L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement

Anne-Cécile Mathé, Joris Mithalal-Le Doze

▶ **To cite this version:**

Anne-Cécile Mathé, Joris Mithalal-Le Doze. L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement. La Pensée Sauvage. Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, 1, , 2019. hal-03473356

HAL Id: hal-03473356
https://hal.science/hal-03473356

Submitted on 9 Dec 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Version des auteurs, non mise en forme par l'éditeur

L'USAGE DES DESSINS ET LE ROLE DU LANGAGE EN GEOMETRIE : QUELQUES ENJEUX POUR L'ENSEIGNEMENT

Anne-Cécile Mathé[*], Joris Mithalal-Le Doze[**]

RESUME
L'usage des dessins occupe une place centrale en didactique de la géométrie. Objets d'étude pour eux-mêmes, lieux de conceptualisation, lieux de construction de preuves, le dessin est au centre de problématiques multiples de l'enseignement de la géométrie. Ce cours propose d'articuler différents travaux développés ces vingt dernières années en France autour des enjeux d'un travail centré sur le dessin. Nous proposerons des développements relatifs aux aspects langagiers : articulation de pratiques graphiques et langagières, enjeux d'apprentissages langagiers spécifiques, visant à éclairer le passage progressif vers une géométrie dont les objets et pratiques sont en premier lieu langagiers. Nous intéressant aux trois premiers cycles de l'enseignement (3-12 ans), nous reviendrons en particulier sur la manière dont les recherches autour des questions de la visualisation et des modalités de traitement, graphiques et langagiers, des dessins ont permis de repenser les enjeux de l'enseignement de la géométrie et offrent des pistes pour envisager une continuité possible de l'enseignement de la géométrie, au début de la scolarité obligatoire.

Mots clefs : didactique, géométrie, visualisation, dessin, instruments, langage

ABSTRACT
The use of drawings is crucial in geometry education. Drawings are at the core of multiple research questions: they may be studied for themselves, they are used to shape geometrical concepts and, later, support the proving process. This text focuses on various works developed over the last twenty years in France around the challenges addressed by a drawing-focused work. We will add language-related developments (drawing and language articulations, specific language learning challenges…) to enrich our analysis of the way geometry gradually turns into an activity characterized by language-focused objects and practices. Considering the three first school cycles (4-12 years old), we shall insist on the way research about visualisation, about graphical and language handling procedures of drawings, have led to reconsider the challenges of geometry education. They propose paths to making possible a continuity in geometry teaching at the beginning of compulsory school attendance.

Key words: geometry education, drawing, visualisation, instruments, language

[*] Université Clermont Auvergne ; Laboratoire ACTé (EA4281)
[**] Université de Lyon; Université Claude Bernard Lyon 1; S2HEP (EA4148)

INTRODUCTION

Nous conformant à des usages maintenant largement partagés en didactique de la géométrie française (Arsac, 1989 ; Chaachoua, 1997 ; Laborde & Capponi, 1994 ; Parzysz, 1989), nous désignerons dans ce texte par dessins des tracés sur une feuille de papier ou sur un écran d'ordinateur. Tout en les prenant en considération, nous excluons de cette définition les objets matériels tels que les formes géométriques[1], en bois ou en plastique, qui constituent des supports de travail courants en géométrie au début de l'école.

Les dessins et objets matériels occupent une place centrale en géométrie, avec des rôles et statuts variables, liés à la manière dont la géométrie est abordée. D'un côté, il est possible de suivre l'étymologie du terme géométrie et d'y voir une science de l'espace pour laquelle le rapport avec l'expérience sensible, et notamment le dessin, est fondamental. De l'autre, il est possible d'y voir une construction formelle dont les objets seraient susceptibles d'une représentation sous forme, notamment, de dessins. L'usage des dessins et objets matériels, l'évolution de leurs fonctions, de leurs interprétations et modalités de traitement au cours de la scolarité, constituent un enjeu central pour la didactique de la géométrie, qui appelle à des précisions éclairant l'ensemble des pratiques géométriques à l'école primaire. Comment comprendre les relations intimes qui unissent espace sensible et construction conceptuelle abstraite ? Comment penser un enseignement de la géométrie tirant partie de la nature de ces relations pour articuler travail sur des dessins et construction de connaissances et savoirs géométriques portant sur des objets idéaux ? Y a-t-il des enjeux d'apprentissage propres au dessin, et si oui lesquels ? Nous nous intéressons dans ce texte à la manière dont une partie des recherches menées en didactique de la géométrie en France depuis une vingtaine d'années s'est emparée de ces questions pour interroger les processus d'enseignement-apprentissage en géométrie au cours des trois premiers cycles (élèves de 3 à 12 ans). Nous proposons dans ce cours un retour sur ces travaux, sur les résultats et pistes qu'ils nous offrent aujourd'hui pour penser les enjeux de l'enseignement de la géométrie à l'école et de possibles situations d'enseignement et d'apprentissage pour les classes.

Nous montrerons dans une première partie que le dessin permet l'articulation d'une dimension pratique et d'une visée conceptuelle à divers niveaux – construction des objets abstraits, dimension sémiotique, résolution de problème, dimension épistémologique … – dont la synthèse s'opère via l'identification de trois espaces. A ce titre, il est un élément essentiel d'une construction conceptuelle en lien avec une manipulation d'objets du monde sensible. Ces considérations nous amèneront à interroger les conditions d'émergence d'une géométrie théorique en appui sur une *géométrie des tracés* (Perrin-Glorian & Godin, à paraître), qui fait intervenir une problématique de visualisation. Nous dégagerons un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie à l'école : la construction de ce que nous appellerons un rapport géométrique aux dessins.

Nous reviendrons ensuite sur les travaux d'un groupe de recherche du Nord de la France (Duval, 2005 ; Perrin-Glorian & Godin, 2017 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013), que nous appellerons *groupe de Lille*. Interrogeant les conditions susceptibles de favoriser une évolution du rapport des élèves aux dessins, ce groupe s'est en particulier intéressé au rôle des instruments en géométrie. Une vingtaine d'année de recherches expérimentales l'a conduit à faire des situations de reproduction de figures complexes un fil conducteur possible de l'enseignement de la géométrie à l'école. L'usage des dessins et leurs traitements instrumentés constituent des variables-clés de ces situations. Ces travaux renouvellent la manière dont nous pouvons penser l'enseignement-apprentissage de la géométrie, dans la perspective d'une progressivité du début de l'école au début du collège.

Nous montrerons enfin la manière dont des recherches plus récentes proposent de compléter ces travaux en s'intéressant au rôle du langage dans l'apprentissage de la géométrie à l'école. La question est alors celle de l'articulation entre registres de représentation sémiotique, graphique et langagier, dans l'apprentissage de la

[1] Ce choix est notamment motivé par les considérations de Duval (1995) qui précise que les maquettes, qui ne sont pas sujettes à transformation par les élèves, ne sont pas à son sens des représentations sémiotiques.

géométrie. Ce travail permet de mettre au jour des enjeux d'apprentissage langagiers qui nous semblent essentiels en géométrie, et encore peu pris en compte dans son enseignement. Nous évoquerons à la fin de ce texte de premières pistes didactiques explorées.

LE DESSIN DANS L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DE LA GEOMETRIE : UN ROLE ESSENTIEL DANS L'ARTICULATION ENTRE SENSIBLE ET CONCEPTUEL

1. Coexistence de plusieurs géométries à l'école

Questionner ce qu'est la géométrie de l'école puis du collège conduit en premier lieu à identifier deux finalités (Perrin-Glorian & Godin, à paraître) ou fonctions (Houdement, 2007) de la géométrie, trouvant leurs sources dans les origines historiques et épistémologiques de la géométrie.

La géométrie est d'une part une science de l'espace. Elle livre des outils pour résoudre des problèmes pratiques portant sur des objets matériels, appartenant à l'espace sensible. Perrin-Glorian et Godin (à paraître) parlent de finalité pratique de la géométrie. La géométrie de l'école va donc pour une part viser la construction de connaissances spatiales permettant de maîtriser les rapports à l'espace sensible et de résoudre des problèmes sur les objets qui s'y trouvent.

La géométrie s'érige d'autre part comme théorie mathématique (Brousseau, 1983 ; Perrin-Glorian & Godin, à paraître) ou théorie déductive (Houdement, 2007). Refusant la validation visuelle, perceptive, s'appuyant sur l'espace sensible, la géométrie que l'on tient de Platon puis des Eléments d'Euclide porte sur des objets théoriques, idéaux et se veut constituer une théorie de la rationalité. Perrin-Glorian et Godin (à paraître) parlent de finalité théorique de la géométrie. Replacé dans un contexte scolaire, l'enjeu de l'enseignement de la géométrie réside alors dans la construction de connaissances portant sur des objets géométriques théoriques (Perrin & Salin, 2010). Plusieurs types d'espaces peuvent ainsi être visés par la géométrie, porteurs de problèmes de natures différentes et contextualisant des pratiques spécifiques. L'espace sensible d'un côté, formant le monde des objets matériels. L'espace géométrique d'un autre côté, constitué des objets géométriques théoriques, pour lesquels sont nécessaires définitions (textuelles) et axiomes.

Mais ne nous y trompons pas. Si géométrie physique et géométrie théorique, telles que décrites ci-dessus, poursuivent des finalités bien distinctes, elles entretiennent pourtant des liens étroits. La finalité pratique conduit inévitablement à la construction d'un référentiel théorique, même s'il n'est pas en appui sur une axiomatique explicite. A l'inverse, une construction théorique ne saurait se passer totalement de l'expérience sensible. Fischbein (1993) souligne ainsi la présence simultanée de ces deux aspects qu'il qualifie de « figural » et « conceptuel », au sein même des définitions et preuves mathématiques :

> We deal with an ideal world, with ideal meanings. The objects to which we refer - points, sides, angles and the operations with them - have only an ideal existence. They are of a conceptual nature. At the same time, they have an intrinsic figural nature: only while referring to images one may consider operations like detaching, reversing or superposing. (p.140) The figural concept is a mental reality, it is the construct handled by mathematical reasoning in the domain of geometry. It is devoid of any concrete-sensorial properties (like color, weight, density, etc.) but displays figural properties. (op.cit., p.148)

Ce terme de « figural » renvoie ici aux dessins, qui se situent au cœur de l'articulation entre géométrie physique et géométrie théorique. Ces deux problématiques se répondent, et un travail sur des objets graphiques prend en charge ce dialogue tout en introduisant une grande ambigüité (notamment pour les élèves) quant aux objets manipulés. Les dessins sont tour à tour rattachés à des problèmes, des géométries, des arrière-plans épistémologiques, des pratiques de nature variées. Le détail de ces différentes dimensions, pointées par les travaux de didactique, nous semble pouvoir mieux éclairer les phénomènes et les perspectives propres à la géométrie de l'école primaire. Cette partie vise à montrer que l'usage du dessin en géométrie doit être abordé sous des aspects multiples, chacun éclairant d'une manière spécifique son rôle central : en particulier nous ferons porter l'accent sur les problématiques abordées par cette discipline, sur un point de vue épistémologique, et sur un point de vue sémiotique.

Plusieurs problématiques appréhendées par la géométrie

S'intéressant à la pluralité des pratiques géométriques, en fonction de la finalité qu'elles poursuivent, Berthelot et Salin (1992, 1993) distinguent trois problématiques : une problématique pratique, une problématique de modélisation et une problématique géométrique. Le paragraphe précédent nous permet aisément d'entrevoir ce que peuvent constituer des démarches relevant de problématiques pratiques ou géométriques. Nous reprenons ici la présentation synthétique qu'en font Perrin-Glorian et Godin (à paraître ; p. 5 de la version en ligne sur HAL en 2018). Dans une problématique pratique, le problème est posé dans l'espace sensible, les rapports à l'espace sont effectifs, « ils sont contrôlés de manière empirique et contingente » par les sens, la validation se fait dans l'espace sensible (Berthelot & Salin, 1992, p. 52). Dans une problématique géométrique, les rapports à l'espace peuvent être effectifs mais sont régis par les définitions et les règles de fonctionnement des objets théoriques qu'elle représente. Le problème, le traitement et la validation se situent dans le cadre de la géométrie théorique, selon des règles établies. Intéressons-nous maintenant de plus près à la troisième problématique identifiée par ces auteurs : la problématique de modélisation. Le problème y est également posé dans l'espace sensible mais n'est pas traité directement dans cet espace. Il est traduit dans un modèle géométrique où se fait la résolution. Le résultat est retraduit à son tour dans l'espace sensible et la validation se fait aussi dans l'espace sensible. Modéliser un problème et les objets sur lequel il porte induit de procéder à une conversion des objets en question, le plus souvent vers un registre de représentation. Les démarches de résolution dans ce système sémiotique dépendent alors de l'interprétation des objets, des règles de traitement ou encore de validation acceptées dans cette modélisation. Les auteurs distinguent deux sous-branches de ce type de démarche, correspondant à deux types de modélisation en jeu, qu'ils nomment *spatio-géométrique* et *analogique*.

> [La démarche de résolution par modélisation] établit un certain rapport entre deux mondes : le monde sensible et un modèle, système symbolique doté de règles internes qui permettent de constituer à partir des objets initiaux et de relations initiales de nouveaux objets et de nouvelles relations valides. Un certain nombre de relations (initiales) dans le modèle sont signifiantes de relations de l'espace sensible et leur permettent de représenter le problème dans l'espace (c'est ce qui joue le rôle d'hypothèses et de conclusion par exemple) par un problème dans le modèle. A partir de ces relations, et du système de règles de production internes au modèle, la solution est construite dans le modèle. L'interprétation dans l'espace sensible de la solution construite dans le modèle permet la validation pragmatique de l'ensemble de la démarche.
> Nous nommons spatio-géométrique la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique, et analogique la modélisation d'un espace par un autre : schéma, croquis, dessins, plans, etc.
> Cette différenciation ne relève pas de la problématique mais du niveau de formalisation du modèle auquel le processus de modélisation sera porté, selon la complexité des connaissances géométriques intervenant et le niveau d'enseignement. (ibid, p.52).

Selon la problématique considérée, le dessin est donc conduit à jouer des rôles variés. Une problématique pratique conduit à un travail exclusivement sur le dessin, par exemple pour le reproduire à l'identique. Dans une problématique de modélisation, le dessin peut selon les cas reproduire des objets de l'espace sensible (cas analogique) ou en proposer un modèle permettant leur traitement (cas du spatio-géométrique). Ainsi des problèmes peuvent-ils parfois porter sur des objets proches, en apparence, mais ceux-ci peuvent être traités de manière très différente, selon l'interprétation des objets considérés et le mode de validation des stratégies de résolution. Inversement, un dessin peut être interprété de différentes manières et donner lieu à des problèmes et démarches de résolution très différentes, en fonction de la problématique dans laquelle la pratique s'insère.

Il faut noter que ces différentes problématiques de la géométrie ne sont généralement pas convoquées pour elles-mêmes dans l'enseignement, mais servent de contexte à des enseignements disciplinaires.

Des arrière-plans épistémologiques divers

Les travaux de Houdement et Kuzniak (2006) se tournent davantage vers la caractérisation de référentiels épistémologiques pour la géométrie. Les auteurs identifient trois paradigmes géométriques permettant de caractériser l'arrière-plan des pratiques géométriques jugées valides pour la résolution d'un problème.

> La Géométrie I a pour source de validation la réalité, le sensible. […] La Géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas (Caveing, 1997), comme par exemple les figures simples (cercles, carrés...). L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel.
> Dans [la Géométrie II], la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Mais le problème du choix des axiomes se pose. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette Géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux.
> Dans [la Géométrie III], qui naît à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique l'emporte. (ibid, pp.180-181)

Encore une fois, les auteurs soulignent alors à la fois la pluralité des géométries élémentaires et l'ambivalence d'objets matériels, souvent très proches dans leur forme, qu'elles convoquent :

> Les objets de la Géométrie I sont des objets matériels, traces graphiques sur le papier ou traces virtuelles sur l'écran d'ordinateur, ou encore maquettes d'objets de l'environnement. […] Dans les pratiques usuelles, ce sont souvent des objets du micro-espace (Berthelot & Salin, 2000) censés représenter, dans un espace petit et propice à des contrôles, des objets réels plus grands ou plus complexes. Ils sont donc le fruit d'une première modélisation même des plus élémentaires […] Ce sont déjà pour certains en partie des objets mentaux : un trait droit sur le papier, s'il est nommé droite, doit être pensé comme un rectiligne droit illimité, infini…. (Houdement, 2007, p. 73)
> [Concernant la Géométrie II] Les problèmes devraient être tous uniquement textuels puisque les objets de ce paradigme sont les définitions et les théorèmes textuels. Mais ces objets textuels sont conventionnellement, par commodité (…), représentés par des schémas, à la « texture » identique aux dessins de la Géométrie I, mais sur lesquels le « regard » (la théorie, le paradigme) doit changer (Ibid., p.74)

Cette identification de paradigmes permet de faire apparaître une géométrie de type Géométrie II comme horizon de la géométrie à l'école (qui n'apparaît explicitement qu'au cycle 4), et de souligner l'évolution nécessaire du rôle du dessin. Ce dernier est d'abord le lieu de la géométrie, où se construisent des objets abstraits et des modalités de preuve. Il perd peu à peu ces deux attributs lorsque les objets sont textuels, mais perdure dans les pratiques géométriques : l'interprétation qui en est faite subit un changement radical en raison de cette modification du référentiel épistémologique.

Un point de vue sémiotique : les domaines de fonctionnement du dessin.

Chaachoua (1997, p. 19-23) montre, de manière assez concordante avec ce qui précède, que le dessin adopte alternativement différents statuts dans l'enseignement. Il est tour à tour considéré comme objet physique à part entière, comme représentation d'un objet géométrique, ou d'un objet physique.

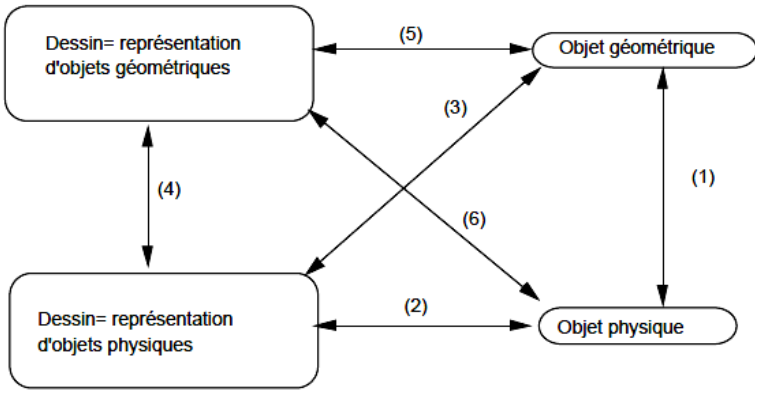


Figure 1.– *D'après Chaachoua, 1997, p.19*

Nous pouvons rattacher ceci tant aux problèmes traités par la géométrie qu'à l'arrière-plan épistémologique. Ces statuts multiples montrent l'ambiguïté qui peut accompagner l'usage du dessin – et notamment les malentendus entre enseignant et élèves – comme les potentialités offertes. Le dessin peut être un lieu d'interface entre les facettes de la géométrie que nous évoquons. Cette idée permet d'envisager un glissement progressif dans les pratiques des élèves, d'une problématique pratique, où la Géométrie I, prédomine vers une problématique géométrique, marquée par une forte présence de la Géométrie II. La suite de ce texte nous amènera à nous intéresser plus particulièrement au rôle possible des instruments dans cette évolution des usages du dessin dans les pratiques géométriques scolaires et à une *géométrie des tracés*, comme lieu possible de l'émergence d'objets abstraits, mentaux, à partir de l'étude de dessins construits à l'aide d'instruments.

Perrin-Glorian & Godin (à paraître) proposent une synthèse de cette variété des objets, problèmes, règles du jeu de la géométrie en identifiant trois espaces en relation (**Figure 2**).

Le dessin au cœur de l'articulation de trois espaces

Nous considérions au début de ce texte deux types d'espace, lieux de travail de la géométrie : l'espace sensible et l'espace géométrique. A l'instar de Perrin-Glorian et Godin (à paraître), l'attention portée à la place des dessins dans la géométrie et son enseignement nous conduit à ajouter un troisième type d'espace, *l'espace graphique*, constitué de dessins (sans présupposition sur leur statut) et des instruments qui permettent l'action sur ceux-ci. Ces objets représentent d'autres objets – objets matériels de l'espace sensible ou objets théoriques de l'espace géométrique –, dans le registre graphique.

> On y trouve des représentations des objets du monde sensible ou des représentations d'objets géométriques sous forme de schémas, de figures en dimension 2[2]. La théorie de référence peut être une théorie physique ou une théorie axiomatique de l'espace. (Ibid., p.9)

[2] Ce que nous appelons dans ce texte « dessin », mais cette distinction n'est pas opérée par les auteurs.

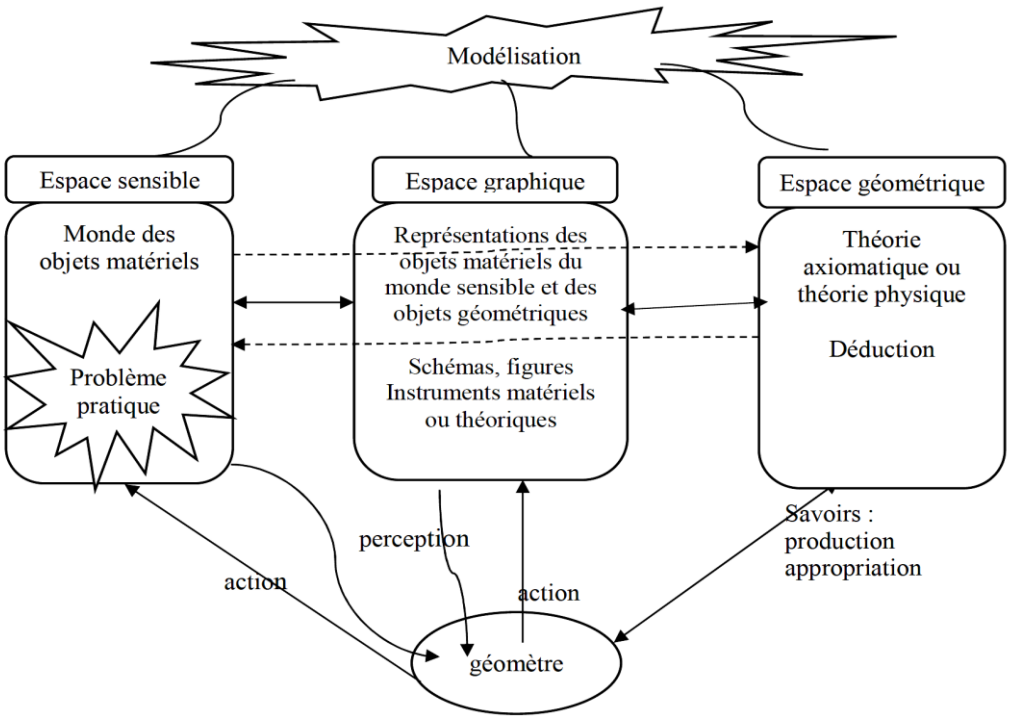


***Figure 2.**–D'après Perrin et Godin (à paraître) : les trois espaces considérés et leurs relations.*

L'espace graphique est caractérisé par des pratiques portant sur les dessins. Il présente cet intérêt que, contrairement aux problématiques ou au référentiel épistémologique, ces pratiques sont relativement stables et leur développement peut être envisagé en continuité : l'utilisation du dessin répond notamment à des contraintes propres à ce registre et peuvent trouver des raisons d'être dans diverses problématiques.

Ce texte s'appuiera fortement sur ce point de vue. Le passage à une problématique géométrique, l'émergence d'une Géométrie II ou de la démonstration, constituent des ruptures très fortes dans ce que signifie la géométrie. Pour autant, il est possible de développer dans l'interaction entre espace sensible et espace graphique, ou au sein de l'espace graphique seul, des pratiques nécessaires à l'interaction entre espace géométrique et espace graphique. Ce sera notamment le cas de l'enrichissement des dessins dont nous montrerons ci-après qu'il est indispensable aux pratiques de démonstration, et qu'il peut apparaître nécessaire dans des situations spécifiquement construites à cet effet au sein du seul espace graphique.

La démonstration comme horizon : quelles sont les pratiques graphiques visées ?

L'usage des dessins apparaît comme un point central de l'activité géométrique, et en particulier pour la résolution de problèmes. Parzysz (2006) montre que, même dans une activité de démonstration, le dessin joue un rôle essentiel :

> En fait, la résolution d'un problème de géométrie élémentaire consiste en une succession d'allers retours entre G1 et G2, centrés sur la "figure". Celle-ci joue un rôle crucial dans le processus ; en effet, bien qu'elle constitue une aide précieuse dans les conjectures, elle peut également constituer un obstacle à la démonstration, car "l'évidence de la figure" peut être source de confusion dans l'utilisation des données. (Idib., p.128)

Dans sa thèse, Chaachoua (1997) identifie trois fonctions essentielles que le dessin doit pouvoir assurer pour permettre la résolution de problèmes de géométrie :

(i) Dans l'énoncé, il doit remplir des fonctions d'illustration et de prise en charge d'hypothèses, et doit permettre de « rendre visible la figure ou une sous-figure pertinente pour la résolution » afin de guider le travail des élèves.

(ii) Au cours de la résolution, il doit être support d'une recherche de solution notamment par l'identification de conjectures pertinentes, et l'auteur souligne la fonction d'expérimentation.

(iii) Enfin, dans la solution des élèves le dessin doit permettre l'illustration des étapes, voire constituer une réponse au problème posé lorsqu'il en est l'enjeu.

Pour illustrer ces fonctions, considérons l'énoncé suivant[3] :

« Soit ABC un triangle, P un point quelconque du plan, P' le symétrique de P par rapport à A, P'' le symétrique de P' par rapport à B, P''' le symétrique de P'' par rapport à C, et I le milieu de [PP''']. Que dire du point I ? »

L'énoncé seul permet difficilement d'émettre une conjecture, ou même de se représenter le problème posé, et le dessin remplit la fonction (i). Il faut donc réaliser un dessin, voire plusieurs, afin de multiplier les configurations. La position du point I semble ne pas dépendre de la position du point P et de ses symétriques successifs, mais de celle des sommets du triangle (**Figure 3**).

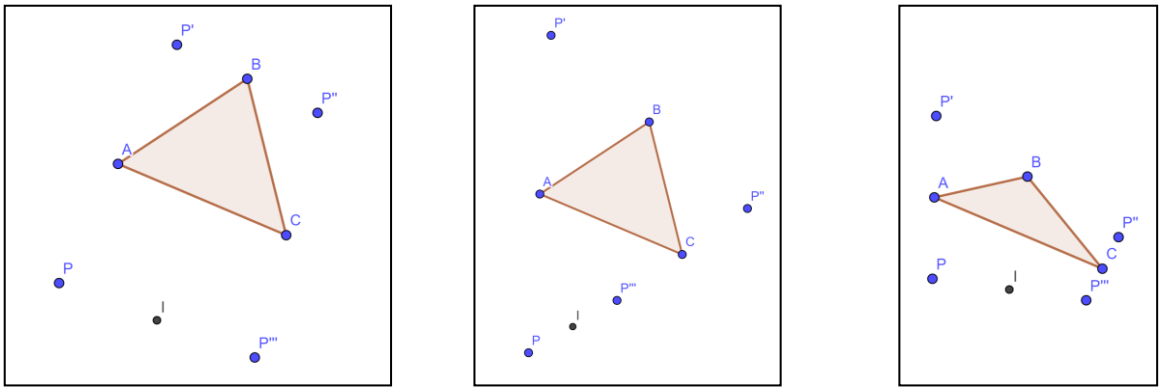


Figure 3.– *Trois dessins correspondant à l'énoncé*

Le tracé du quadrilatère PP'P''P''' (**Figure 4**, dessin de gauche) fait en outre apparaître une nouvelle interprétation du problème : ABCI est le quadrilatère formé par les milieux des côtés de PP'P''P''', et on peut reconnaitre le théorème de Varignon, ou remarquer que ABCI *semble être* un parallélogramme. On trouve ici la fonction (ii).

Une démonstration peut être effectuée à l'aide du théorème de la droite des milieux. L'utilisation de ce théorème suppose d'avoir isolé des sous-configurations, par exemple le triangle P'P''P''' pour lequel (BC) est une droite des milieux, et de mettre en relation des sous-configurations pour voir par exemple que [P'P'''] est commun à deux d'entre elles, permettant de convoquer la transitivité pour conclure au parallélisme de (BC) et (AI). Les fonctions (i) et (ii) sont ici au cœur de l'activité géométrique.

Enfin, le dessin peut être utilisé à l'image de la **Figure 4** pour indiquer des résultats intermédiaires, voire donner des informations accompagnant un texte destiné à un lecteur.

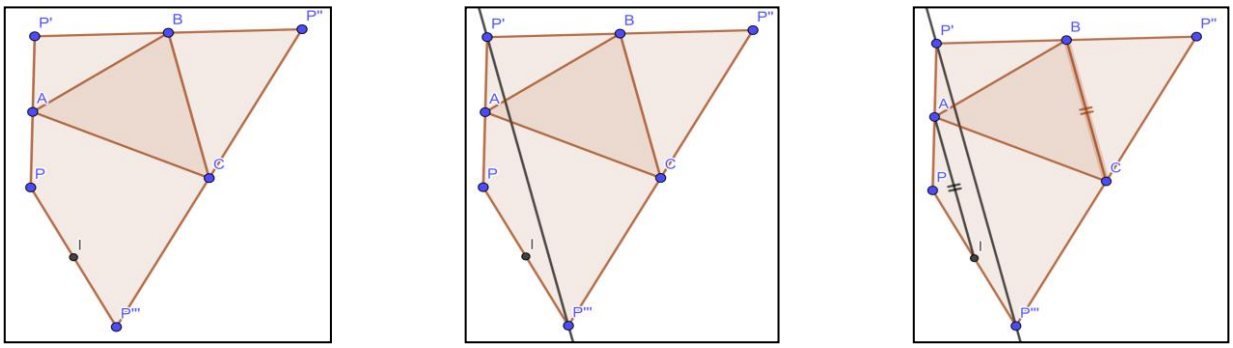


Figure 4.–*Ajout de tracés pour permettre des recompositions.*

[3] Proposé initialement sous une forme différente par Soury-Lavergne (1998).

Ce rapide détour par la question de la démonstration permet de caractériser le rôle essentiel, dans ce processus, des pratiques liées au dessin, et de leur variété : réalisation d'un dessin correspondant à un énoncé, examen de configurations multiples en vue d'une recherche de conjectures, ajout de tracés pour faire apparaître des relations ou pour isoler des sous-figures… Ceci conduit à interroger dans quelle mesure il est possible de préparer le passage à la démonstration, à l'école primaire, en développant des modalités d'usage du dessin cohérentes avec celles qui seront ensuite exigées par la démonstration.

2. Quel enjeu pour la géométrie à l'école primaire ? Nos préoccupations de recherche

Nous nous intéressons dans la suite de ce cours à la manière dont l'enseignement de la géométrie à l'école (élèves de 3 à 12 ans), accordant une large part à l'articulation entre espace sensible et espace graphique, peut adopter pour horizon la constitution d'un espace géométrique, qui porte en lui une problématique géométrique, une prédominance de Géométrie II, un travail sur la figure (au sens de Laborde et Capponi, 1994) pour lequel le dessin est représentant d'objets textuels. Dans quelle mesure, sous quelles conditions le travail sur les dessins, à l'école, peut-il permettre de développer des pratiques constituant un point d'appui pour un travail dans l'espace géométrique ?

Loin de défendre la nécessité d'une mise en opposition hiérarchique entre paradigmes dans les pratiques enseignantes, Houdement (2007, p.77) met en avant une légitimité épistémologique à penser une complémentarité entre la Géométrie I et Géométrie II.

> La Géométrie I fournit une heuristique et un « terreau » d'expérimentation pour la Géométrie II. La Géométrie II présenterait un caractère généralisateur par rapport à certaines techniques de Géométrie I : un problème résolu en Géométrie II serait susceptible d'automatiser la résolution de problèmes de même type de Géométrie I (Ibid., p.78)

Penser un enseignement de la géométrie à l'école dans une continuité de l'école au collège nous amène ainsi à interroger les conditions susceptibles de faire de la Géométrie I (ou *géométrie des tracés*) de l'école un point d'appui possible pour la Géométrie II. Cet enjeu réside pour nous dans la finalité conceptuelle de l'étude de dessins à l'école.

> Dans l'enseignement de la scolarité obligatoire, l'étude de figures[4] n'a en fait le plus souvent ni une finalité pratique ni une finalité théorique, elle poursuit plutôt une finalité d'apprentissage conceptuel. (Perrin-Glorian & Godin, à paraître, p. 10 de la version sur HAL en 2018)

Cette finalité d'apprentissage conceptuel est centrale du point de vue de l'enseignement, et éclaire l'évolution de la manière dont les objets sont caractérisés à l'école primaire. De notre point de vue, elle met en exergue deux aspects essentiels des pratiques liées à l'usage du dessin à l'école primaire. (i) Elles sont le lieu où se construisent des apprentissages conceptuels et des problématiques portant les conditions d'émergence de l'espace géométrique. (ii) Elles doivent se rapprocher progressivement de celles qu'appelle une géométrie de type Géométrie II, et en particulier la démonstration.

Il nous faut alors répondre aux questions suivantes :

(1) De quoi le dessin peut-il être le support, du point de vue de l'activité matérielle et de l'élaboration conceptuelle ?

(2) Quels sont les savoirs spécifiques au dessin en jeu à l'école primaire (3-11 ans), pour elle-même et en vue de préparer le cycle 4 (12-15 ans) ?

Nous ajouterons par la suite une question subsidiaire :

(3) Comment penser les interactions entre pratiques graphiques et langagières dans les apprentissages de géométrie à l'école. Cette question est soulevée par la « nature textuelle » des objets que mentionne Houdement (2007). Implicite dans les travaux précédemment mentionnés, elle apparaît lorsque se pose la perspective de préparer le passage à la démonstration. Ce passage est un des enjeux de la question (2), que nous traitons dans la section suivante.

LA VISUALISATION DES DESSINS EN GEOMETRIE : UN ELEMENT CENTRAL

1. Visualisation et activité géométrique

Duval (Duval, 1994, 2005, 2007 ; Duval & Godin, 2005) étudie en profondeur la question de la visualisation en géométrie, d'un double point de vue sémiotique et cognitif. La dimension sémiotique est en arrière-plan, mais elle motive l'étude : la visualisation participe du processus de coordination et de conversion entre registres de représentation sémiotique (en l'occurrence graphique et langagier) dont Duval (1995) défend qu'il est au cœur de la conceptualisation en mathématiques. L'aspect cognitif est plus central dans le propos, dans la mesure où il est question d'étudier les processus (cognitifs) au cœur de la visualisation en géométrie.

Nous gardons ici le terme « visualisation » qui est utilisé dans de nombreux travaux (Duval, 2005 ; Jones, Maschietto, & Mithalal, 2017), mais soulignons qu'il doit être mis en relation avec d'autres termes, dont ceux d'appréhension (Coutat, 2006 ; Duval, 1994) ou d'analyse (Duval & Godin, 2005). Il s'agit donc bien d'interroger la manière dont un sujet appréhende l'objet graphique, dont il s'en saisit, en vue d'une finalité particulière. Ainsi, visualisation n'est à prendre ni comme une perception brute de stimulus visuel, ni comme un processus indépendant de sa dimension mathématique. Il s'agit d'un processus actif – même s'il n'est pas conscient ou maîtrisé – qui met en jeu une interprétation des informations perçues visuellement. Duval propose d'interroger ce processus, souvent implicite dans la littérature française[5], et les contraintes qui lui sont liées en géométrie. Dans la suite de ce texte, nous référerons principalement à Duval (2005) et proposerons des liens (qui ne sont pas faits par l'auteur) avec les propositions de Duval et Godin (2005) et Duval (1994).

Duval (2005) souligne le rôle fondamental du mécanisme d'iconicité dans la reconnaissance visuelle des objets, en appui sur les travaux de la Gestalttheorie :

> Cette fusion entre reconnaissance d'une forme et identification d'un objet, base de toute évidence perceptive, est la condition pour des réponses rapides et adaptées à des situations nouvelles et imprévues. En revanche, il n'en va plus de même pour la perception des représentations construites par production de tracés. Il n'y a aucune relation intrinsèque entre les formes reconnues dans un tracé et l'objet que ce tracé " veut " représenter. Comment alors peut s'effectuer le passage de l'un à l'autre ? Le passage repose sur une "ressemblance" entre la forme visuellement discriminée et la forme typique de l'objet représenté. C'est cette ressemblance qui est généralement considérée comme constitutive de l'image. Ainsi, Peirce en a fait la caractéristique de toutes les représentations iconiques par opposition aux symboles et aux indices. Généralement cette ressemblance suffit pour reconnaître directement, et immédiatement, l'objet représenté, comme dans la perception du monde environnant. [Le mécanisme d'iconicité] continue à s'imposer de manière autonome chaque fois que quelque chose (dessin, figures ou formes de pièces à manipuler) est donné à voir. (ibid., pp.13-14)
>
> Il y a des lois d'organisation des données visuelles, mises en évidence par la Gestalttheorie, qui imposent la reconnaissance de certaines formes contre la reconnaissance d'autres formes, même si celles-ci sont verbalement évoquées. […] En fait, un apprentissage visant à rendre les élèves capables de " voir " le (ou les) tracé réorganisateur à ajouter pour trouver la solution d'un problème doit se faire au niveau de la reconnaissance des formes, et non pas à celui de l'identification des objets représentés qui autrement restera purement verbale. (ibid., p.18)

2. Visualisation iconique et non-iconique, opérations sur les dessins

Duval oppose ainsi deux modalités de visualisation (ibid., p.14).

La **visualisation iconique** opère par ressemblance des contours :

---

[4] Ces auteurs ne distinguent pas dessin et figure ; dans cette phrase, il faut lire « dessin ».

[5] On peut par exemple citer les travaux de Parzysz (1988) qui interrogent les rapports entre le *vu* et le *su*, mais ne questionnent pas la manière dont les informations sont *vues*.

> « ÇA RESSEMBLE AU[6] profil d'un objet réel, ou à un ensemble d'itinéraires ou de déplacements sur un territoire ou à un modèle type (étalon). *La figure[7] reste un objet indépendant des opérations que l'on effectue sur elle.* »

Cette modalité de visualisation interdit de modifier les dessins en vue de résoudre des problèmes de géométrie, sous peine de dénaturer les objets considérés.

La **visualisation non-iconique** procède par assemblage de sous-constituants (les « unités figurales ») permettant d'identifier les objets :

> « C'est une SEQUENCE d'OPERATIONS qui permet de reconnaître des propriétés géométriques, par l'impossibilité d'obtenir certaines configurations, ou par invariance des configurations obtenues. *La figure est une configuration contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexes*. »

Outre leur opposition et le caractère plus spontané de la première, le texte montre que la première modalité de visualisation conduit à une impasse pour l'apprentissage de la géométrie : la reconnaissance se fonde sur des profils stables et laisse hors champs les tracés qui ne sont pas liés au contour, il est impossible de modifier ces profils sans les dénaturer, et la prédominance de la perception visuelle est difficilement compatible avec d'autres modalités d'identification des propriétés (ibid. pp.15-16). La seconde va en revanche de pair avec trois opérations essentielles pour la géométrie : division méréologique, déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle.

La *décomposition heuristique* par division méréologique des formes consiste à envisager le dessin comme assemblage (par juxtaposition ou chevauchement) d'unités figurales de même dimension. Elle *« se fait toujours pour reconstruire avec les parties ainsi obtenues une figure souvent très différente visuellement »* (ibid., p.21), et peut s'opérer matériellement, graphiquement ou *« du regard »* (ibid., p.22). Elle est à notre sens à rapprocher de *l'appréhension opératoire* (Duval, 1994, p.125) et de *l'analyse en fonction des formes que l'on reconnaît* (Duval & Godin, 2005, p.9).

La *déconstruction instrumentale* des formes, répond à une logique de reproduction d'un dessin à l'aide d'instruments (Duval, 2005, p.5). Cette déconstruction n'est que mentionnée dans ce texte, et nous prendrons la définition de Mithalal (2010, p.18) : elle procède de *« l'identification d'un ensemble d'unités figurales indépendantes, et d'une succession d'actions effectuées grâce à l'usage d'instruments, permettant de reconstruire soit l'objet lui-même, soit une représentation graphique de cet objet. »* Elle s'apparente selon nous à l'appréhension séquentielle (Duval, 1994) ou à une analyse en fonction des instruments dont on dispose (Duval & Godin, 2005, p.11)

La *déconstruction dimensionnelle* des formes est ce que Duval (2005) décrit comme *« manière mathématique de voir les [dessins] »*. Elle consiste à considérer que ceux-ci sont constitués d'unités figurales de plus petites dimensions (Duval, 2005, p.20), mises en relation par des propriétés géométriques (Mithalal, 2010, p. 20). Il n'y a pas d'unicité d'une telle déconstruction, un dessin pouvant être décrit par de multiples couples ({unités figurales};{relations}). Cette opération est essentielle pour l'auteur dans la mesure où il s'agit d'une condition nécessaire à une utilisation heuristique des dessins et où elle est « essentiellement d'ordre discursif » (p.23).

Notons enfin que les deux déconstructions engagent des descriptions très différentes d'un point de vue langagier. La déconstruction instrumentale est marquée par une dépendance aux instruments disponibles, et par la présence dans cette même description d'une temporalité liée aux contraintes matérielles. Les unités figurales, de même que les actions à réaliser portant des relations géométriques, sont convoquées successivement. La déconstruction dimensionnelle est pour sa part indépendante d'instruments, mais tributaire des objets géométriques abstraits (dont les propriétés géométriques) disponibles. La temporalité n'est ici plus nécessaire, raison pour laquelle elle est en cohérence avec une géométrie de type GII ou GIII.

[6] Les majuscules et italiques sont dans le texte de Duval.

3. Des opérations essentielles pour l'apprentissage de la géométrie

Ces trois opérations sont essentielles à plusieurs titres : elles permettent au dessin d'assurer les fonctions décrites par Chaachoua (1997) ; elles constituent en particulier des conditions nécessaires à l'articulation d'un registre de la visualisation et d'un registre du discours (Duval, 2005, p.29) et donc d'une mise en relation de l'espace graphique et de l'espace géométrique.

Contrairement à Duval (2005), et en appui sur les résultats de Mithalal (2010), nous considérons ici que l'activité géométrique des élèves peut évoluer progressivement, d'une approche fondée sur la visualisation iconique vers la visualisation non-iconique et la déconstruction dimensionnelle. Dans ce processus, la déconstruction instrumentale joue un rôle central qu'esquissent Duval et Godin (2005) : elle permet dans un premier cas de répondre à une problématique de reproduction de forme contrôlée par la visualisation iconique, et nous parlons de *déconstruction instrumentale à visée iconique*, dans un second cas de produire des représentations graphiques d'objets de l'espace géométrique en dialoguant avec la déconstruction dimensionnelle, et nous parlons de *déconstruction instrumentale à visée non iconique* (Mithalal, 2010, p. 84). Cette possibilité d'un *glissement progressif* est essentielle dans la suite de notre propos.

Nous défendons que le passage vers une géométrie théorique, si elle procède d'une rupture nette sur le plan épistémologique – notamment du point de vue de la preuve –, procède aussi d'évolutions plus modestes et moins radicales des pratiques géométriques, en particulier concernant les questions liées au dessin et au langage. En cela nous reprenons à notre compte, et cherchons à prolonger, les propos de Perrin-Glorian et Godin (à paraître, p.14 de la version sur HAL en 2018) : « Il y a donc une rupture dans le rapport aux figures entre ces deux modes de validation. Cependant, il y a une continuité au niveau des énoncés entre G1 et G2 : les propriétés valides sont les mêmes et les figures matérielles sont les mêmes. » La continuité que suggèrent les auteurs suppose l'émergence progressive au sein de l'espace graphique d'un rapport aux dessins, et d'énoncés, proches de ceux de la géométrie théorique.

Du point de vue du dessin, la rupture consiste en ce qu'il doit être *représentant d'un objet géométrique*, qu'il ne peut plus être source de validation, mais lieu de travail où s'exercent les trois fonctions et les trois déconstructions que nous avons citées. Ceci doit s'accompagner de la prise en charge d'une dimension langagière des mathématiques, et les objets de la géométrie doivent peu à peu devenir en premier lieu des objets de discours – que le dessin représente. Le discours portait sur le dessin, il en devient le fondement : le rapport est renversé, mais la coordination des registres graphique et langagier reste au cœur de l'activité.

En cela on peut envisager une continuité des pratiques, celle de cette coordination de registres, et dans cette perspective, la déconstruction dimensionnelle joue un rôle essentiel, puisqu'elle en est une condition nécessaire (Duval, 2005). Elle suppose que l'analyse du dessin soit guidée par des considérations langagières, en particulier la mise au jour d'unités figurales qui ne sont pas nécessairement dessinées initialement et de leurs relations qui, elles, échappent à une représentation graphique sous forme de dessin[8]. Pour cette raison, nous considérons qu'il s'agit d'un des enjeux transversaux de l'enseignement à l'école primaire, qui doit être pris en charge dans ses multiples dimensions : pratique, par un travail spécifique sur le dessin dans lequel les élèves doivent être accompagnés, langagier, par la prise en charge explicite de la dimension textuelle des objets de la géométrie et de leur articulation avec les objets graphiques, épistémologique, par la clarification des statuts des objets en jeu. L'expression *« analyse géométrique des dessins »* que nous utiliserons par la suite

[7] Duval utilise ici le terme de « figure » dans un contexte de géométrie, dans une acception correspondant à ce que nous avons nommé « dessin ». Il faut donc lire « dessin ».

[8] Nous excluons volontairement le codage graphique de notre propos, dans la mesure où il ne participe pas de la représentation sous forme de dessin mais renvoie au contraire à un discours représenté de manière abrégée. Ainsi le codage d'un angle droit ne renvoie pas à une propriété du dessin, mais bien à une propriété énoncée sous forme langagière et codée *sur* ce dessin, à savoir une relation entre deux unités figurales. Cette propriété peut s'inscrire dans la perspective de GI (propriété constatée à l'aide d'instruments) ou de GII (propriété géométrique).

renverra à cet enjeu. Nous proposons dans les parties suivantes des perspectives pour faire émerger progressivement cette coordination à l'école primaire, en particulier *via* la déconstruction dimensionnelle.

LA REPRODUCTION DE FIGURES COMME SITUATION FONDAMENTALE DE L'ANALYSE GEOMETRIQUE DE DESSINS

Passer d'une visualisation iconique à une visualisation non iconique des dessins, identifier dans les dessins des représentations d'objets et de propriétés géométriques, passe par une capacité à un *jeu de regards* spécifique sur ces objets matériels. Cette capacité constitue une condition à la construction conceptuelle de l'utilisation d'objets idéaux de la géométrie dans le cadre de la géométrie théorique, en appui sur les modalités d'usage des dessins développées à l'école. Quand et comment peut-on apprendre aux élèves de l'école à voir et analyser géométriquement des dessins ? Quelles situations seraient susceptibles d'accompagner les élèves dans un changement de regard sur les dessins ?

Le *groupe de Lille* s'est employé de 2000 à 2010 à explorer les conditions susceptibles de favoriser une évolution du regard des élèves sur les dessins. Le point névralgique de ces travaux porte sur les liens qui unissent modalités de traitement instrumenté des dessins et manière de voir et d'analyser ces dessins. Ils renouvellent ainsi la manière dont nous pouvons penser l'enseignement-apprentissage de la géométrie, dans une continuité de la maternelle au début du collège.

1. La reproduction de figures, une situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessin

La recherche de situations susceptibles de faire évoluer le regard porté par les élèves sur les dessins a amené le *groupe de Lille* à s'intéresser au rôle des instruments dans les apprentissages géométriques. Ces travaux amènent aujourd'hui à considérer les situations de reproduction de figures complexes comme une situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessins. Nous voyons cette situation fondamentale comme un ensemble de situations à usage didactique visant l'émergence progressive de connaissances et de savoirs géométriques (Bessot, 2011, p.11). Les contraintes portées sur le traitement instrumenté de ces dessins constituent une variables-clés de ces situations et permettent de dessiner un fil conducteur possible de l'enseignement de la géométrie dans une continuité de la maternelle au début du collège.

Le problème générique consiste à réaliser une copie d'une figure modèle, simple ou complexe – c'est-à-dire produite par assemblage de figures simples, représentée par un dessin ou des formes (en bois, en plastique…)[9].La reproduction peut se faire à partir d'une amorce (partie du dessin modèle) ou non. Cette amorce peut être à la même échelle que le dessin modèle ou non, selon une orientation différente ou non. Enfin, cette reproduction s'effectue à l'aide d'instruments imposés ou non. Ceux-ci peuvent être variés : gabarits, pochoirs, papier calque, règle, équerre… Un système de coûts sur l'usage des instruments peut également être envisagé, afin d'amener les élèves à mobiliser certains instruments plutôt que d'autres. La validation porte alors à la fois sur la conformité du dessin à reproduire, par superposition avec un calque, et sur le coût de la reproduction. Le problème générique de reproduction de figures donne ainsi lieu à une très grande diversité de situations à usage didactique, selon la nature de la figure à reproduire, l'amorce éventuelle et, surtout, les instruments mis en jeu.

[9] Cette coexistence de deux types d'objets que nous avons soigneusement distingués depuis le début de ce texte, les dessins et des objets matériels, peut questionner le lecteur. Il faut y voir en premier lieu la question de l'articulation entre espace sensible et espace graphique, dont nous avons signalé la présence forte à l'école primaire, et notamment les premières années. Il faut y voir aussi la nécessité de s'appuyer au départ sur des objets relevant de l'espace sensible, dont la manipulation s'effectue à la manière des objets du quotidien – et sans un recours nécessaire aux instruments. Un des enjeux de l'école est néanmoins la disparition progressive de ces objets pour la résolution des problèmes de géométrie, et l'utilisation quasi exclusive du dessin.

Soulignons que le groupe de Lille ne distingue pas dans ses publications *dessins* et *figures*, comme nous le faisons dans ce texte. Les situations étudiées sont nommées « reproduction de figures ». Nous garderons dans ce texte cette appellation pour deux raisons. Il s'agit en premier lieu d'un souci de cohérence avec les travaux du groupe. Ensuite, si pour les élèves l'enjeu de telles situations réside dans la reproduction du dessin comme objet matériel tracé à l'aide d'instruments, l'objectif de la situation est bien la reproduction des caractéristiques géométriques du dessin, déduite d'une analyse du dessin portée par les instruments, ce qui représente un pas conséquent vers la figure. La présentation et l'analyse de telles situations ont fait l'objet de nombreuses publications (Keskessa, Perrin-Glorian, & Delplace, 2007 ; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014 ; Offre, Perrin-Glorian, & Verbaere, 2006 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014 ; Perrin-Glorian, Mathé, & Leclercq, 2013). Nous reviendrons de manière synthétique dans ce texte sur les éléments saillants de ces situations, qui nous serviront par ailleurs de point d'appui pour explorer les dimensions langagières de l'apprentissage géométrique à l'école dans la dernière partie de ce cours.

2. *Les instruments à disposition, une variable didactique clé des situations de reproduction de figures*

Le choix des instruments à disposition dans des situations de reproduction de figures, les contraintes portées sur leurs usages, constituent des variables didactiques clé de ces situations. Par instruments[10], nous entendons les instruments de géométrie « classiques » (le crayon, la règle, la règle graduée, l'équerre, le compas…) mais aussi des gabarits (formes en carton, en plastique), des pochoirs (formes évidées), de la peinture… Les instruments utilisés pour analyser et reproduire une figure conditionnent les unités figurales et les relations sur lesquelles s'appuient la reproduction – les schèmes d'utilisation, pour reprendre la terminologie de l'approche instrumentale –, et ainsi la manière de voir le dessin Voici un exemple de reproduction d'une figure et de la manière dont un jeu sur les instruments peut permettre d'envisager un accompagnement progressif des élèves dans une évolution de l'analyse de la figure.

Parmi les instruments, certains mobilisent des informations sur des surfaces : les gabarits utilisés comme des pièces de puzzles, les pochoirs dont on colorie ou peint l'intérieur, l'équerre utilisée comme gabarit d'angles droits (vus comme coins). Nous les appelons instruments 2D. Reproduire la figure ci-dessous (Figure 5) à l'aide de tels instruments amène l'élève à interpréter cette figure comme assemblage de sous-unités figurales de dimension 2, dont les élèves reconnaissent les formes de manière globale (division méréologique).

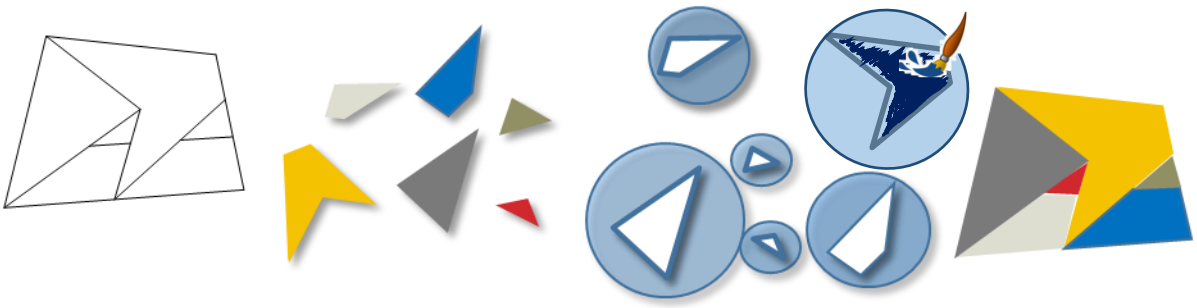


***Figure 5**.– Reproduction d'une figure complexe avec des gabarits (puzzle) ou pochoirs (peints) et analyse en termes de surfaces juxtaposées*

Si la tâche consiste à reproduire la figure en la dessinant à côté du modèle, à l'aide d'un crayon, à main levée ou en utilisant les instruments 2D ci-dessus (gabarits ou pochoirs), l'analyse de la figure évolue pour passer

[10] C'est volontairement que nous omettrons une référence à l'approche instrumentale, pourtant en arrière-plan d'une réflexion sur les invariants des élèves en situation de résolution de problèmes. Nous souhaitons concentrer notre propos sur la construction générale de ces situations, mais cette approche complète efficacement les analyses que nous proposons.

d'une analyse en termes d'assemblage de formes 2D dont on reconnaît l'allure générale en un assemblage de formes caractérisées par leurs contours, vus comme frontières de ces surfaces (1D/2D) (Figure 6).

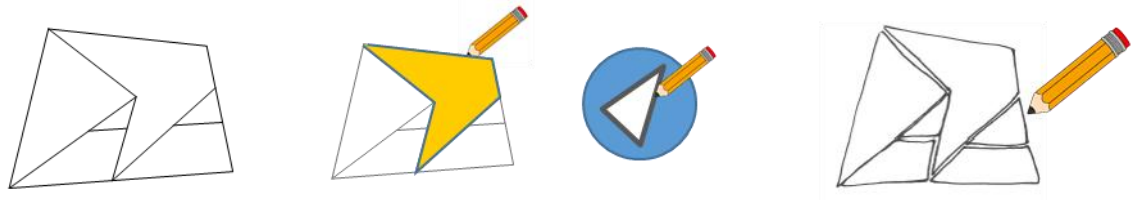


***Figure 6**.– Reproduction d'une figure complexe avec des gabarits ou pochoirs utilisés comme instruments de tracés de contours de formes (1D/2D)*

La règle et un reporteur de longueurs, pour leur part, amènent à segmenter ces contours et à reproduire des segments. D'abord analysé comme assemblages de formes (2D) juxtaposées, le dessin devient envisagé comme une ligne brisée, et donc un réseau de segments. Voici un exemple du début d'une reproduction d'une figure proche de la figure modèle précédente, à partir d'une amorce, avec une règle non graduée et un instrument permettant de report des longueurs (Figure 7).

***Figure 7**.– Reproduction d'une figure complexe à partir d'une amorce, avec une règle non graduée et un reporteur de longueurs : analyse de la figure en termes de réseaux de segments*

Empêcher les reports de longueurs conduit enfin à prolonger ces segments en des droites et à mobiliser, pour reproduire la figure, des relations géométriques entre segments, droites et points.

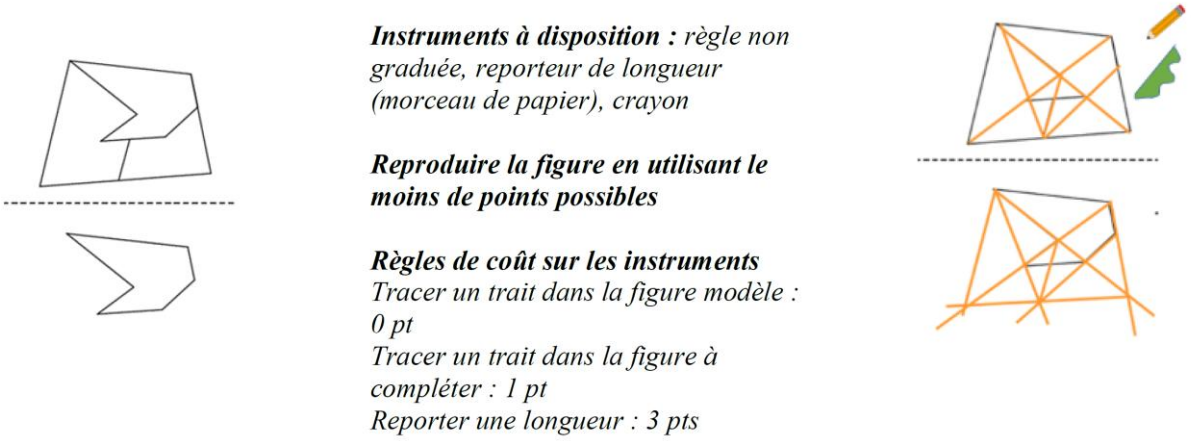


***Figure 8**.– Reproduction d'une figure complexe à partir d'une amorce, avec une règle non graduée : analyse de la figure en termes de réseaux de segments, droites et points et relations d'alignement et d'appartenance*

La figure 8 donne un exemple d'une telle situation, à partir de la même figure, de la même amorce. Nous analyserons plus en détails les connaissances en jeu dans cette situation un peu plus loin dans ce texte.

Ces analyses, que nous présentons de manière succincte ici, laissent entrevoir la possibilité de progressions visant à apprendre aux élèves, de la maternelle au cycle 3, à voir, analyser et traiter géométriquement des dessins. La déclinaison de situations à usage didactique repose sur un jeu sur les instruments et exploite le lien étroit qui unit modalités de traitement du dessin, dans le registre graphique, et mode de visualisation du dessin en termes de surfaces, de lignes et/ou de points. Le groupe de Lille a ainsi œuvré, pendant une dizaine d'années, à mettre au jour les potentialités didactiques de ces situations de reproduction de figures et le rôle des instruments en géométrie, à expérimenter et analyser des situations et progressions dans les classes.

Ces recherches ont permis d'envisager une plus grande cohérence et continuité de l'enseignement de la géométrie plane, tout au long de l'école. La clarification d'un des enjeux fondamentaux de l'enseignement de la géométrie à l'école permet de (re)donner toute son importance au travail sur les formes en maternelle, mobilisant une analyse des figures complexes comme assemblages de formes (2D) juxtaposées, et de replacer ce travail dans une continuité des apprentissages, tout au long de l'école. Poser la question d'une transition possible entre ce travail sur des objets 2D, et le travail sur les lignes et points, permet également d'enrichir les progressions envisagées. Nous pourrons par exemple mentionner ici les potentialités didactiques d'une analyse de figures complexes en termes d'assemblages de surfaces qui se chevauchent (**Figure 9**), ou encore de l'utilisation de gabarits rognés (**Figure 10**).

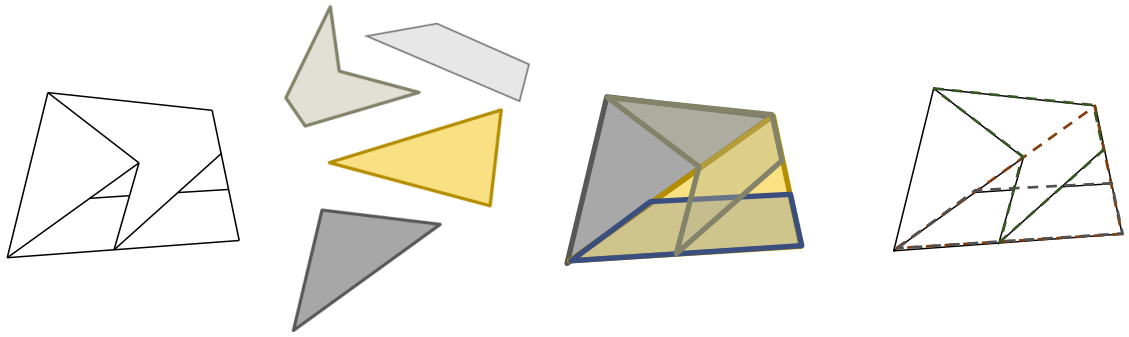


Figure 9.*–Reproduction d'une figure complexe à l'aide de gabarits qui se chevauchent : une évolution progressive d'un travail sur les surfaces à la mise en évidence de premières relations d'alignement de bords de surfaces et/ou de bords et de coins de surfaces*

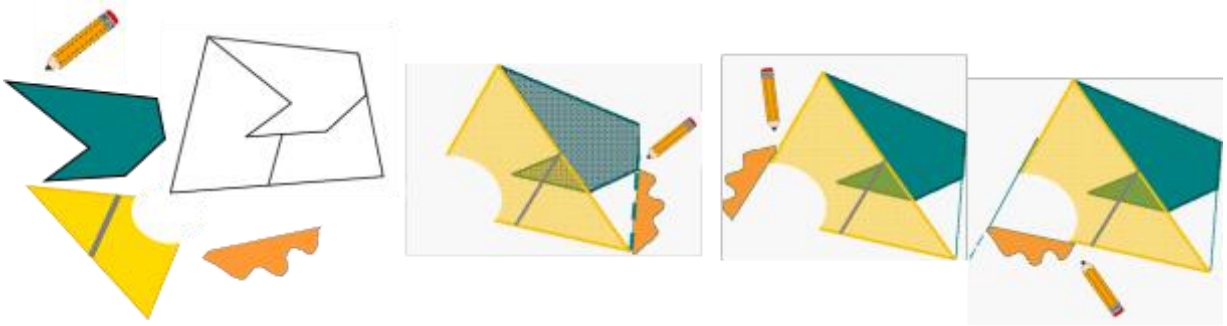


Figure 10*.– Reproduction d'une figure complexe à l'aide d'un gabarit, d'un gabarit rogné, d'une règle non graduée et d'un crayon : des surfaces aux notions de segment, droite et point comme intersection de lignes*

3. Les objets, relations et propriétés géométriques de la géométrie des tracés, retour sur les connaissances et savoirs visés

L'analyse que nous menons aujourd'hui sur ces situations de reproduction de figures produites et expérimentées pendant de longues années dans les classes nous amène à dégager deux types d'enjeux d'apprentissage de ces situations.

Il s'agit de faire émerger des connaissances géométriques, portant sur des objets et des relations géométriques, comme outils de résolution de problèmes portant sur des dessins, dans l'espace graphique. L'émergence de ces connaissances géométriques induit une modification profonde de l'analyse et de l'interprétation des dessins qui doivent passer d'objets d'étude pour eux-mêmes à représentations sémiotiques d'objets et de relations géométriques. Prenons l'exemple de la reproduction de figure évoquée en **Figure 9**. Grâce au choix de la figure modèle, de l'amorce et, surtout, aux contraintes portées sur l'usage des instruments, l'élève est amené à percevoir le prolongement possible de bords de surfaces en droites, vues comme trait que l'on peut prolonger toujours autant que l'on veut, puis à reproduire des segments comme portions de droites, à reproduire des sommets de formes comme des points obtenus par intersection de lignes. La reproduction de cette figure permet ainsi l'émergence des objets segments, points, droites et des relations d'appartenance, d'alignement entre ces objets comme des outils nécessaires à la résolution du problème de reproduction posé. Les savoirs visés portent sur un premier niveau de conceptualisation des objets segments, droites et points et sur de premières relations entre ces objets. L'on pourra dégager de la confrontation à ce problème un lexique permettant de désigner les objets droite, segment et point et dire qu'un segment est porté par une droite, qu'une droite est (représentée par) un trait rectiligne n'ayant ni début ni fin, que lorsque deux droites ou segments se coupent, ils forment un point… Notons que d'autres travaux ont porté sur l'élaboration, l'expérimentation et l'analyse de progressions et de telles situations sur d'autres thèmes de la géométrie plane, au programme de l'école. Parmi ceux qui ont fait l'objet d'une publication, nous pouvons par exemple citer – de manière non exhaustive – les travaux autour du passage de la notion d'angle droit à celle de droites perpendiculaires (Barrier, Hache, & Mathé, 2013), autour de la symétrie axiale (Perrin-Glorian et *al.*, 2013), autour des notions de disque et cercle (Bulf & Celi, 2016). Nous dirigeons le lecteur vers ces textes pour plus de précisions.

De manière articulée, il s'agit aussi de construire progressivement chez les élèves un rapport géométrique aux dessins, notamment par le biais de la déconstruction dimensionnelle, comme nous l'avons proposé en fin de première partie, afin de préparer les élèves à l'entrée dans les activités de preuve du début du collège.

4. Implications

Le travail du *groupe de Lille* a joué ces dernières années un rôle important en didactique de la géométrie et certainement aussi dans l'évolution des pratiques des enseignants du premier degré, par l'intermédiaire de la diffusion de ces travaux en formation initiale ou continue au sein des ESPE[11] ou par le biais de groupes de travail multiples (Léa de Valenciennes-Denain, groupes IREM[12] de Bordeaux, Clermont-Ferrand, etc.) Ces travaux ont permis un regard nouveau sur les enjeux de l'enseignement de la géométrie à l'école et sur les types de problèmes qu'il était possible de mettre en place et de décliner dans les classes. Ils ont mis au jour la problématique de la visualisation comme un des enjeux fondamentaux de l'enseignement de la géométrie à l'école : voir, analyser, traiter géométriquement un dessin ne va pas de soi, cela s'apprend. Ils ont également permis d'envisager les potentialités didactiques des situations de reproduction de figures et des instruments, vus comme levier permettant un continuum entre analyse perceptive spontanée et analyse géométrique des dessins. Comme évoqué précédemment, ces travaux irriguent également un ensemble de recherches menées

[11] ESPE : Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education, institut chargé notamment de la formation initiale des enseignants en France

[12] IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

ces dernières années en didactique de la géométrie. Plusieurs d'entre elles ont fait l'objet de Travaux Dirigés lors de cette école d'été et donnent lieu à des publications dans cet ouvrage (Bulf & Celi ; Petitfour & Barrier ; Coutat & Vendeira…).

5. De nouvelles questions de recherche

D'un point de vue méthodologique, les travaux du *groupe de Lille* correspondent à un premier mouvement, de la mise au jour d'enjeux d'enseignement et d'apprentissage à l'identification d'une situation fondamentale, déclinable en situations à usage didactique. Ce travail a donné lieu à l'élaboration, l'expérimentation, l'analyse de situations que l'on peut qualifier de situations d'action, si l'on se replace dans le cadre de la théorie des situations didactiques dans lequel ces recherches s'insèrent. Dans les problèmes de reproduction de figures envisagés, les élèves interagissent directement avec un milieu (les dessins, les instruments, l'amorce éventuelle…) qui est capable de rétroactions (opérationnalité de l'analyse du dessin au regard des instruments disponibles ou du coût sur l'usage des instruments, validité de la production par perception directe ou validation par calque…). La confrontation des élèves au problème et les rétroactions du milieu visent à faire évoluer les stratégies des élèves vers une procédure contenant en germe les connaissances et savoirs géométriques visés. Ces situations permettent ainsi l'émergence de connaissances pour l'action (qui peuvent rester implicites) : analyser le dessin en termes de surfaces, de bords, de lignes, de points ; être capable de rendre visible de l'implicite grâce à un traitement des dessins idoine et opératoire ; utiliser les instruments pour reproduire les objets, propriétés et relations géométriques identifiés sur les dessins modèles.

La manière dont sont pensées les situations d'apprentissage donne *a priori* une primauté au faire et à un apprentissage par adaptation à un milieu matériel capable de rétroactions. L'analyse *a posteriori* de la mise en œuvre de ces situations en classe et le fait de les replacer dans le cadre plus général de la théorie des situations didactiques nous amènent à soulever de nouvelles questions. Prolongeant les éléments de réflexion développés précédemment, ces questions portent sur le rôle du langage dans les apprentissages géométriques à l'école.

LE LANGAGE DANS L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DE LA GEOMETRIE

1. Problématique

Articuler visualisation, pratiques instrumentées et pratiques langagières

La question du langage dans l'enseignement-apprentissage de la géométrie à l'école est souvent abordée par le prisme du lexique, notamment dans les instructions officielles qui insistent sur l'usage d'un « vocabulaire adapté ». Construire un lexique permettant de désigner les objets et relations géométriques est un enjeu important de l'enseignement de la géométrie à l'école. Toutefois, une attention portée au seul lexique risquerait à notre sens de déboucher sur la simple substitution d'un lexique mathématique à un lexique quotidien, en fonction du contexte, sans réelle différenciation conceptuelle. Comme le soulignent par exemple les travaux de l'approche communicationnelle (Morgan, 2013 ; Sfard, 2001), la construction de ce lexique – mais aussi, d'un point de vue plus large, de pratiques langagières propres à la géométrie – doit être pensée dans le cadre plus général de pratiques propres à un champ disciplinaire, et ne peut être un objet d'enseignement pris à part. Ces auteurs soulignent l'importance du caractère situé des expressions employées, et Morgan (2013, p. 56) signale que *« l'usage d'un mot dans son sens quotidien doit ainsi être vu comme le résultat d'un échec à reconnaître la situation comme mathématique plutôt qu'un échec à distinguer le sens*

mathématique correct du mot [13]*».* Construire un lexique ne peut se réduire à apprendre des définitions, cela doit être envisagé en coordination avec une élaboration conceptuelle et une élaboration de pratiques propres à la géométrie. Nous avons souligné la nécessité d'une articulation entre des objets graphiques et des objets de langage dans l'élaboration conceptuelle en géométrie, et le rôle en cela de l'émergence de pratiques liées à l'usage du dessin – Duval (2005) qualifie ainsi la déconstruction dimensionnelle de *« processus essentiellement discursif »*. Comment s'articulent alors dimensions matérielle et langagière de l'activité géométrique des élèves lors de leur confrontation effective à des situations d'action telles que les situations de reproduction de figures ? Comment penser, dans une analyse didactique, cette articulation dans les processus de construction de connaissances géométriques ? Quels types de connaissances (pour l'action et langagières) et de savoirs ces situations permettent-elles de faire émerger ? Nous explorerons ces questions dans la suite de ce texte, en appui sur des recherches développées par Bulf, Mathé et Mithalal (2011, 2014a, 2014b, 2015).

Nous confronter à ces premières questions vise à mieux comprendre ce qui se joue (ou peut se jouer) dans les interactions langagières, verbales et orales, autour de la résolution de problèmes de reproduction de dessins à l'aide d'instruments de géométrie. Il est alors possible d'envisager des anticipations et organisations possibles d'un travail dans et sur le langage lors de la mise en œuvre effective de ces situations en classe. Nous pouvons aussi envisager dans quelle mesure certains phénomènes langagiers dépassent un seul discours portant sur la résolution de problèmes, lorsque le langage en mathématiques devient lui-même un enjeu d'étude au sein de la classe. Cette analyse nous conduit à investiguer les potentialités d'une insertion des situations de reproduction de figures dans des progressions plus globales, articulant situations d'action, de formulation et de validation.

Langage et confrontation aux situations d'action de reproduction de figures

Les contraintes des situations d'action (notamment de reproduction de figures pour le cas qui nous intéresse ici) ne rendent pas nécessaire la verbalisation de procédures mais l'élève, confronté à une situation d'action en classe n'est jamais isolé. Ses interactions avec le milieu s'opèrent (notamment) via deux canaux : la boucle action-rétroaction proposée par le modèle de situation d'action d'une part, et d'autre part les interactions langagières avec d'autres élèves ou avec l'enseignant. Ces dernières sont étroitement liées à l'action et généralement orales. Nous ne considérerons pas les interactions langagières verbales qui se développent autour de la confrontation à ces situations d'action comme des bruits les parasitant mais les envisageons comme parties prenantes de l'activité des élèves, outils de construction, de négociation et de transformation des significations. Ces préoccupations nous ont amenés à nous intéresser par exemple aux travaux de philosophes du langage tels que Wittgenstein (Mathé, 2012), ou encore à des travaux de didacticiens du français (Bernié, 2002, 2003 ; Jaubert, Rebière, & Bernié, 2003), qui appréhendent toute activité humaine comme une unité (forme de vie, monde) relevant, de manières indissociables d'interpréter le monde, d'agir sur le monde, de parler – qui s'insèrent dans une pratique collective, sociale et contextuelle. Nous confronter à cette question de l'interdépendance entre confrontation individuelle à des problèmes de géométrie et construction collective et sociale d'un *agir-parler-penser*[14] partagé nous a conduits à un effort d'instanciation d'outils théoriques développés par ces auteurs au contexte de l'apprentissage de la géométrie à l'école et à proposer la notion de *mode de fréquentation* (Bulf et *al*., 2014a, 2014b).

Nous utiliserons ici le terme d'activité sans faire référence à un cadre théorique spécifique tel la théorie de l'activité ou la double approche, qui l'appréhendent de manière plus globale et complexe. Il faut ici l'envisager comme un outil local, moyen de considérer, dans une situation donnée et de manière conjuguée, divers canaux

[13] « Using a word in its everyday sense may thus be seen as the result of failure to recognise the situation as mathematical rather than failure to distinguish the correct mathematical sense of the word. »

[14] Pour des développements relatifs à ce point de vue, le lecteur pourra se référer au texte de Bulf et Celi, dans le présent volume.

par lesquels la pensée se donne à voir – l'agir et le parler – sur le modèle proposé par Barrier, Chesnais et Hache (2014). Ainsi, les observables dont nous disposons sont de deux natures.

D'une part les dessins et les instruments de tracés liés à la dimension graphique de cette activité. Ces observables renvoient à ce que nous qualifions de *manières d'agir* : usage des instruments, procédures instrumentées d'analyse et de construction des figures.

D'autre part le langage vu comme un lieu de représentation des objets, relations, propriétés. Cette seconde catégorie d'observables permet d'appréhender des manières de parler (désignation des objets et des actions sur ces objets) qui, elles-mêmes, renvoient aux modalités de convocation, de traitement, de négociation des objets, propriétés, relations considérées.

Nous faisons l'hypothèse que ces trois dimensions de l'activité, *agir-parler-penser*, sont cohérentes entre elles lorsque la connaissance est stable (au sens de la boucle action-rétroaction de la situation d'action).

Cette dernière hypothèse nous a conduits à proposer le mode de fréquentation (ModF) d'un objet culturel : « *Un mode de fréquentation décrira alors un rapport du sujet à cet objet culturel. L'indéfini « un » souligne la multiplicité des rapports possibles pour un seul sujet, selon le contexte »* (C. Bulf et *al*., 2014a, p. 35). Il s'agit donc d'envisager les différentes appréhensions possibles d'un même objet de savoir et de décrire des modalités de parler et d'agir cohérentes avec ces appréhensions[15]. Relativement à l'analyse de dessins lors d'une situation de reproduction de figure, l'identification des appréhensions est guidée par les éléments théoriques développés précédemment, dont notamment les modalités de visualisation et de déconstruction des dessins. Il est ainsi possible d'envisager la caractérisation de ModF des dessins en géométrie à l'école primaire en prenant en compte :

- les modalités de visualisation : comme des objets 2D, comme des contours, ou comme des réseaux de lignes ;
- les modalités d'action sur le dessin : des instruments portant des propriétés de forme (gabarits), le tracé de lignes faisant partie intégrante du contour (dans ce cas des droites portant des segments seront par exemple difficilement produites), ou l'ajout de tracés auxiliaires ou réorganisateurs ;
- le discours produit par les élèves, portant une référence plus ou moins forte aux formes ou à des objets non-spécifiques de la géométrie (formes prototypiques, caractéristiques spatiales…), aux constituants des contours, ou à l'identification de relations entre unités figurales.

Bien entendu, il ne s'agit là que d'un exemple générique qui nécessiterait d'être affiné dans le cas d'une analyse, et qui n'a qu'une vocation illustrative. Le **Tableau 1** propose des prototypes de modes de fréquentation des dessins à reproduire, correspondant aux lignes du tableau.

Penser	**Parler**	**Agir**
Analyse des dessins (nature et dimension des objets pris en compte, propriétés géométriques identifiées)	Lexique, expressions (structure logique des propositions) Références des déictiques	Modalités de traitement des objets matériels (choix et usage des instruments)
Surfaces Caractéristiques visuelles de formes (2D)	Description figurative Nom des formes Coin Position relative de formes	Reproduire avec gabarits (puzzle), formes coloriées…

[15] Nous utilisons le terme appréhension plutôt que ceux de concept (Vergnaud, 1990) ou de conception (Balacheff & Margolinas, 2003), car ces derniers se réfèrent à la modélisation du système [Sujet<>Milieu] ou à une construction personnelle au sujet, et non à la co-construction au sein de la classe d'un rapport partagé à un objet culturel externe.

Contours - Bords- Segments Caractéristiques visuelles de formes (1D/2D) Alignement de bords, de bords et de coins	Bord, traits Coin Égalité de longueurs (modèle/amorce)	Reproduire des contours, des bords Pas de prolongement au-delà du contour. Reports de longueur
Segment, droites, point Alignement de segments, d'un segment avec un ou plusieurs points, de trois points Droite caractérisée par un segment ou deux points Points construits comme intersection de deux droites…	Traits – droites… Prolonger Des traits qui se coupent	Règle, prolongement de traits

***Tableau 1**.– Exemple: des modes de fréquentation des dessins à l'école primaire.*

Cet outil nous permet *a posteriori* de rattacher, par la confrontation des différents observables, l'activité d'un élève à un mode de fréquentation spécifique, et ainsi de décrire finement son appréhension des objets enjeux de la tâche. Il permet en outre de détecter la coexistence au sein de la classe de différents modes de fréquentation, favorisant les malentendus ou les incompréhensions. Enfin, nous avons montré (Bulf et *al.*, 2014a, p. 42-45) que cela permet de décrire des dynamiques d'évolution, de négociation d'un mode de fréquentation partagé, dont le moteur peut être lié à l'agir (et on est alors préférentiellement renvoyé au schéma de la situation d'action) ou à une négociation dans et par le langage entre élèves ou entre élèves et enseignant – qui peut se limiter à un choix de termes ou de tournures, sans que cette négociation soit explicite – renvoyant à l'adoption de postures énonciatives spécifiques dans la constitution de communautés discursives disciplinaires scolaires (Jaubert et al., 2003). Ainsi, dans la reproduction de dessins géométriques, l'injonction « tracer des droites » convoque immédiatement des opérations de constitution d'un réseau de droites (ce qui renvoie à la déconstruction dimensionnelle), et ainsi une vision « segment-point-droite » acquiert une importance nouvelle.

Ce travail sur les modes de fréquentation nous engage ainsi à penser l'activité des élèves même au sein d'une situation d'action à l'aune de ce prisme agir-parler-penser et d'une hypothèse de cohérence de ces trois dimensions qui peut s'avérer localement fausse, comme nous l'avons signalé. Les verbalisations autour des situations d'action prennent un rôle qui dépasse largement la formulation puisque les interactions langagières constituent un lieu d'expression, de confrontation, de négociation[16] de rapports aux dessins, vers un rapport géométrique idoine, et que l'interdépendance de l'agir et du parler constitue un moteur important de l'évolution des connaissances mobilisées pour l'action. Cette attention spécifique sera présente dans la suite de ce texte, bien que nous ne convoquions pas spécifiquement une analyse en termes de modes de fréquentation pour laquelle nous ne disposons pas de l'espace nécessaire.

2. Enjeux d'apprentissage langagiers

Dans le paragraphe précédent, nous avons souligné le rôle des interactions langagières, verbales et orales, qui se développent autour de situations d'action telles que la reproduction de figures. Les travaux de Bulf, Mathé et Mithalal (Bulf et *al.*, 2014a, 2015 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2011) montrent que ces interactions langagières orales participent de l'évolution des stratégies des élèves tout comme les rétroactions pragmatiques du milieu. Elles constituent un lieu d'expression et de négociation de l'interprétation des dessins comme des modalités

[16] Sensevy (2006, p. 8) emploie le terme « transaction »

possibles de leur traitement au regard du problème posé. Considérer le rôle de ces interactions langagières nous semble ainsi permettre une meilleure compréhension des moteurs de l'évolution des stratégies des élèves. Il devient notamment nécessaire que les élèves produisent une désignation la plus précise possible des objets – qui seront les unités figurales de la visualisation non-iconique – et une formulation explicite de leurs relations, pierres angulaires de la déconstruction dimensionnelle. Ceci conduit également à envisager les activités langagières autour des situations d'action comme le lieu possible d'un premier mouvement de *secondarisation*[17] (Gobert, 2014 ; Jaubert et al., 2003 ; Rebière, 2013) vers la construction de pratiques langagières partagées permettant de désigner les objets mobilisés, leurs relations, et les actions sur ces objets, et détachées d'une résolution singulière. Ceci suppose notamment à terme un affaiblissement des dimensions temporelles et personnelles des discours construits, ce qui renvoie à un des aspects du passage de la déconstruction instrumentale à la déconstruction dimensionnelle.

Ce mouvement est progressif, et il s'agit encore essentiellement d'un langage de communication, contextuel et fonctionnel, en lien fort avec les traitements instrumentés du dessin. Les conditions d'un passage d'une géométrie des tracés à une géométrie théorique, d'un travail sur des dessins à un travail sur des figures, ne sont pas complètement satisfaites : il est nécessaire que se développe un langage *ad hoc* permettant l'émergence d'objets de discours indépendants de l'expérience sensible. Afin de préciser ceci, il est nécessaire de parvenir à une meilleure compréhension des enjeux d'apprentissage langagiers relatifs à la construction de ce langage géométrique.

Nous interroger sur la question, centrale, de l'articulation entre géométrie des tracés et géométrie théorique, nous a amenés à étudier les connaissances spécifiquement en jeu dans le passage d'une analyse instrumentée de dessins (portée par des activités de reproduction de figures) à la construction d'un langage susceptible de rendre compte de l'analyse géométrique des figures. L'enjeu réside dans la construction d'un langage géométrique, faisant des objets de la géométrie des objets de discours et permettant un traitement de ces objets, de leurs relations et propriétés, dans le registre langagier.

En appui à la fois sur des analyses de séances de classe et sur les travaux de Duval (1995), nous identifions quatre enjeux principaux d'apprentissages langagiers essentiels à cette fin. Passer de l'analyse instrumentée de dessins à la formulation d'une analyse géométrique des figures suppose d'être capable de :

i. *nommer les objets géométriques mobilisés*, unités figurales de dimensions 2, 1 ou 0 du dessin complexe mis à l'étude ;

ii. *nommer des relations entre ces objets géométriques* indépendamment des instruments qui les portent ;

iii. *articuler discours mathématique et organisation de l'analyse géométrique des dessins* ;

iv. *passer d'une description pragmatique d'une figure à une analyse qui permette de la caractériser (de la définir) géométriquement*.

Si le travail autour de la désignation des objets (i) et relations géométriques (ii) se situe en continuité directe des processus de secondarisation envisagés précédemment, les deux autres points (iii et iv) vont au-delà de ce que permettait le travail dans le langage autour des situations d'action. Or ici nous semblent résider des enjeux relatifs à la construction d'un langage géométrique. Nous rejoignons sur ce point Duval pour qui :

> Le langage [de la géométrie] et les difficultés qu'il suscite ne sont ni dans la connaissance du « vocabulaire » géométrique ni dans les concepts que les mots signifient mais dans les opérations de désignation qu'ils supposent ainsi que dans le discernement visuel des différentes unités figurales possibles 2D, 1D dans une figure. » (Duval, 2014)

[17] Nous n'avons pas la possibilité de détailler ce paradigme dans ce texte. Notons toutefois certains enjeux que Jaubert, Rebière, et Bernié (2003) soulignent dans ce processus et que nous considérons essentiels ici : perte des marques de l'action, de son contexte et des aspects temporels et personnels ; objectivation et reconfiguration de l'activité du sujet ; contraintes liées à des normes socio-culturelles ; combinaison contrôlée de genres premiers.

Illustrons et précisons cette analyse à travers deux exemples d'analyse géométrique de dessins, mobilisée dans des situations de reproduction et leur formulation. Nous nous centrerons dans un premier temps sur les trois premiers enjeux d'apprentissage mentionnés ci-dessus et aborderons dans un second temps la question du passage d'une description pragmatique à une description définitoire. Nous illustrons ces premiers points en appui sur l'analyse d'exemples de situations.

Premier exemple

La première situation a été proposée à des élèves de fin d'école maternelle (Grande Section – élèves de 5 à 6 ans) et de début d'école primaire (CP, élèves de 6 à 7 ans). Le problème consiste à reproduire, sur papier blanc au crayon, le dessin modèle situé à gauche dans la **Figure 11**. Les élèves disposent de gabarits de forme en plastique déplaçables, dont des gabarits de carré, demi-disque, quart-de-disque (de même échelle que le modèle). Le dessin de droite (**Figure 11**) est un exemple de production d'élève.

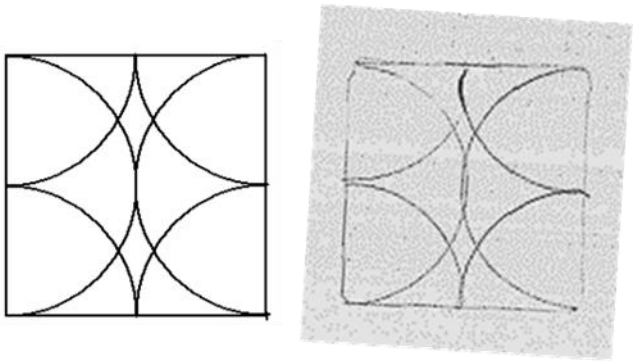


Figure 11.– *Reproduction d'une figure complexe à l'aide de gabarits utilisés comme des instruments de tracé de contours de formes*

Reproduire le dessin modèle nécessite ici de décomposer perceptivement ce dessin en termes de formes (un carré, deux demi-disques, quatre quarts-de-disque), juxtaposées ou qui se chevauchent. Pour ce faire, les élèves doivent reconstituer des formes à partir de lignes données par le dessin, trouver les formes qui conviennent dans la réserve. Il s'agit ensuite d'utiliser les gabarits comme des instruments de tracé de contours. Des connaissances relatives à la position relative des sous-unités identifiées sont également à mettre en œuvre.

Formuler l'analyse géométrique du dessin mobilisée pour sa reproduction suppose dans ce cas d'être capable de :

i. *nommer les sous-unités identifiées pour reproduire le dessin à l'aide des gabarits*. On peut avoir besoin de désigner les sous-unités de dimension 2 perçues sur le dessin modèle (carré, demi-disque, quart-de-disque), voire des sous-unités de dimension 1 si l'on veut parler des contours tracés (carré, demi-cercles, quarts de cercles) ;

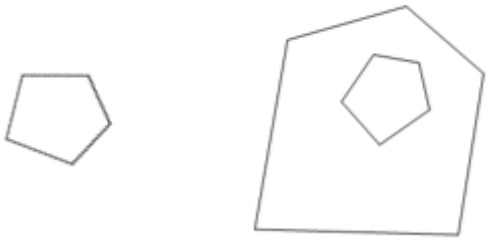
ii. *nommer des relations entre ces sous-unités* : juxtaposées, chevauchées, bord contre bord, « coin » des quarts de disque et coin du carré ;

iii. *articuler formulations orales et organisation de l'analyse géométrique des dessins*. Formuler des relations et positions relatives entre les formes induit par exemple ici une opération de *double désignation* de certains bords. Le même trait peut être interprété de deux manières différentes : bord d'un demi-disque ou bord du carré, il est tour à tour désigné comme sous-élément de la forme demi-disque ou sous-élément du carré. Bien sûr, nous ne traitons pas séparément la dimension langagière de l'activité, aussi l'accent que nous faisons porter ici sur cet aspect ne doit pas occulter le fait que ce statut multiple d'un même objet se manifeste aussi hors du champ langagier. Toutefois, d'un point de vue du traitement langagier de dessins, ce phénomène est, pour Duval, une *« opération fondatrice de toute activité mathématique »* (Duval, 1995) et constitue à ce titre une connaissance langagière fondamentale en géométrie. Nous verrons l'importance de la construction de

cette capacité à interpréter et désigner de différentes manières une même sous-unité, en jouant sur la nature de la figure englobant cette sous-unité, dans le second exemple.

Second exemple

Situons-nous maintenant à la fin de l'école primaire (CM1, CM2). Le problème, proposé consiste à reproduire le dessin modèle de droite à partir de l'amorce de gauche (**Figure 12**). Les élèves disposent d'une règle non graduée, d'un reporteur de longueurs (bande de papier) et d'un crayon. Un coût est posé sur l'usage des instruments, amenant les élèves à reproduire le dessin sans report de longueur.



Reproduire la figure en utilisant le moins de points possibles

Règles de coût sur les instruments
Tracer un trait dans la figure modèle : 0 pt
Tracer un trait dans la figure à compléter : 1 pt
Reporter une longueur : 3 pt

***Figure 12**.– Exemple de restauration d'une figure complexe avec coût sur l'usage des instruments*

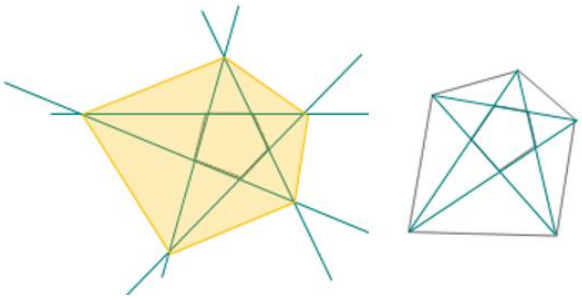


***Figure 13**.– Trace de la procédure attendue*

Formuler l'analyse géométrique de la figure mobilisée pour sa reproduction nécessite dans ce cas de :

i. *nommer des sous-unités de dimensions 2* (formes à 5 côtés, sommets ou coins de ces formes), *1* (côtés, segments, droites), *0* (points obtenus par intersection de droites) ;

ii. *nommer des relations entre ces objets géométriques* : « Prolonger un segment en une droite », « obtenir un point comme intersection de droites », « relier des points pour obtenir des segments puis le contour d'une forme à 5 côtés » ;

iii. *articuler discours mathématique et organisation de l'analyse géométrique des dessins.* Deux points essentiels nous semblent ici devoir être pris en compte en appui sur cet exemple. D'une part, la reproduction instrumentée du dessin nécessite en général une appréhension séquentielle de la figure représentée (Duval, 1994). Celle-ci *« concerne l'ordre de construction d'une figure. Cet ordre dépend non seulement des propriétés mathématiques de la figure à construire mais aussi des contraintes techniques des instruments utilisés »* (Duval, 1994, p.6). Ce n'était pas le cas dans l'exemple précédent, mais ici pour construire les sommets du polygone manquant par exemple, il va d'abord être nécessaire de prolonger les bords du polygone donné en des droites. Ces droites se couperont en des points qui deviendront les sommets recherchés. De même, la reproduction de droites avec la règle nécessite d'avoir un segment ou deux points supports… Formuler une analyse géométrique de la figure qui soit opératoire pour la reproduire à partir de l'amorce donnée et avec les

instruments à disposition nécessite donc de construire un texte (oral, écrit) dans lequel l'apparition des sous-unités figurales sera ordonnée. Cette organisation va conduire à interroger les prémisses sur lesquels pourront se construire d'autres unités figurales. Vit ici le fait qu'une droite est caractérisée par un segment ou deux points (ou « pour reproduire une droite, il faut *a minima* un segment ou deux points »), qu'un point peut être obtenu comme intersection de droites (à tracer en amont) … D'autre part, de manière assez semblable à l'exemple précédent, la formulation de cette analyse géométrique mobilise par ailleurs aussi une *double désignation* des objets : un côté de la forme (2D) pentagonale va devenir un segment que l'on peut prolonger en une droite, les sommets de la forme à reproduire sont obtenus comme des points, intersection de droites…

Coordonner représentation de la figure dans le registre graphique (en lien avec une analyse géométrique du dessin) et dans le registre langagier (être capable de formuler une analyse géométrique du dessin) met notamment en jeu des savoirs langagiers – au sens de manières stables de décrire les objets spécifiques de la géométrie – qui dépassent les formulations accompagnant les situations d'action. Ces savoirs sont aujourd'hui des *savoirs transparents* à l'école (Barrier, Mathé, & Mithalal, 2016 ; Laparra & Margolinas, 2010) où l'on estime très souvent qu'acquérir le vocabulaire suffit à être capable d'une analyse, à la fois perceptive et langagière, des figures. Or construire un langage géométrique en appui sur le traitement de dessins ne va pas de soi et doit à notre sens constituer un enjeu d'apprentissage à l'école pour permettre le passage d'une géométrie des tracés à une géométrie théorique. C'est en outre très largement dans une articulation similaire entre analyse perceptive des dessins (dans le registre graphique) et analyse portée par le langage, que se développeront les activités géométriques attendues au collège et en particulier les activités de démonstration.

Notre question est donc celle des situations posant les conditions de nécessité de ces savoirs et permettant une acquisition possible de ces connaissances langagières. Forts des outils livrés par la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), cette réflexion nous a ainsi conduits à explorer les potentialités de l'insertion de ces situations de reproduction de figures dans des progressions plus globales articulant situations de formulation et de validation.

Comme dans les analyses ci-dessus, nous continuons à nous centrer sur les trois premiers enjeux d'apprentissage évoqués dans ce paragraphe (nommer des objets (i), des relations (ii), articuler discours mathématique et organisation de l'analyse géométrique (iii)). Nous donner pour objectif de penser des situations rendant nécessaires la mobilisation de ces connaissances nous a d'abord amenés à étudier les possibilités et potentialités de progressions autour de situations de formulation en appui sur les situations de reproduction de figures. Nous verrons la manière dont l'analyse de telles situations nous a amenés à faire émerger le dernier enjeu évoqué ((iv) passer d'une description pragmatique d'une figure à une analyse qui permette de la caractériser (de la définir) géométriquement.), et à nous intéresser de plus près aux situations de validation.

3. Potentialités de situations de formulation, en appui sur la reproduction de figures

Les situations de formulation sont des situations dans lesquelles, pour réussir, le sujet (l'élève) explicite lui-même le modèle implicite de ses actions. Il s'agit d'empêcher l'action directe de l'élève sur le milieu matériel, par un éloignement dans l'espace ou dans le temps, et de rendre nécessaire la mise au point d'un langage *ad hoc*. Celui-ci doit permettre l'intercompréhension et la prise en compte des objets et relations de la situation de façon opératoire au regard du problème posé (Bessot, 2011 ; Bosch & Perrin-Glorian, 2013 ; Brousseau, 1998 ; Margolinas, 2003). Dans le cadre de la reproduction de figures, il s'agit ainsi d'empêcher la simultanéité de l'analyse perceptive du dessin à reproduire et de sa reproduction, et de contraindre l'élève à garder mémoire d'une description qui permette de construire le modèle sans l'avoir sous les yeux.

Les situations de formulation offrent une grande possibilité de variations. On peut par exemple imaginer un éloignement dans le temps de l'analyse du dessin et de sa reproduction. L'élève a donc pour mission de produire un message pour lui-même qui lui permette de garder mémoire de l'analyse du dessin (formulation à soi-même). Le jeu peut également se jouer à deux. Le joueur A a accès au dessin modèle mais ne peut le

reproduire directement. Ce joueur doit alors communiquer un message à un joueur B, qui ne voit pas le dessin modèle, afin que celui-ci puisse reproduire le dessin à l'aide d'instruments donnés (formulation à autrui). On peut également jouer sur le type de langage à mettre en œuvre : formulation verbale orale ou écrite, formulation par le biais de dessins… Cette grande variabilité de situations à usage didactique laisse donc entrevoir la possibilité de déclinaison de situations de formulation autour de reproductions de figures et de progressions en fonction des objectifs d'apprentissage langagiers poursuivis. L'expérimentation et l'analyse de telles situations font l'objet d'un travail en cours mais nous pouvons déjà évoquer ici quelques exemples de situations mises en œuvre en classe dans le prolongement des travaux précédents.

Situation de formulation à autrui, désignation des sous-unités de dimension 2 – le nom des formes

La première situation de formulation que nous évoquerons a été proposée à des élèves de fin d'école maternelle et de début d'école primaire (Grande Section, CP – élèves de 5 à 7 ans). Elle s'insère dans une progression dans laquelle les élèves ont, en amont, été confrontés à des situations que nous pouvons rapprocher de situations de reproduction de formes à l'aide de gabarits. Plus précisément, les élèves disposaient d'un contour de forme. Les premières situations amenaient les élèves à paver la forme à l'aide de gabarits de formes, utilisés comme des pièces de puzzle, et ainsi la décomposer en termes d'assemblages par juxtaposition. A ce titre, on ne peut pas parler *stricto sensu* d'une situation de reproduction de dessin – difficilement accessible en première intention par des élèves aussi jeunes –, mais il s'agit bien de travailler les compétences de décomposition-recomposition à l'œuvre dans les situations présentées précédemment. Par le biais de contraintes sur le nombre et la nature des gabarits à disposition, les procédures de recouvrement évoluent et les élèves apprennent à développer différentes décompositions de la forme-modèle, en termes de formes juxtaposées ou de formes qui se chevauchent. Un travail dans le langage à l'issue de ces situations a permis de mettre en évidence la pluralité des manières possibles d'analyser la forme initiale et le fait que le prolongement de bords de la forme initiale permet de reconstituer des contours de nouvelles formes.

***Figure 14**.–Exemples de décomposition de forme en termes d'assemblage de formes juxtaposées ou chevauchées*

Dans le prolongement des situations d'action et du travail de verbalisation autour de l'analyse de formes, des situations de formulation à autrui sont proposées aux élèves. Plusieurs types de situations sont possibles, en fonction des objectifs d'apprentissage langagiers poursuivis.

Une première situation possible consiste à éloigner les gabarits. Ceux-ci sont détenus par l'enseignante ou un élève. Sur le modèle de « jeux de la marchande », les élèves doivent analyser la forme à recouvrir, faire des hypothèses sur les formes permettant de recouvrir au moins en partie cette forme, en anticipant des prolongements de bords possibles, puis aller demander un/des gabarit(s) de forme souhaité(s). La contrainte est alors de formuler le nom de la forme. La validation s'effectue d'une part par adéquation de la forme obtenue à la forme désirée, et d'autre part lorsque l'élève vient positionner le gabarit sur la forme modèle.

Nous ne développerons pas davantage l'analyse de cette situation, assez classiquement rencontrée dans les classes. Il nous semblait toutefois important de la mentionner ici, pour la replacer dans le contexte général de notre analyse et la faire apparaître comme un premier type de situation de formulation possible, visant l'apprentissage d'un lexique partagé permettant de désigner des surfaces (formes 2D). Ce type de situation permet un travail autour du premier enjeu d'apprentissage identifié : *désigner les objets géométriques mobilisés, sous-unités de dimensions 2 du dessin complexe mis à l'étude* (i).

Situation de formulation à autrui, formulation sous forme de dessins et premières descriptions de l'analyse d'assemblages de formes

Nous prolongeons la présentation précédente en évoquant un autre exemple de situation de formulation prenant appui sur le même type de situation d'action. Cette fois-ci, après avoir décomposé une forme donnée en assemblage par chevauchement, le problème consiste pour les élèves à produire un message écrit (sous forme de dessin) qui doit permettre à un autre élève de refaire l'assemblage produit, sans avoir un accès direct à cet assemblage. Le dessin peut être produit à partir d'une amorce ou non, à main levée ou en utilisant les gabarits comme instruments de tracés de contours.

Les enjeux de formulation sont ici assez différents de ceux de la situation précédente. Il ne s'agit plus

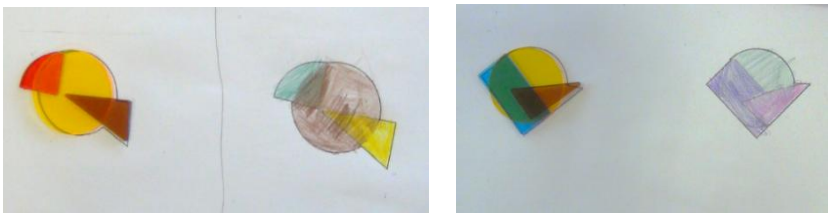


***Figure 15**.– Exemples de messages produits et d'assemblages réalisés à partir de ces messages*

seulement de faire fonctionner en situation un vocabulaire partagé, mais de s'appuyer sur un langage, à l'écrit, permettant de rendre compte non seulement de la nature des formes en jeu mais aussi leurs positions relatives. Les élèves ont par exemple utilisé les gabarits comme instruments de tracé de contours puis ont dû trouver un moyen de distinguer, par un code graphique (la couleur), la juxtaposition ou le chevauchement des formes. Au cours de la phase de validation, des connaissances relatives aux noms des formes et à leurs positions relatives peuvent être verbalisées. Cette situation a donc permis un travail autour des deux premiers enjeux d'apprentissage envisagés : *nommer des sous-unités de dimensions 2* (i) et *nommer des relations entre ces objets géométriques (ii).*

Situation de formulation à autrui, formulation par le biais d'un langage verbal écrit et construction d'un langage géométrique portant l'analyse géométrique de dessins.

Ici encore, nous considérons une situation de formulation à autrui s'appuyant sur la mise à distance de l'analyse du dessin et du lieu de sa reproduction. Il s'agit pour un élève (ou une équipe) A de reproduire une figure (à partir d'une amorce ou non) puis de rédiger un message permettant à un élève (ou une équipe) B n'ayant pas vu le dessin modèle de construire la figure (à partir de la même amorce, à une échelle et dans une orientation différente). À la différence de la situation précédente, le langage à mobiliser est ici un langage verbal et écrit.

Voici un exemple de situation proposée à des élèves de fin de cycle 2 et de début de cycle 3 (élèves de 8 à 10 ans), en appui sur la reproduction de figure illustrée un peu plus tôt dans ce texte (**Figure 12**).

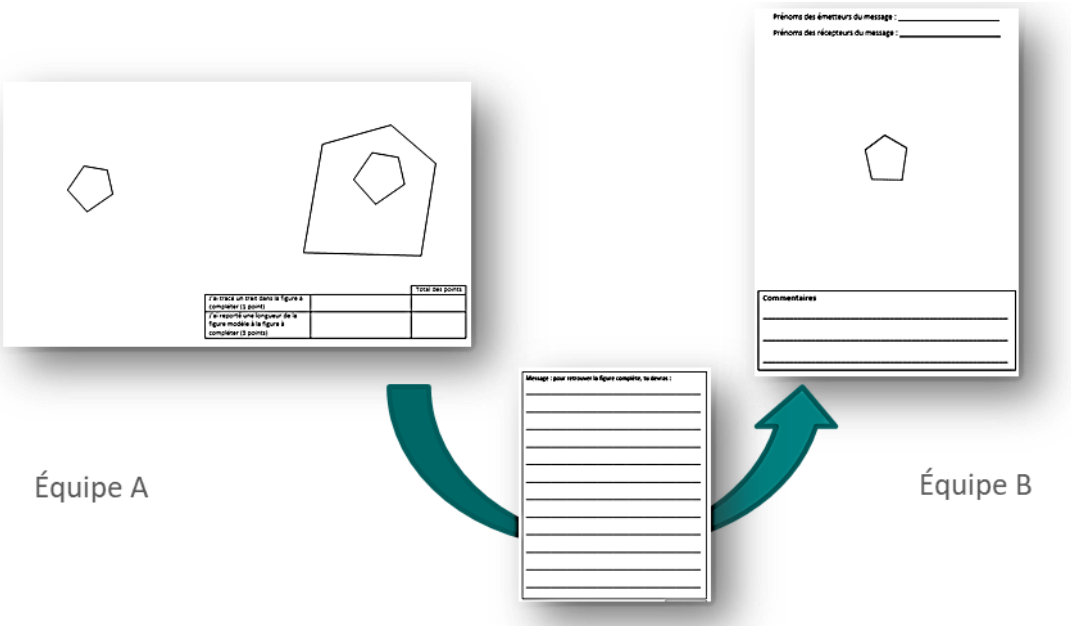


***Figure 16**.– Situation de formulation en appui sur la reproduction de figures*

L'équipe A (un binôme d'élève) avait pour mission d'écrire un message qui devrait permettre à une équipe B de construire la figure modèle, à partir de la même amorce. Il était toutefois précisé que cette amorce n'aurait ni la même orientation, ni la même échelle que celle dont disposait l'équipe A. Précisons également que les élèves ne devaient pas faire mention d'instruments dans leur message et que tout dessin y était également interdit.

Nous avons proposé précédemment quelques éléments d'analyse visant à identifier les connaissances langagières en jeu dans la formulation de l'analyse géométrique de cette figure. Trois d'entre elles étaient relatives à des enjeux d'apprentissage importants dans la perspective de la construction d'un langage géométrique : désigner des sous-unités de dimensions 2, 1 et 0, désigner des relations entre ces sous-unités et articuler discours géométrique et organisation de l'analyse géométrique visuelle des figures. Concernant ce dernier type de connaissance, nous avions en particulier pointé la nécessité d'une capacité à hiérarchiser l'analyse, en faisant apparaître des conditions d'existence des objets, et des opérations de double désignation. Regardons à présent un exemple de message produit par un binôme d'élèves confronté à cette situation de formulation.

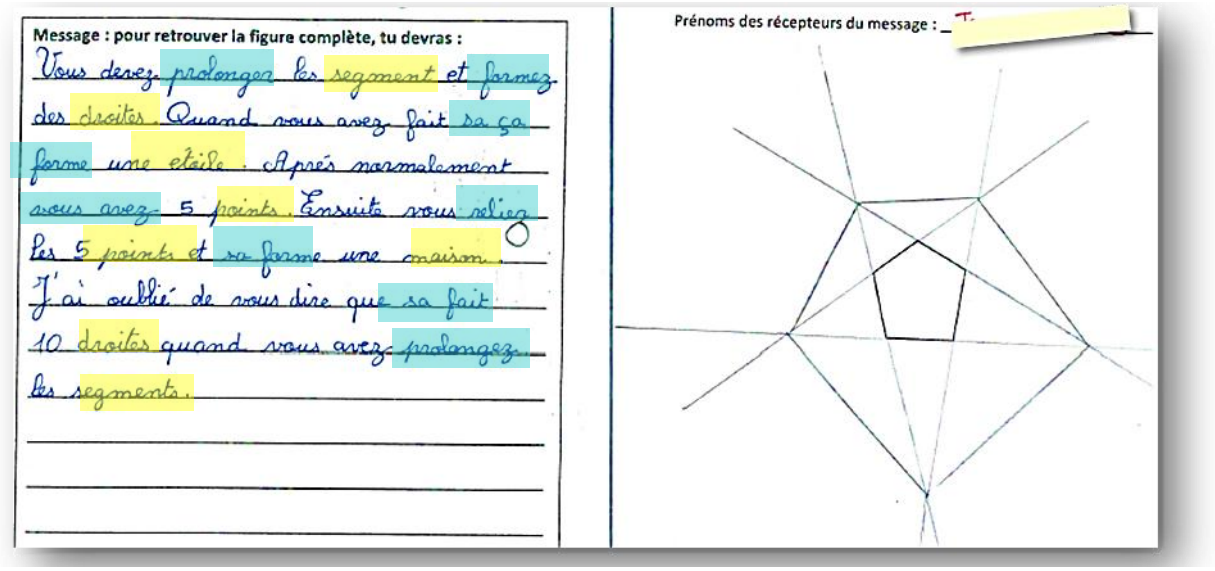


Figure 17.– *Production d'élève*

Résonnant avec l'analyse susmentionnée, plusieurs points attirent notre attention dans cet exemple de production (comme dans nombre de productions recueillies). L'analyse de celle-ci illustre en effet la mise en fonctionnalité de

i. *la désignation de sous-unités de la figure*, de dimension 2 : « une étoile », « une maison », de dimension 1 – avec la nécessité de désigner de manière différente les traits finis « les segments » et potentiellement infinis les « droites », et de dimension 0 : les « points » obtenus comme intersection de lignes.

ii. *la désignation de relations entre ces objets* : « prolonger », « former », « reliez », « ça fait »…

iii. *l'articulation d'un discours mathématiques avec une organisation de l'analyse géométrique visuelle de la figure.* Ecrire un tel message rend nécessaire d'ordonner l'analyse visuelle du dessin afin d'en produire une description organisée et opératoire pour permettre sa construction. Ainsi, les droites sont produites en prolongeant des segments, puis les points par intersection de ces droites. Ce sont ces points qui permettent ensuite de définir les côtés de la forme à reproduire. Se jouent alors, comme évoqué précédemment, des opérations de double désignation : les côtés de l'amorce sont interprétés comme des segments que l'on peut prolonger en droites. Les points obtenus par intersection deviennent les sommets de la nouvelle forme…

Ces rapides éléments d'analyse, comme nos expérimentations en cours dans les classes, nous confortent ainsi dans l'idée des potentialités offertes par de telles situations de formulation pour un travail autour des connaissances géométriques langagières évoquées ici.

Limites et prolongements

Les situations décrites ont une visée double. D'une part, elles problématisent l'articulation entre les registres graphique et langagier, dont les traitements doivent ainsi évoluer, ce qui constitue un enjeu majeur que nous avons déjà évoqué. D'autre part elles mettent au centre de l'activité géométrique une contrainte d'intercompréhension. Il est nécessaire de désigner les objets, leurs relations, et d'organiser cette description afin que le discours produit soit précis, univoque – du moins autant que cela est possible –, et intelligible par un autre individu doté de connaissances similaires.

Si les situations de formulation font émerger cette dernière nécessité, elles ne sont pas suffisantes pour accompagner la construction ou l'appropriation d'un tel discours par les élèves. En effet, les rétroactions que le milieu propose aux élèves, portant sur la validité des formulations, interviennent parfois très tard après l'émission d'un message – c'est souvent le cas des messages écrits – et offrent souvent peu d'indications relatives aux adaptations possibles par l'élève. Le passage par l'oral fournit à ce titre des rétroactions plus rapides et permet plus aisément des stratégies par essai-erreur susceptibles de faire évoluer les formulations –

on pensera par exemple au travail en dyade proposé par Petitfour et Barrier dans cet ouvrage. La contrepartie est le caractère local de cette description, et sa structure liée à l'interaction verbale orale plus qu'à l'objet géométrique lui-même.

Le point (iv), « *passer d'une description pragmatique d'une figure à une analyse qui permette de la caractériser (de la définir) géométriquement*. » suppose un pas supplémentaire dans la construction d'un discours propre à la géométrie. La dimension non-procédurale de cette description, qui suppose la déconstruction dimensionnelle, démarque ce discours d'échanges entre élèves en vue d'une construction. Lorsqu'il s'agit d'écrit, il appelle en outre des considérations relatives à la prise en compte d'une finalité du discours, à sa réception par un lecteur dont il faut anticiper les connaissances et les interprétations, et donc à la convocation d'une construction formelle des objets. Nous considérons que l'émergence d'un tel discours participe de la construction de ces objets et de la modification de l'ancrage épistémologique (de GI vers GII), aussi nous ne l'aborderons pas directement. En revanche, il nous faut prendre en charge la dimension langagière de l'activité au sein de situations de validation permettant de rendre visibles, pour les élèves, ces enjeux se situant hors d'un travail dans l'espace graphique.

4. Situations de validation

Enjeux de la construction de situations de validation

Les quatre enjeux d'apprentissage langagiers que nous avons signalés précédemment existent au sein de situations de formulation, mais restent tournés vers l'objet graphique. Les discours produits ne font l'objet que d'une validation pragmatique – il s'agit d'évaluer la qualité des informations transmises – sans être interrogés d'un point de vue interne au langage – en référence à ce qui ferait la qualité d'un tel texte, indépendamment de l'expérience graphique. Ceci appelle des situations de validation, dans lesquelles la validation empirique venant du milieu devient insuffisante et où le sujet, pour convaincre un opposant, doit élaborer des preuves intellectuelles. (Brousseau, 1998 ; Bessot, 2011)

De telles considérations sont essentielles pour le passage vers une géométrie théorique dans laquelle l'analyse langagière est considérée comme la représentation principale, autosuffisante de la figure (Duval, 2005, p. 34). Il est nécessaire de disposer de modalités de validation internes, assurant ce caractère *autosuffisant*.

Qui plus est, la construction du discours doit s'émanciper de l'expérience sensible, et pour cela il est nécessaire de procéder à l'étude de ses caractéristiques : les formes de discours spécifiques à la géométrie, les contraintes permettant la compréhension mutuelle et limitant les ambiguïtés, la prise en compte du lecteur, les connaissances qu'il est possible de convoquer… Les travaux de sciences du langage ou de didactique du français[18] montrent que ces spécificités doivent être abordées explicitement.

Nous considérons donc que des situations de validation doivent prendre en compte différentes dimensions que nous examinons maintenant. La *dimension manipulatoire de la géométrie* ne peut être omise, comme nous l'avons évoqué auparavant. Le rapport à l'expérience sensible ne peut être exclu de l'activité ; il doit cependant en devenir une composante sur laquelle ne repose plus la validation. *La nécessité de désigner de manière univoque, et indépendamment des caractéristiques spatiales* (dont par exemple l'orientation, les dimensions, etc.) les objets en jeu, inclut par exemple les doubles désignations que nous avons évoquées précédemment. *La désignation des relations entre objets, indépendamment des caractéristiques spatiales* est consubstantielle du passage vers la visualisation non-iconique. Ces relations peuvent être de plusieurs natures, soit attachées à des instruments de tracés, soit faisant référence à des propriétés géométriques. Il nous semble – en raison des liens forts entre les déconstructions instrumentale et dimensionnelle (Voir la section « **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** ») – qu'il est possible de laisser ouvertes ces deux possibilités, mais que ces situations

[18] Citons par exemple les travaux de Tauveron (1999) ou Eco (1996).

doivent à terme faire apparaître les propriétés géométriques comme plus efficaces et moins ambigües. Ces situations doivent en outre problématiser *la possibilité de désigner des objets qui ne sont pas tracés sur le dessin*, ce qui correspond à l'ajout de tracés réorganisateurs (Duval, 2005). La dimension textuelle suppose de faire apparaître *le contrôle de l'analyse des dessins par les contraintes d'écriture des textes*. En effet, l'analyse des dessins dont font état les formulations des élèves ne peut être liée à un parcours visuel « naïf », elle doit être organisée par des impératifs de construction du texte, ce qui permet de problématiser l'articulation du discours et de l'analyse géométrique (point iii. *articuler formulations orales et organisation de l'analyse géométrique des dessins*). En particulier, cela suppose de faire apparaître explicitement le texte comme enjeu de cette situation, et de limiter le rôle des objets graphiques à un support de l'activité langagière, ce qui préfigure le rôle du dessin dans un contexte de démonstration.

Enfin, il faut faire porter l'accent sur *la dimension spécifiquement textuelle de cette activité*. Ce dernier point est essentiel dans la construction de ces situations de validation, quand bien même elles sont construites sur la base d'activités de tracé. L'entrée dans une géométrie envisagée comme pratique discursive ne peut, selon nous, faire l'économie de poser la question de ce que représente « parler en géométrie », « rédiger un texte en géométrie », et de partager ces questions avec les élèves. Les implications de cette attention sont multiples, et constituent un champ de recherche actuellement actif qui explore différentes approches au nombre desquelles on peut (sans être exhaustif) mentionner :

- les questions liées au processus de secondarisation, envisagé sous deux acceptions différentes (Bautier & Goigoux, 2004 ; Rebière, 2013), qui peut être mis en lien dans ce cas particulier avec le passage de la chronique au récit (Lhoste, Boiron, Jaubert, Orange & Rebière, 2011), sans que ces derniers travaux soient directement transposables ;
- la prise en compte de la structuration logique des énoncés en géométrie et de tournures spécifiques à ce domaine (Barrier et al., 2013 ; Hache, 2014, 2015) ;
- des considérations concernant les processus à l'œuvre lors de la lecture et de l'écriture de textes, le caractère dynamique de ces processus, les inférences à l'œuvre lors de la lecture auxquels répondent des anticipations sur le lecteur lors de l'écriture, la co-construction de lecteurs et d'auteurs modèles, la construction de récits et les enjeux de structuration à l'œuvre… (Eco, 1996 ; Goigoux, Cèbe, & Pironom, 2016 ; Moulin, 2014 ; Ricœur, 1983 ; Tauveron, 1999).

Ces situations étant rares, nous proposons ici à titre d'exemple un travail sur les programmes de construction, visant à jouer un tel rôle. Ce travail est issu d'une recherche en cours (Mithalal & Moulin, 2015, 2018).

Les programmes de construction pour la construction de situations de validation

Nous avons mentionné les liens forts entre les déconstructions instrumentale et dimensionnelle et la possibilité d'aborder la dimension langagière *via* des problématiques de construction en faisant reposer la validité hors de l'expérience sensible. Nous en tirons l'hypothèse selon laquelle il est possible de suivre une telle progressivité concernant la construction d'un discours géométrique. Les programmes de construction constituent ainsi un point d'entrée contextualisant l'émergence d'un langage propre à la géométrie et la mise au jour de ses caractéristiques. La disparition progressive d'une forte dimension procédurale, qui accompagne le passage entre les deux déconstructions, est selon nous à rapprocher – sans qu'il soit possible de le transposer complètement – du passage de la chronique au récit, proposé par Lhoste, Boiron, Jaubert, Orange & Rebière (2011) et à envisager à l'aune de la secondarisation (Rebière, 2013). Nous ne les aborderons pas ici. Nous proposerons des situations de validation visant à interroger les discours descriptifs proposés par les élèves, et leurs conditions de validité – d'un point de vue opérationnel mais aussi relativement à une norme qui se doit d'être construite

Les programmes de construction : des textes très spécifiques

Les programmes de construction sont des textes décrivant un dessin, dont l'objet est de *« permettre sa reconstruction par d'autres élèves qui ne [le] connaissent pas »* (Laborde, 1982, p. 209). Il s'agit d'algorithmes dont la finalité n'est pas de justifier la validité de la construction, mais bien de permettre sa bonne réalisation. A ce titre ils existent essentiellement dans un contexte d'enseignement, principalement au cycle 3 (9-12 ans) : par la suite les questions de *constructibilité* prennent le pas sur celles de *construction*, comme le signalent Chevallard et Jullien (1991). Laborde (1982, p. 210) signalait le risque de voir cette activité réduite à un exercice de rédaction. A l'inverse, la dimension algorithmique du texte produit pourrait laisser penser qu'il ne s'agit *que* d'une mise en mots, transparente, d'une activité de tracé, et que cette activité est a-problématique. Nous considérons que chacun de ces points de vue est réducteur, et qu'il faut considérer ces objets simultanément pour leur dimension textuelle et leur dépendance aux opérations de tracé. On peut pour s'en convaincre considérer des phrases produites par les élèves, puis des productions expertes :

> « En partant du bord gauche en haut, on trace un point à 3 cm s'appelant A. », « On doit arriver à 3 cm du bord de gauche de longueur », « Sur un côté de 8 cm, en partant de la gauche, mettre un point à 3 cm du bord ». (Laborde, 1982, p. 290‑ 291)

> Soit un cercle de centre A qui coupe (AB) en E et (CD) en F. Le cercle de centre F et de rayon AE coupe (CD) en G. Le cercle de centre E et de rayon AE coupe le cercle précédent du même côté de (AB) que F en un point H. La droite (HG) coupe (AB) en I. Il suffit alors de tracer la médiatrice du segment [GI] : c'est la droite cherchée. (Chevallard & Jullien, 1991, p. 64)

On voit dans les productions d'élèves des indications de repérage spatial et des désignations d'objets, qui demandent une interprétation par le lecteur : ainsi « bord » n'est ici pas défini. Dans la production experte proposée par les auteurs de la seconde citation, on peut lire l'ellipse des instructions de tracé (« qui coupe »), et des tournures spécifiques aux mathématiques (« Soit », « Il suffit »). Ces caractéristiques, tant du côté des productions d'élèves que d'une référence institutionnelle, font signe vers un texte d'un genre spécifique dont l'appropriation par les élèves ne peut être considérée comme allant de soi.

Un exemple de situation de validation autour des programmes de construction

Les programmes de construction sont notamment travaillés *via* des situations dites de « figures téléphonées » proposées par Laborde (1982) : un groupe d'élèves à qui on donne un dessin doit proposer un message (écrit ou oral selon les mises en œuvre) permettant à d'autres élèves de le reproduire sans en disposer. Ces situations de communication sont à rapprocher des situations décrites précédemment. Elles sont porteuses d'un caractère de nécessité : il est *nécessaire* d'écrire une description convenable.

En revanche, les éléments relatifs à l'écriture de ces textes ne peuvent être explicités que lors de phases de mise en commun, sur la base des textes produits par les élèves. Plusieurs difficultés apparaissent, au nombre desquelles le caractère tardif des rétroactions portant sur le texte (le texte est écrit, puis transmis, corrigé par un autre groupe, avant de revenir aux émetteurs), et la complexité de la mise en commun en raison de l'hétérogénéité des messages produits : certains sont difficilement utilisables car de trop mauvaise qualité, d'autres n'appellent pas de commentaires en raison de leur qualité, et il est très délicat de tirer des éléments à la fois récurrents dans les productions et pertinents pour l'institutionnalisation.

Nous avons souhaité problématiser explicitement la construction de ces textes, tout en donnant aux élèves des références – qui ne sont pas nécessairement parfaites – pour construire simultanément lecteur et auteur modèle (Eco, 1996 ; Moulin, 2014). Cela nous conduit à construire une séance articulant l'étude de programmes de construction imparfaits, ce que la réalisation par les élèves permet de rendre manifeste, la recherche de défauts des textes, et la correction de ces derniers. Nous n'en présentons ici que les grandes lignes.

La séance se présente en plusieurs temps : (1) la réalisation d'un dessin correspondant à programme de construction fourni (2) la confrontation des dessins réalisés au modèle supposément utilisé pour écrire le

programme, et la qualification des différences (3) l'examen collectif du texte fourni, la levée des ambiguïtés et la correction des éléments problématiques.

Le texte proposé aux élèves dans la première consigne, est le suivant : « D'abord il faut construire un triangle. Au milieu du segment [BC], tu dois construire un point que tu appelleras D. Puis, il faut faire pareil sur les deux autres côtés, et comme ça à la fin tu as trois points sur les côtés du triangle. Pour finir, tu dois relier les trois points entre eux, pour faire un petit triangle à l'intérieur du grand triangle. Le petit triangle s'appelle DEF. ». Il est à mettre en regard, dans la phase (2), du dessin reproduit en Figure 18.

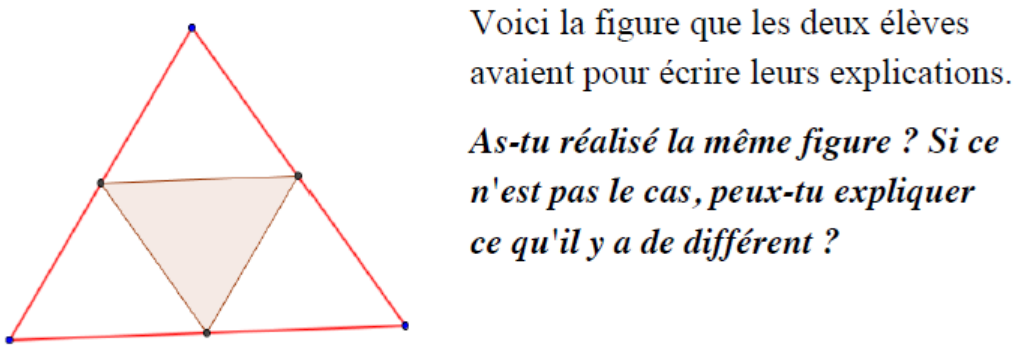


Figure 18.– *Dessin modèle et mise au jour des éléments problématiques du texte*

Quelques productions d'élèves

Les productions reproduites ci-dessous sont issues d'une séance en classe de 6e (début d'année, mois d'octobre). Elles sont composées du dessin réalisé par les élèves, d'un texte expliquant les différences entre le dessin réalisé et le modèle, du programme annoté afin d'indiquer ses « défauts » (ceci a été réalisé après une séance de mise en commun des productions et de discussion sur l'origine des variations entre les réalisations), et d'une réécriture réalisée individuellement en tant que « devoir maison ».

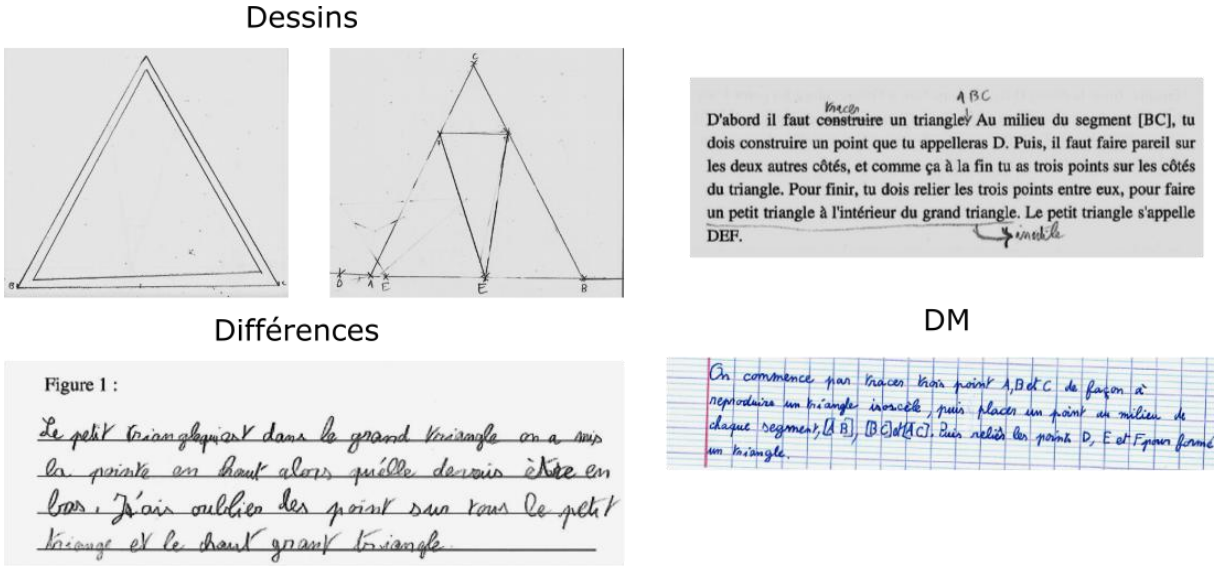


Figure 19.– *Elève 1 : réalisation du programme, qualification des différences, examen du texte et réécriture*

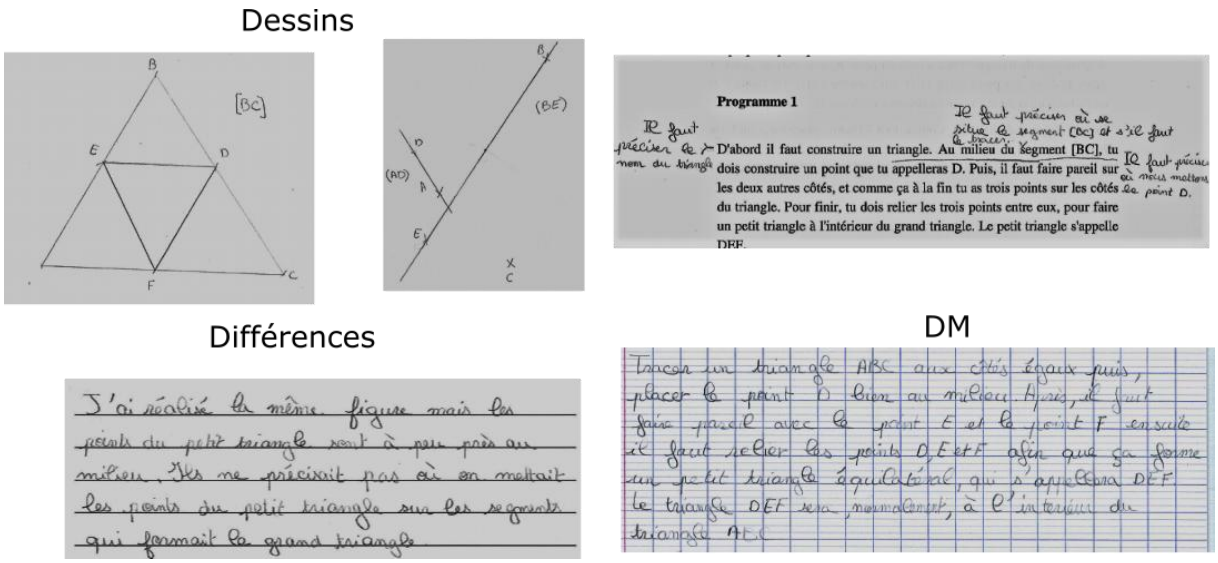


***Figure 20**.– Elève 2 : réalisation du programme, qualification des différences, examen du texte et réécriture*

Il ne s'agit pas ici d'en faire l'étude exhaustive, mais nous pouvons dans ces deux extraits souligner la variété des productions – plus ou moins conformes au modèle – que nous pouvons lier à la capacité des élèves, variable, à sélectionner les informations et saisir les implicites du texte. Cette capacité est très clairement identifiée en didactique du français, et nécessite un apprentissage spécifique.

Dans le cas du premier élève, les informations relatives à la position des sommets du petit triangle semblent avoir été masquées par la dernière instruction « un petit triangle à l'intérieur du grand triangle ». Il nous semble que les informations relatives à la forme (triangle) et à l'organisation spatiale (à l'intérieur) sont privilégiées, et que le triangle est alors réalisé par similitude avec le premier, ce qui explique l'orientation : l'implicite saisi par l'élève est que les triangles ont des allures similaires. Les différences relevées vont dans ce sens : elles portent sur la forme et son orientation (« la pointe en haut »), et il est fait mention des points qui, faute d'être nommés, sont jugés « oubliés » alors même qu'ils sont identifiables et qu'ils n'apparaissent pas davantage sur le modèle. Ceci semble renvoyer à la visualisation iconique, et on perçoit l'interdépendance entre visualisation et traitement du texte descriptif – on renverra ainsi au ModF lié à l'identification des formes proposé dans le **Tableau 1**.

Les difficultés liées au traitement de la deuxième phrase sont encore plus manifestes dans la production du second élève. Remarquons les questions relatives à la position du point D, matérialisées par les remarques reproduites ci-dessous (**Figure 21**), et qui ont fait l'objet d'un débat en classe. Le texte est parfaitement clair, mais la tournure – souvent employée en mathématiques – est particulière : le lieu de la construction (« Au milieu du segment [BC] ») est énoncé en tête de phrase, tandis que le nom de l'objet construit et l'action de construction ne sont désignés que dans la seconde partie de la phrase. Les élèves ont rencontré des difficultés conséquentes à comprendre cette phrase, en raison même de sa structure. Ils considèrent que l'information est absente lorsqu'ils comparent leur dessin au modèle, et même lors de l'examen du texte, alors que cette phrase a fait l'objet d'un long débat et d'une explication lors de la mise en commun. La réécriture insiste sur ce point : « placer le point D bien au milieu ».

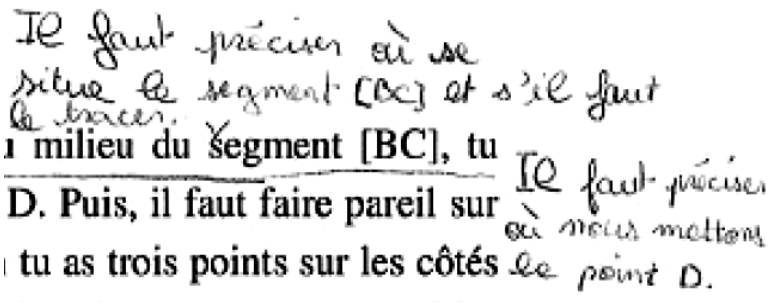


***Figure 21**. Difficultés à interpréter la consigne en raison de la structure (Elève 2).*

Nous souhaitons souligner par cet exemple – qui ne prétend pas avoir de portée générique – la nécessité de proposer des situations de validation dont l'analyse interroge simultanément les connaissances de géométrie, les instruments mobilisés, la visualisation, mais aussi la dimension langagière de l'activité. Cette dernière ne peut être considérée comme dépourvue de difficulté, ni traitée par le seul prisme du lexique ou de l'énonciation de tournures stéréotypées. Il est nécessaire pour les élèves d'apprendre à développer un parler propre à la géométrie, *ad hoc*, pour lequel ils disposent de repères explicites – qui doivent être enjeux des situations de validation –, construit conjointement avec des pratiques instrumentées. Nous convoquons ici encore la prise en compte, nécessaire, d'un agir-parler-penser envisagé comme indissociable.

Conclusion

Dans ce texte nous avons souhaité interroger, à la lumière de travaux développés en didactique de la géométrie en France depuis une quinzaine d'années, l'articulation entre usages du dessin, pratiques instrumentées et pratiques langagières dans l'enseignement-apprentissage de la géométrie à l'école primaire. Si le dessin semble être un lieu naturel pour cette discipline, nous espérons avoir montré qu'il est impératif de bien cerner toutes les dimensions liées à son usage. Nous avons abordé la géométrie à l'aune de la perspective de la démonstration, qui n'intervient pourtant qu'en cycle quatre (12-15 ans). Nous considérons qu'il est possible d'appréhender tout le travail des trois premiers cycles sous ce prisme, afin de dégager une continuité des enjeux, des pratiques, afférentes à la géométrie.

Il faut en premier lieu interroger le dessin en ce qu'il est le lieu de la conceptualisation, en ce qu'il propose une première rencontre avec les notions géométriques lorsque l'on dépasse la catégorisation purement visuelle des objets. La distinction entre dessin et figure, l'étude du rôle des instruments dans la conceptualisation, la notion de paradigmes géométriques, traduisent ce double mouvement de construction de concepts comme une classe d'équivalence d'objets du monde sensible proposés par le dessin, et de représentation graphique d'objets dont l'existence est définie hors de l'expérience sensible, principalement de manière langagière.

Dans cette perspective, il faut aussi souligner le rôle du dessin relativement aux différents enjeux de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Comme nous l'avons montré, l'espace graphique se situe à l'interface entre espace sensible et espace géométrique ; en son sein peuvent exister ou coexister des problématiques pratiques, des problématiques théoriques ou des problématiques qui lui sont propres. L'activité même de démonstration n'est pas indépendante d'une activité portant sur le dessin, puisque le traitement des problèmes de géométrie consiste généralement en des allers-retours entre une géométrie de type GII et une géométrie de type GI.

Cette manipulation du dessin ne peut pas être considérée comme allant de soi, et nous avons montré qu'un certain nombre d'opérations nécessaires à l'entrée dans la démonstration doivent être travaillées à l'école pour ne pas constituer un élément de blocage au moment de l'entrée dans la démonstration. Le passage à la visualisation non-iconique et à la déconstruction dimensionnelle constitue selon nous un enjeu majeur du cycle

3 (9-12 ans), reposant sur des apprentissages initiés dès la maternelle, et qui peut être travaillé conjointement aux autres apprentissages de la géométrie.

La dimension langagière de l'activité se doit d'être interrogée, ne serait-ce qu'en raison de l'articulation nécessaire entre des registres de représentation sémiotique graphiques et langagiers, indispensable mais particulièrement complexe. Nous avons souhaité ici esquisser quelques-unes des dimensions en jeu. La construction d'un vocabulaire partagé, de manières de parler propres à la géométrie, aptes à rendre compte des objets manipulés et à les caractériser théoriquement, l'articulation entre graphique et langagier, ont été envisagées au sein du paradigme de l'action, de la formulation et de la validation. Il s'agit là d'un champ de recherche ouvert qui appelle des développements ultérieurs. Il nous semble que résident ici des enjeux fondamentaux de l'enseignement de la géométrie offrant des pistes pour penser, au-delà de la nécessaire rupture épistémologique accompagnant le passage à la démonstration, une continuité des pratiques entre géométrie des tracés et géométrie théorique du collège, selon nous sous-estimée par l'enseignement actuel de la géométrie à l'école.

Références

ARSAC G. (1989). How 12 years old children construct the concept of figure. In G. R. Didactique (Éd.), *Proceedings of the thirteenth Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 85‑92). Paris.

BALACHEFF N., & MARGOLINAS C. (2003). cK¢ modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In C. Margolinas & A. Mercier (Éd.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1‑32). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

BARRIER T., CHESNAIS A., & HACHE, C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *SPIRALE – Revue de Recherches en Éducation*, *54*, 175‑193.

BARRIER T., HACHE C., & MATHE A.-C. (2013). Seeing – acting – speaking in geometry: a case study. In *Proceedings of the eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquie.

BARRIER T., MATHE A.-C., & MITHALAL J. (2016). Formation initiale des enseignants du premier degré en géométrie : quels savoirs ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *21*, 317‑342.

BAUTIER E., & GOIGOUX R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie*, *148* (1), 89‑100.

BERNIE J.-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de "communauté discursive" : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de pédagogie*, *141*, 77‑88.

BERNIE J.-P. (2003). L'apprentissage est une activité sociale et le langage est son "milieu". In *Actes de la XIIieme école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41‑55). La Pensée Sauvage.

BERTHELOT R., & SALIN M. H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, *53*, 39‑56.

BERTHELOT R., & SALIN M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Université Bordeaux 1.

BESSOT A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la recherche en théorie des situations didactiques. In C. Margolinas & al. (Éd.), *En amont et en aval des ingénieries didactique* (p. 29‑56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOSCH M., & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2013). Le langage dans les situations et les institutions. In Bronner, A. et *al.*, *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, Actes de la XVIème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 267‑302), Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1983). Étude de questions d'enseignement : un exemple en géométrie, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Université J. Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUL, C., MATHE A.-C., & MITHALAL J. (2011). *Actions matérielles, activités langagières et apprentissages en géométrie*.

BULF C., MATHE A.-C., & MITHALAL J. (2014a). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. *SPIRALE – Revue de Recherches en Éducation*, *54*, 29‑48.

BULF C., MATHE A.-C., & MITHALAL J. (2014b). *Entre adaptation et acculturation : l'apprentissage de la géométrie*. Deuxièmes journées d'étude « Langage dans l'Enseignement et l'apprentissage des Mathématiques ».

BULF C., MATHE A.-C., & MITHALAL J. (2015). Langage, résolution de problèmes et construction de connaissances en géométrie. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *35*(1), 7 – 36.

BULF C., & CELI V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire – une articulation clé : gabarit-compas. *Grand N*, (97), 21‑58.

BULF C., MATHE A.-C., & MITHALAL, J. (2011). Language in geometry classroom. In *Proceedings of the 7th ERME Conference*. Rzeszow, Pologne.

CHAACHOUA H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*. Université Joseph Fourier, Grenoble.

CHEVALLARD Y., & JULLIEN M. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, première partie. *Petit x*, *27*, 41‑76.

COUTAT S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser une liaison école primaire-collège : une ingénierie au collège sur la notion de propriété.* Université Joseph-Fourier - Grenoble I.

DUVAL R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, *17*, 121‑138.

DUVAL R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

DUVAL R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5‑53.
DUVAL R. (2007). La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée. In J. Baillé (Éd.), *Du mot au concept – Conversion* (Vol. 2, p. 9‑45).
DUVAL R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire. Histoire d'une séquence d'activités. In C. F. Brandt & M. T. Moretti (Éd.), *As Contribuiçoes da Teoria das Representaçoes Sémioticas Para o Ensino e Perquerisa na Educaçao Matematica* (p. 227‑251). Inijui.
DUVAL R., & GODIN M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7‑27.
ECO, U. (1996). *Six promenades dans les bois du roman et d'ailleurs*. (T. M. Bouzaher, Éd.). Grasset.
FISCHBEIN E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162.
GOBERT S. (2014). Déplacements dans le processus de secondarisation. *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, *54*, 65‑82.
GOIGOUX R., CEBE S., & PIRONOM J. (2016). Les facteurs explicatifs des performances en lecture-compréhension à la fin du cours préparatoire. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, (196), 67‑84.
HACHE C. (2014). Logique, langage, énoncés et preuves en mathématiques. In *XXIIe Colloque CORFEM*. Grenoble, France.
HACHE C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens - Une étude de cas avec « avec ». *Petit x*, *97*, 27‑43.
HOUDEMENT C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, *67*, 69‑84.
HOUDEMENT C., & KUZNIAK A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 175‑193.
JAUBERT M., REBIERE M., & BERNIE J.-P. (2003). L'hypothèse « communauté discursive » : d'où vient-elle ? Où va-t-elle ? *Cahiers Théodile*, *4*, 51‑80.
JONES K., MASCHIETTO M., & MITHALAL J. (2017). WG4: Geometry Education. In Dooley, T. & Gueudet, G (Éds.) *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 559‑694). Dublin, Ireland.
KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.-J., & DELPLACE J. R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, *79*, 33‑60.
LABORDE C. (1982). *Langage naturel et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*. Grenoble : Thèse d'état, Université Joseph Fourier.
LABORDE C., & CAPPONI B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1), 165‑210.
LAPARRA M., & MARGOLINAS C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques*, *145‑146*, 141‑160.
LHOSTE Y., BOIRON V., JAUBERT M., ORANGE C., & REBIERE M. (2011). Le récit : un outil pour prendre en compte le temps et l'espace dans des explications biologiques et pour construire des savoirs en sciences ? *Revue de Didactique des Sciences et des Technologies*, *4*, 57‑81.
MANGIANTE-ORSOLA C., & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres. *Grand N*, *94*, 47‑79.
MARGOLINAS C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques. In *Actes du colloque pluridisciplinaire "construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement"*. Bordeaux, France.
MATHE A.-C. (2012). Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *32*(2), 195‑228.
MITHALAL J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* (PhD Thesis). Université de Grenoble.
MITHALAL J., & MOULIN M. (2015). *Le programme de construction comme un récit : réticence et prolifération*. 3e journées LEMME, Villeneuve d'Ascq.
MITHALAL J., & MOULIN M. (2018). *Construction d'une figure d'auteur modèle lors de mises en commun en cycle 3 sur l'écriture de programmes de constructions.* 6e journées LEMME, Lyon.
MORGAN C. (2013). Language and Mathematics: a field without boundaries. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Éd.), *Proceedings of the eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Antalya, Turkey.
MOULIN M. (2014). *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement*. Université Claude Bernard - Lyon I.
OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.-J., & VERBAERE O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x*, *72*, 6‑39.
PARZYSZ B. (1988). "Knowing" vs "Seeing", Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 79‑92.
PARZYSZ B. (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Université Denis Diderot, Paris.
PARZYSZ B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *17*, 121-144.
PERRIN-GLORIAN M.-J., & GODIN M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math école*, *222*, 26‑36.
PERRIN-GLORIAN M.-J., & GODIN M. (à paraître). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. In CORFEM *Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée.*
PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C., & LECLERCQ R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM*, *90*, 5‑14.
PERRIN-GLORIAN M.-J., & SALIN M. H. (2010). Didactique de la géométrie. Peut-on commencer à faire le point ? In Coulange, L & Hache, C (Éds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2009.* Paris : IREM Paris Diderot.

REBIERE M. (2013). Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. In A. Bronner & al. (Éd.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage.* La Pensée Sauvage, Grenoble, France.
RICŒUR P. (1983). *Temps et récit, t.1* (Seuil). Paris.
SENSEVY G. (2006). Préface. In M.-C. Guernier, V. Durand-Guerrier, & J.-P. Sautot (Éd.), *Interactions verbales, didactiques et apprentissages, Recueil, traitement et interprétation didactiques des données lang* (p. 3‑14). Presses Universitaires de Franche-Comté.
SFARD A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1), 13 – 57.
SOURY-LAVERGNE S. (1998). *Etayage et explication dans le préceptorat distant, le cas de TéléCabri*. Université Joseph-Fourier - Grenoble I.
TAUVERON C. (1999). Comprendre et interpréter le littéraire à l'école : du texte réticent au texte proliférent. *Repères*, *19*, 9‑38.
VERGNAUD G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2.3), 133‑170.