le théorème de Lax-Milgram est vérifié donc la solution faible unique du problème (5.1) existe dans $V = H_0^1(\Omega)$.

Montrons (5.4), on a

$$\frac{1}{1+C_2}\|u\|^2_{H_0^1} \leq |a(u,u)| = |l(u)| \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{H_0^1};$$

alors après simplification

$$\|u\|_{H_0^1} \leq (1+C_2)\|f\|_{L^2} = C\|f\|_{L^2}.$$

■

Remarque 2.2 *L'inégalité (5.4), dite estimation d'énergie, garantit que l'énergie de la solution est contrôlée par celle de la donnée.*

Remarque 2.3 *Il est plus possible de prendre* $\|v\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2}$.

Etape 3 : Equivalence avec l'équation.

Cette étape parfois très délicate consiste à retourner à l'équation. Pour cela on procède aux mêmes intégrations par parties qui ont conduit à la FV, mais en sens inverse, et en les justifiant. Dans ce cas, c'est très facile si l'on suppose que la solution u de la FV est régulière $u \in H^2(\Omega)$ et que l'ouvert est aussi régulier. Par la formule de Green, on a pour $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\, dx &= -\int_\Omega \Delta u v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\overrightarrow{\eta}} v(x)\, dS \\ &= -\int_\Omega \Delta u v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx.\end{aligned}$$

On déduit que $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$ on a avec $u \in H_0^1(\Omega)$, la formulation forte

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega; \\ u(x) = 0 \text{ p.p.} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est dite solution forte.

Remarque 2.4 *Pour éviter d'augmenter la régularité de* u*, on peut utilise d'autres idées où on pose des conditions sur* f *et* Ω*.*

Remarque 2.5 *Le problème (5.1) est bien posé comme la solution (faible) existe, unique et stable.*

La stabilité de u *en rapport avec* f *est obtenue de (5.4) dans ce sens* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|f_1 - f_2\|_{L^2} < \delta$ *alors*$\|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_{H_0^1} < \varepsilon$*.*

Une version du principe du maximum pour ce problème.

Théorème 2.2 *Si* $f \geq 0$ *presque partout dans* Ω*, alors la solution de (5.1) vérifie* $u \geq 0$ *presque partout dans* Ω*.*

Preuve. On utilise la FV (5.3) avec $v = u^- = \min(u, 0)$ qui appartient bien à $H_0^1(\Omega)$ sachant que $u = u^+ + u^-$ où $u^+ = \max(u, 0)$. On a

$$\int_\Omega f(x)\, u^-(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla u^-(x)\, dx \geq \int_\Omega \nabla u^-(x)\, \nabla u^-(x)\, dx \geq 0$$

alors que $u^- \leq 0$ et $f \geq 0$ sur Ω, d'où $u^- = 0$ sur Ω. On en déduit que $u \geq 0$ sur Ω. ■

2.1 Conditions aux limites non homogènes

Soit le problème de Dirichlet non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{sur } \Omega \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.5}$$

où f et g sont deux fonctions données.

La remarque à faire est que si on définit

$$V = \left\{ v \in H^1 : \gamma v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

ce n'est pas un espace fonctionnel linéaire. La théorie des traces nous assure que si $\partial\Omega$ est de classe C^1 et si $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ alors il existe une fonction $G \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma G = g$ sur $\partial\Omega$ (c'est la trace de G sur $\partial\Omega$). En posant $w = u - G$, on peut reformuler le problème (5.5) comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta w = f + \Delta G, & \text{sur } \Omega \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.6}$$

On appelle cette étape le relèvement des conditions aux limites. Remarquons alors que si $G \in H^1(\Omega)$, bien entendu $\Delta G \notin L^2(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \Delta G(x)\, v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla G(x)\, \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{dG(x)}{d\overrightarrow{\eta}} v(x)\, dS = -\int_\Omega \nabla G(x)\, \nabla v(x)\, dx$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$. La FV de (5.6) est trouver $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla w(x)\, \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx - \int_\Omega \nabla G(x)\, \nabla v(x)\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.7}$$

Théorème 2.3 *Si Ω un ouvert borné à bord de classe C^1, le problème (5.5) admet une unique solution faible $u \in H^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. De plus, La solution vérifie*

$$\|u\|_{H^1} \leq B\left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right) \tag{5.8}$$

où $B > 0$.

Preuve. Sachant que le problème (5.5) est équivalent au problème (5.6). Pour cela posons, pour utiliser le théorème de Lax-Milgram pour la FV (5.7) :

$a(w,v) = \int_\Omega \nabla w(x)\, \nabla v(x)\, dx$ et $l(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx - \int_\Omega \nabla G(x)\, \nabla v(x)\, dx$.

Donc a est bilinéaire, continue et coercive (preuve précédente). $l(v)$ est linéaire (facile) et est continue. En effet, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
|l(v)| &\leq \int_\Omega |f(x)\, v(x)|\, dx + \int_\Omega |\nabla G(x)\, \nabla v(x)|\, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |\nabla G(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq C\left(\|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2}\right) = C\|v\|_{H_0^1};
\end{aligned}$$

avec $C = \max\left(\|f\|_{L^2}; \|\nabla G\|_{L^2}\right)$.

Le théorème de Lax-Milgram est vérifié donc w la solution faible unique du problème (5.6) existe dans $V = H_0^1(\Omega)$. Par contre u dépend du choix de G. Il convient donc de montrer que $u = w + G$ est unique. On considère donc un autre relèvement G_1 et la solution w_1 de la FV (5.7) correspondant à G_1 est unique. Alors, $u = w + G, u_1 = w_1 + G_1$vérifient $-\Delta(u - u_1) = 0$ sur Ω et $u - u_1 = g - g = 0$ sur $\partial\Omega$ alors par le théorème de Green on a

$$\int_\Omega \nabla(u(x) - u_1(x))\, \nabla v(x)\, dx = 0$$

où on peut prendre $v = u - u_1 \in H_0^1(\Omega)$ car $\gamma(u - u_1) = 0$,donc

$$\int_\Omega |\nabla (u(x) - u_1(x))|^2 \, dx = 0$$

et $u(x) - u_1(x) = b$, une constante de trace ($\gamma b = 0$) nulle donc $b = 0$, ce qui induit l'unicité de la solution faible u du problème (5.5) dans $H^1(\Omega)$.

L'étape trois pour w est comme précédemment.

Montrons maintenant (5.8), on a en premier

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+C_2} \|w\|_{H_0^1}^2 &\leq |a(w,w)| = |l(w)| \leq \|f\|_{L^2} \|w\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} \\ &\leq (\|f\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2}) \|w\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

d'où,

$$\|w\|_{H_0^1}^2 \leq (1+C_2)(\|f\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2}).$$

Alors pour $u = w + G$ telle que $\gamma G = g$, on a une propriété de la trace

$$\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \min\left\{ \|G_i\|_{H^1} : G_i \in H^1(\Omega) \text{ et } \gamma G_i = g \right\}$$

alors

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &\leq \|w\|_{H_0^1} + \|G\|_{H^1} \leq (1+C_2)(\|f\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2}) + \|G\|_{H^1} \\ &\leq (1+C_2)\|f\|_{L^2} + (2+C_2)\|G\|_{H^1} \\ &\leq (1+C_2)\|f\|_{L^2} + (2+C_2)\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\leq B\left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right), \end{aligned}$$

où $B = \max[(1+C_2);(2+C_2)]$. ■

3 Problème de Neumann

Pour des conditions aux limites de type Neumann, le problème s'énonce ainsi :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{du}{d\overrightarrow{\eta}} = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.9}$$

Nous traitons le problème non homogène car il n'est pas plus compliqué que le cas homogène. Remarquons que toute solution est définie à une constante près et donc non unique. Le problème est donc mal posé (au sens d'Hadamard). Pour assurer l'unicité de la solution, nous supposerons pour Ω plus régulier que $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ vérifient une condition de compatibilité et une contrainte sur la solution : la moyenne de u est nulle

$$\int_\Omega u(x)\,dx = 0.$$

La formule de Green donne

$$-\int_\Omega \Delta u v(x)\,dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx - \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\overrightarrow{\eta}} v(x)\,dS$$

alors

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)\,dS + \int_\Omega f(x)\nabla v(x)\,dx$$

Pour donner un sens à tous les termes de cette égalité, on pourrait choisir $V = H^1(\Omega)$. Comme si u est solution, alors $u + C$ est aussi solution, on va lever l'indétermination de cette constante additive en utilisant des fonctions de $H^1(\Omega)$ de moyenne nulle, on pose

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v(x)\,dx = 0 \right\}$$

qui est un sous espace fermé de l' espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ et est dpnc un espace de Hilbert. La FV de (5.9) est alors : trouver $u \in V$ telle

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)\,dS + \int_\Omega f(x)v(x)\,dx, \forall v \in V \tag{5.10}$$

Théorème 3.1 *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ régulier de classe C^1 de RN. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ qui vérifient la condition de compatibilité*

$$\int_{\partial\Omega} g(x)\,dS + \int_\Omega f(x)\,dx = 0. \tag{5.11}$$

Il existe une solution faible $u \in H^1(\Omega)$ de (5.9), unique à une constante près.

Si u est de moyenne nulle elle est unique et satisfait

$$\|u\|_{H^1} \leq K\left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) \tag{5.12}$$

Preuve. Pour cela posons, pour utiliser le théorème de Lax-Milgram pour la FV (5.10) :

$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$ et $l(v) = \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)\,dS + \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$

On vérifie le théorème de Lax-Milgram facilement.

Pour obtenir (5.12), on a de la continuité de l et la coercivité de a

$$\alpha \|u\|_{H^1}^2 \leq |a(u,u)| = |l(u)| \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

L'application trace $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ est continue, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}$ et on sait que $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$ alors

$$\|u\|_{H^1} \leq \frac{1}{\alpha}\left(\|f\|_{L^2} + C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) \leq K\left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right);$$

où $K = \max(1; C)/\alpha$. ■

Remarque 3.1 *La condition (5.11) s'obtient de l'intégration de $\Delta u + f = 0$ sur Ω et par la formule de Green on a*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u(x)\,dx + \int_\Omega f(x)\,dx &= -\int_\Omega \nabla u(x)\,\nabla(1)\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\overrightarrow{\eta}}dS + \int_\Omega f(x)\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega} g(x)\,dS + \int_\Omega f(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

L'étape 3 de la FV est de revenir vers l'équation d'origine.

Théorème 3.2 *Si l'unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (5.10) appartient à $H^2(\Omega)$, elle est solution de (5.9) au sens où*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) = 0 \quad p.p.\ sur\ \Omega \\ \dfrac{du(x)}{d\overrightarrow{\eta}} = g(x) \quad p.p.\ sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Preuve. il est clair que pour $u \in H^2(\Omega)$ et le théorème de Green on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u(x)\,\nabla v(x)\,dx &= -\int_\Omega \Delta u(x)\,v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\overrightarrow{\eta}}v(x)\,dS \\ &= \int_{\partial\Omega} g(x)\,v(x)\,dS + \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx.\end{aligned}$$

On déduit alors

$$\int_\Omega (-\Delta u(x) - f(x))\,v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(g(x) - \frac{du(x)}{d\overrightarrow{\eta}}\right)v(x)\,dS$$

et $(-\Delta u - f(x)) = 0$ sur $L^2(\Omega)$ si $g(x) - \dfrac{du(x)}{d\overrightarrow{\eta}} = 0$ sur $L^2(\partial\Omega)$ d'où le problème est vérifié p.p. ■

Bibliographie

[1] C .David et P. Gosselet, Equations aux dérivées partielles, Dunod 2012.

[2] H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maitrise. Masson, Paris, 1983.

[3] L. Boutet de Monvel, INTRODUCTION AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES, Cours de Maîtrise LBdM, fichier : EDP[2].pdf.

[4] E. Darrigrand and F. Méhats, EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ELLIPTIQUES, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, fichier : PolyEDPEcours.pdf.

[5] A. Munnier, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré, Nancy- Cedex, fichier : edp-4.pdf.

[6] M. Tucsnak, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Nancy Université/CNRS/INRIA, fichier : cours_EDP_2011.pdf.