



**HAL**  
open science

# Modèle monocouche équivalent de plaque multicouche orthotrope

Fabien Marchetti, Kerem Ege, Quentin Leclère

► **To cite this version:**

Fabien Marchetti, Kerem Ege, Quentin Leclère. Modèle monocouche équivalent de plaque multicouche orthotrope. CFM 2017 - 23ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2017, Lille, France. hal-03465781

**HAL Id: hal-03465781**

**<https://hal.science/hal-03465781>**

Submitted on 3 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèle monocouche équivalent de plaque multicouche orthotrope

**F. MARCHETTI<sup>a</sup>, K. EGE<sup>b</sup>, Q. LECLERE<sup>c</sup>**

Univ Lyon, INSA-Lyon, LVA EA677, F-69621 Villeurbanne, France,

a. fabien.marchetti@insa-lyon.fr

b. kerem.ege@insa-lyon.fr

c. quentin.leclere@insa-lyon.fr

## Résumé

*La caractérisation de matériaux complexes comme les multicouches a déjà fait preuve de nombreux travaux. Différentes approches existent, et en particulier, celles basées sur la recherche d'une plaque équivalente homogène (Equivalent Single Layer Model). Ces dernières comparent le multicouche à une plaque mince dont les paramètres simulent le comportement dynamique du multicouche à une fréquence donnée. La caractérisation du multicouche se fait donc par l'obtention de ces paramètres "équivalents". En particulier, le modèle développé par Guyader [1] est de type plaque mince, se limitant à la caractérisation d'un multicouche isotrope, indépendant du nombre de couches et permettant d'obtenir comme paramètres équivalents, un module d'Young et un amortissement dynamique. A une fréquence donnée, la plaque équivalente présente le même nombre d'onde naturel que le multicouche.*

*En reprenant une méthodologie similaire, nous proposons d'étendre le modèle de Guyader au cas des multicouches orthotropes, par le calcul des différentes rigidités de flexion  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$  solutions de l'équation de dispersion de la plaque mince équivalente orthotrope. Cette méthode permet d'obtenir une représentation des caractéristiques du multicouche sur le plan d'onde  $k_x - k_y$ .*

*Des comparaisons expérimentales (vibrométrie laser) / analytiques seront présentées entre 2 et 8 kHz pour différents cas d'orthotropie, notamment sur des plaques en fibre de carbone, afin d'illustrer les performances de la méthode.*

**Mots clefs : Multicouche, orthotropie, modèle équivalent, composite, comparaisons expérimentales et analytiques**

## 1 Introduction

Cet article aborde la caractérisation des multicouches orthotropes en moyenne et haute fréquence. Alors que la description modale est adaptée pour les basses fréquences, les phénomènes apparaissant à plus hautes fréquences ne peuvent être décrits que par des modèles propagatifs. La caractérisation se concentre alors sur l'identification des paramètres de raideur et d'amortissement du multicouche.

Du point de vue analytique, Love-Kirchhoff expose la déformation en flexion d'une plaque orthotrope par le biais de l'équation de dispersion. Plusieurs hypothèses sont émises au travers de cette équation : la plaque est supposée mince (non prise en compte des déformations suivant l'épaisseur) et le cisaillement est négligé. Pour un multicouche, Love-Kirchhoff ne peut être appliqué que si ses couches sont identiques.

Reissner-Mindlin [2] introduit l'idée de monocouche orthotrope équivalent tout en prenant en compte la déformation suivant l'épaisseur et le cisaillement. Les paramètres dynamiques du monocouche permettent alors au modèle de simuler le comportement dynamique du multicouche.

Par ailleurs, Guyader [1] propose aussi un modèle de monocouche équivalent défini en plaque mince et prenant en compte le cisaillement. Ce modèle permet la caractérisation de multicouche isotrope uniquement.

Du point de vue expérimental, Berthaut [3] utilise un indice appelé IWC (Inhomogeneous Wave Correlation), estimant la corrélation entre un champ vibratoire mesuré sur la plaque et une onde inhomogène fonction des paramètres de propagation. Les caractéristiques de la plaque correspondent aux paramètres de l'onde inhomogène permettant d'obtenir l'IWC maximal.

Cet article propose d'étendre le modèle de Guyader vers un monocouche équivalent orthotrope. Pour cela, un résumé du modèle isotrope sera présenté, puis, l'extension orthotrope sera proposée et enfin, des comparaisons analytiques et expérimentales seront analysées pour différents types de multicouche.

## 2 Modèle de Guyader

Guyader modélise chacune des couches du multicouche en plaque mince tout en prenant en compte les effets de membrane et de cisaillement en plus de ceux de flexion. Ces effets, bien que peu influant en basse fréquence, peuvent l'être à plus haute fréquence et ne sont pas à négliger.

Plusieurs hypothèses sont utilisées dans ce modèle :

- Chaque couche est considérée comme mince et élastique linéaire.
- Selon l'axe transversal, seul le déplacement est considéré.
- La méthode est applicable uniquement à des multicouches isotropes.
- L'inertie, associée aux effets de membrane cisaillement et flexion, est négligée du fait de la faible épaisseur de chaque couche.

Les données d'entrée du modèle sont les caractéristiques de chaque couche, à savoir l'épaisseur  $h_i$ , la masse volumique  $\rho_i$ , le module d'Young  $E_i$ , l'amortissement  $\eta_i$  et le coefficient de Poisson  $\nu_i$ . Puis, en sortie, nous obtenons les caractéristiques de la plaque équivalente :  $h_{tot}$ ,  $\rho_{eq}$ ,  $E_{eq}$ ,  $\eta_{eq}$  et  $\nu_{eq}$ .

À partir de plusieurs relations de couplages entre les plaques, le champ de déplacement de chaque couche est exprimé seulement en fonction de la première couche. Ce modèle ne possède pas de limite quant au nombre de couches à prendre en compte. Ainsi, l'équation du mouvement est appliquée seulement à la

première couche :

$$[I] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{V^1\} + [L] \{V^1\} = 0 \quad (1)$$

$[I]$ , représentant l'énergie cinétique, et  $[L]$ , l'énergie de déformation de toutes les couches du multicouche, sont détaillées par Guyader [4]. Les coefficients de  $[I]$  sont tous nuls (dernière hypothèse) à l'exception de la masse surfacique totale notée  $\rho h$ . Les relations de couplage interviennent alors dans le calcul des coefficients de ces matrices.

Guyader trouve ensuite une solution particulière de l'équation de mouvement. Comme le multicouche est isotrope nous pouvons prendre par exemple une onde se propageant dans la direction  $x$  uniquement, lorsque  $k_y = 0$  et  $k_x = k$  :

$$\{V^1\} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} e^{jkx} e^{j\omega t} \quad (2)$$

Les  $A_i$  étant des constantes non nulles. L'équation du mouvement (1) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 A_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^4 \lambda_1 & -jk^3 \lambda_5 & -jk^3 \lambda_4 & 0 & 0 \\ jk^3 \lambda_5 & k^2 \lambda_3 & k^2 \lambda_6 & 0 & 0 \\ jk^3 \lambda_4 & k^2 \lambda_6 & k^2 \lambda_2 + \lambda_{37} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 \lambda_{26} & k^2 \lambda_{35} \\ 0 & 0 & 0 & k^2 \lambda_{35} & k^2 \lambda_{24} + \lambda_{38} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} = \{0\} \quad (3)$$

Les trois premières équations forment un système linéaire dont le résultat est identifié à un modèle de plaque de Love-Kirchhoff avec la même solution particulière :  $Dk^4 = \rho h \omega^2$  pour finalement trouver la rigidité de flexion équivalente :

$$D = \left( \lambda_1 - \frac{\lambda_5^2}{\lambda_3} \right) - \frac{\left( \lambda_4 - \frac{\lambda_5 \lambda_6}{\lambda_3} \right)^2}{\left( \lambda_2 - \frac{\lambda_6^2}{\lambda_3} \right) k^2 - \lambda_{37}} k^2 \quad (4)$$

Les coefficients  $\lambda_i$  sont contenus dans la matrice  $[L]$  et ont été calculés par Guyader [4] ainsi que Woodcock [5].  $k$  est le nombre d'onde et satisfait l'équation  $k^2 = \sqrt{\left(\frac{\rho h}{D}\right)} \omega$ .

$D$  est ici complexe et sa partie imaginaire permet de trouver l'amortissement de la plaque équivalente  $\eta_{eq} = \frac{Im\{D\}}{Re\{D\}}$ . Pour obtenir les autres caractéristiques de la plaque équivalente à partir de cette rigidité équivalente, il faut définir une masse volumique équivalente et un coefficient de Poisson équivalent au multicouche. Guyader suppose alors les équations suivantes :

$$\rho_{eq} = \frac{\sum \rho_i h_i}{\sum h_i} \quad (5)$$

$$\nu_{eq} = \frac{\sum \nu_i h_i}{\sum h_i} \quad (6)$$

Enfin, le module d'Young équivalent  $E_{eq} = Re\{E_{eq}\}(1 + j\eta_{eq})$  est défini par l'équation :

$$E_{eq} = \frac{12(1 - \nu_{eq}^2)D}{h_{tot}^3} \quad (7)$$

### 3 Extension du modèle pour des multicouches orthotropes

La méthodologie précédente peut être étendue aux multicouches orthotropes. La formulation qui va suivre a été développée dans le cas où les axes d'orthotropie de chaque couche sont parallèle aux bords de la couche.

Maintenant, la plaque équivalente à considérer est orthotrope et suit l'équation de dispersion :

$$D_1 k_x^4 + D_3 k_y^4 + (D_2 + D_4) k_x^2 k_y^2 = \rho h \omega^2 \quad (8)$$

$D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$ , correspondant aux rigidités de flexion définies par :

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad D_2 = \frac{\nu_{yx} E_x h^3}{6(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} = \frac{\nu_{xy} E_y h^3}{6(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad D_3 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad D_4 = \frac{G_{xy} h^3}{3} \quad (9)$$

L'objectif est de trouver  $D_1$ , puis  $D_3$ , et enfin  $D_2 + D_4$  qui sera considérée comme une seule inconnue.

#### 3.1 Calcul des rigidités de la plaque équivalente

Cette fois-ci, la solution particulière à choisir pour résoudre l'équation de mouvement doit être de la forme :

$$\{V^1\} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} e^{jk_x x} e^{jk_y y} e^{j\omega t} \quad (10)$$

Le couple  $(k_x, k_y)$  sera choisi de manière à obtenir trois équations permettant de remonter aux trois rigidités inconnues.

Dans un premier temps, nous choisissons de nous placer en  $k_y = 0$ . La solution particulière et l'équation de dispersion sont alors identiques au cas isotrope. Ainsi,  $D_1$  est égal à  $D$  de l'Eq. (4).

Dans un second temps, nous choisissons de nous placer en  $k_x = 0$  en choisissant une onde solution particulière de (1) orientée à 90°. L'équation (3) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 A_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y^4 \lambda_7 & 0 & 0 & -jk_y^3 \lambda_{11} & -jk_y^3 \lambda_{10} \\ 0 & k_y^2 \lambda_{25} & k_y^2 \lambda_{32} & 0 & 0 \\ 0 & k_y^2 \lambda_{32} & k_y^2 \lambda_{23} + \lambda_{37} & 0 & 0 \\ jk_y^3 \lambda_{11} & 0 & 0 & k_y^2 \lambda_9 & k_y^2 \lambda_{12} \\ jk_y^3 \lambda_{10} & 0 & 0 & k_y^2 \lambda_{12} & k_y^2 \lambda_8 + \lambda_{38} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} = \{0\} \quad (11)$$

De façon similaire au cas précédent, en résolvant le système et en identifiant la solution à l'équation de

dispersion (8) lorsque  $k_x = 0$ ,  $D_3$  est de la forme :

$$D_3 = \left( \lambda_7 - \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_9} \right) - \frac{\left( \lambda_{10} - \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_9} \right)^2}{\left( \lambda_8 - \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_9} \right) k_y^2 - \lambda_{38}} k_y^2 \quad (12)$$

Dans le cas d'orthotropie appelée "elliptique", la méthodologie peut s'arrêter ici puisque les autres rigidités sont liées par l'équation  $D_2 + D_4 = 2\sqrt{D_1 D_3}$ .

Dans le cas d'orthotropie "non elliptique", appelée quelconque, où les rigidités ne sont plus liées entre elle, il est nécessaire d'étendre la méthodologie en considérant une troisième onde, solution particulière de (1) orientée à 45° (lorsque  $k_x = k_y = \frac{\sqrt{2}}{2}k$ ). La nouveauté du modèle réside dans cette troisième approche. L'équation (3) devient alors :

$$\begin{bmatrix} 4\rho h\omega^2 A_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^4 a_1 & -jk^3 a_2 & -jk^3 a_3 & -jk^3 a_4 & -jk^3 a_5 \\ jk^3 a_2 & k^2 a_6 & k^2 a_7 & k^2 a_8 & k^2 a_9 \\ jk^3 a_3 & k^2 a_7 & k^2 a_{10} + \lambda_{37} & k^2 a_{11} & k^2 a_{12} \\ jk^3 a_4 & k^2 a_8 & k^2 a_{11} & k^2 a_{13} & k^2 a_{14} \\ jk^3 a_5 & k^2 a_9 & k^2 a_{12} & k^2 a_{14} & k^2 a_{15} + \lambda_{38} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} = \{0\} \quad (13)$$

Les coefficients  $a_i$  sont détaillés en annexe. Le système obtenu est d'ordre 5 contrairement aux cas deux précédents qui étaient d'ordre 3. De part la complexité de la solution du système, seule une forme généralisée de la solution sera présentée par la suite.

La solution de ce système est identifiée à l'Eq. (8) dans le cas où  $k_x = k_y = \frac{\sqrt{2}}{2}k$  :  $Hk^4 = 4\rho h\omega^2$ ,  $H$  étant la somme des quatre rigidités. Par la suite, cette identification permet d'obtenir une équation de la forme :

$$B_1 H^4 + B_2 H^3 + B_3 H^2 + B_4 H + B_5 = 0 \quad (14)$$

Les coefficients  $B_i$  sont complexes et dépendent des  $\lambda_i$ , de  $\rho$ ,  $h$  et  $\omega$ . Il existe quatre solutions complexes de cette équation dont une seule est positive et correspond à la somme des rigidités. Pour finir,  $D_2 + D_4$  est obtenue en soustrayant  $D_1 + D_3$  à la solution trouvée.

## 3.2 Définition des caractéristiques de la plaque équivalente

La masse volumique équivalente Eq. (5) est supposée identique au cas isotrope. Cependant, le coefficient de Poisson équivalent a été redéfini. En effet, dans le cas orthotrope, il y a deux coefficients de Poisson ( $\nu_{xy}^i$  et  $\nu_{yx}^i$ ) par couche. Le modèle définit alors un coefficient de Poisson général par couche :  $\hat{\nu}_i = \sqrt{\nu_{xy}^i \nu_{yx}^i}$ , puis suppose que :

$$\hat{\nu}_{eq} = \frac{\sum \hat{\nu}_i h_i}{\sum h_i} = \sqrt{\nu_{xy} \nu_{yx}} \quad (15)$$

De plus, la relation  $\nu_{yx} D_1 = \nu_{xy} D_3$  forme avec  $\hat{\nu}_{eq}$  un système permettant d'obtenir les coefficients de Poisson de la plaque équivalente.

Finalement, les modules d'Young et de cisaillement de la plaque orthotrope sont définis par les relations décrites en Eq. (9). Les amortissements sont identifiés comme étant le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle de chaque rigidité.

## 4 Comparaisons analytiques et expérimentales

Afin de valider cette méthode, plusieurs validations expérimentales ont été réalisées sur des multicouches ou monocouche. Les comparaisons suivantes se limitent à la partie réelle des rigidités et donc ne traitent pas de l'amortissement des plaques.

### 4.1 Protocole expérimental : vibromètre laser

Un champ de vitesse a été mesuré, grâce à un vibromètre laser, pour chaque plaque excitée par un pot vibrant. La zone de mesure est quadrillée de points et le vibromètre détermine la vitesse en chaque point  $w(x, y)$  à chaque fréquence. L'excitation est effectuée par un sinus glissant (sweep) sur une plage fréquentielle allant de 2000 à 8000 Hz. Le champ de vitesse est ensuite représenté dans le plan  $k_x - k_y$  par une transformée de Fourier spatiale 2D.

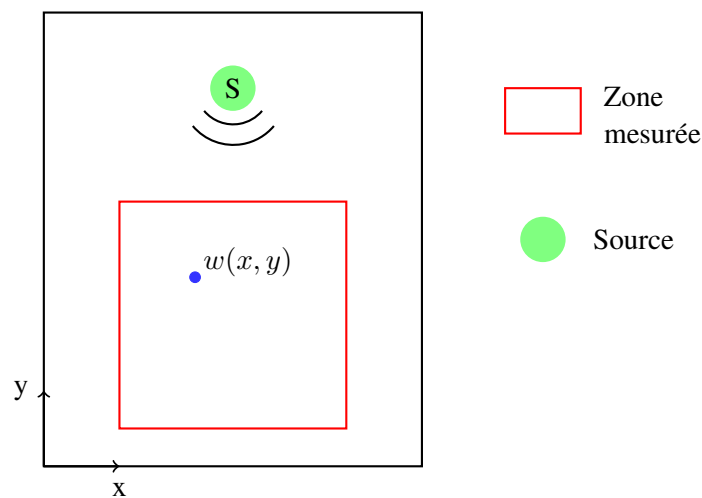


FIGURE 1 – Exemple de schéma de mesure d'une plaque quelconque

Les photos du dispositif expérimental, mis en place pour un multicouche en composite analysé dans la partie 4.4, sont affichées sur la Fig. 2.



FIGURE 2 – Banc de mesure d'un multicouche en composite

Du point de vue analytique, à partir des différentes rigidités de la plaque équivalente, nous pouvons aussi obtenir une représentation spatiale  $k_x - k_y$  du modèle grâce à la relation Eq. (8).

Dans chacun des cas étudiés, la représentation dans le plan d'onde du champ de vitesse mesuré sera comparée à celle que l'on obtient avec le modèle.

## 4.2 Multicouche isotrope : acier - polymère - acier

Dans un premier temps, nous avons étudié le cas d'un multicouche isotrope afin d'analyser le comportement du modèle face à celui-ci. Le multicouche en question a déjà été caractérisé par Ege et al. [6] et est composé de trois couches (acier - polymère - acier) dont les caractéristiques sont présentées dans le Tab. 1.

	$h$ (mm)	$\rho$ ( $kg.m^{-3}$ )	$E$ (GPa)	$\nu$
Acier	0.18	7800	210	0.33
Polymère	0.69	580	0.3	0.33
Acier	0.18	7800	210	0.33

TABLE 1 – Multicouche isotrope : caractéristiques des couches

Ces caractéristiques seront donc considérées comme données d'entrée du modèle.

Ege et al. ont utilisé le modèle de Guyader en isotrope pour caractériser dynamiquement ce multicouche. L'intérêt de cette étude est donc d'étendre cette caractérisation et d'observer la réaction du modèle orthotrope dans le plan d'onde. Voici les profils obtenus par la FFT (sachant que le nombre d'onde naturel de la plaque correspond au maximum d'intensité colorimétrique) et le modèle (courbe noire) à différentes fréquences :

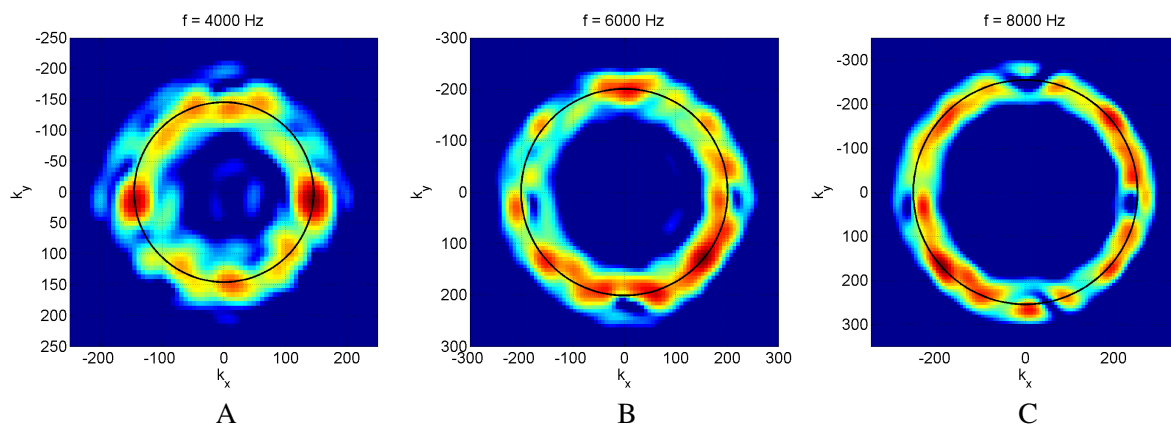


FIGURE 3 – Représentation k-space du multicouche isotrope (– : modèle orthotrope, zone colorée : FFT 2D)

La forme circulaire des profils de mesure obtenus est bien significatif de l'isotropie du multicouche. De plus, le modèle est aussi un cercle, reflétant l'isotropie de la plaque équivalente obtenue et coïncide avec la mesure sur la plage fréquentielle étudiée. Cette étude est donc un cas particulier du modèle orthotrope et un premier cas de validation.



### 4.3 Monocouche orthotrope : bois d'épicéa

Par la suite, pour vérifier le cas orthotrope du modèle, nous avons établi le même protocole expérimental pour plusieurs bois d'épicéa destinés à la facture instrumentale.

Nous allons ici utiliser l'indice de corrélation (IWC) afin d'obtenir les différents modules d'orthotropie à partir du champ de vitesse mesuré. Berthaut [3] ou Charif et al. [7] définissent l'IWC de la manière suivante :

$$IWC(k, \theta, \omega) = \frac{|\sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} w(x_p, y_q) \sigma_{k,\theta}^*|}{\sqrt{\sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} |w(x_p, y_q)|^2 \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} |\sigma_{k,\theta}|^2}} \quad (16)$$

Avec  $\sigma_{k,\theta} = e^{-jk(\theta)(x_p \cos(\theta) + y_q \sin(\theta))}$ .

À chaque fréquence, l'IWC balaye le plan d'onde avec un angle  $\theta \in [0, 2\pi]$ , discrétisé en 30 points et  $k \in [50, 300]$ , discrétisé en 50 points, permettant ainsi d'obtenir, lorsqu'il est maximal selon  $k$ , un  $k_n(\theta, \omega)$  qui correspond au nombre d'onde naturel de la plaque et est solution de l'Eq. (8). Finalement, à chaque fréquence, nous obtenons le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \cos^4(\theta_1) & \sin^4(\theta_1) & \cos^2(\theta_1)\sin^2(\theta_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos^4(\theta_i) & \sin^4(\theta_i) & \cos^2(\theta_i)\sin^2(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{mes} \\ D_3^{mes} \\ D_2^{mes} + D_4^{mes} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho h \omega^2}{k_n(\theta_1, \omega)} \\ \dots \\ \frac{\rho h \omega^2}{k_n(\theta_i, \omega)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Les rigidités de flexion mesurées peuvent être isolées de ce système grâce aux moindres carrés.

À partir de ces rigidités et des caractéristiques de la plaque ( $h = 3mm$  et  $\rho = 441kg/m^{-3}$  ont été mesurés et  $\nu_{xy} = 0.3$  a été fixé), nous pouvons remonter aux modules de la plaque mesuré :  $E_x^{mes}(f)$ ,  $E_y^{mes}(f)$  et  $G_{xy}^{mes}(f)$ , détaillés dans la Fig. 4.

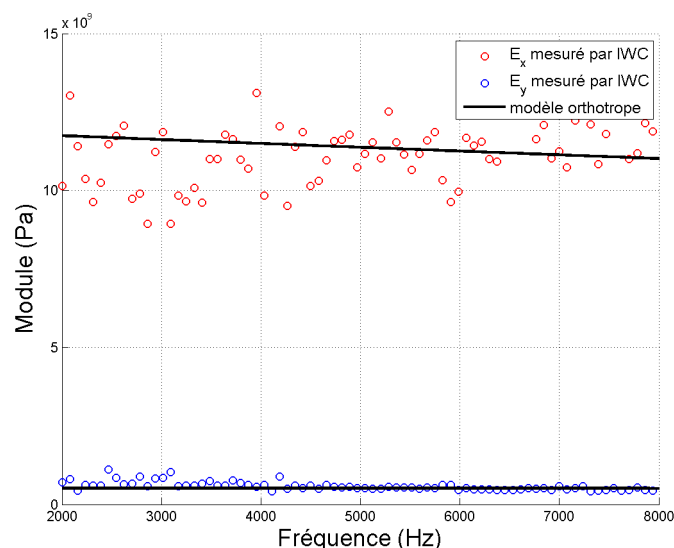


FIGURE 4 – Bois d'épicéa : Modules mesurés par IWC et obtenus par le modèle

Les courbes noires représentent les modules d'Young de la plaque équivalente obtenus avec le modèle.

Le bois n'étant composé que d'une couche et le modèle n'acceptant que deux couches minimum, ce dernier a été simulé comme étant un multicouche composé de deux couches identiques de demi-épaisseur. Afin d'obtenir les paramètres d'entrée optimaux pour notre modèle, nous les avons fait varier indépendamment dans le but d'avoir le minimum d'écart entre les modules de la plaque équivalente obtenus par le modèle et les modules mesurés. Finalement, ces paramètres sont présentés dans le Tab. 2.

$h$ (mm)	$\rho$ ( $kg.m^{-3}$ )	$E_x$ (GPa)	$E_y$ (GPa)	$G_{xy}$ (GPa)	$\nu_{xy}$
1.5	441	11.95	0.52	0.95	0.3

TABLE 2 – Caractéristiques optimales d'une couche du modèle orthotrope pour le bois d'épicéa

Les résultats obtenus par la FFT (en couleur) et par le modèle (courbe noire) avec les caractéristiques sont présentés sur la Fig. 5.

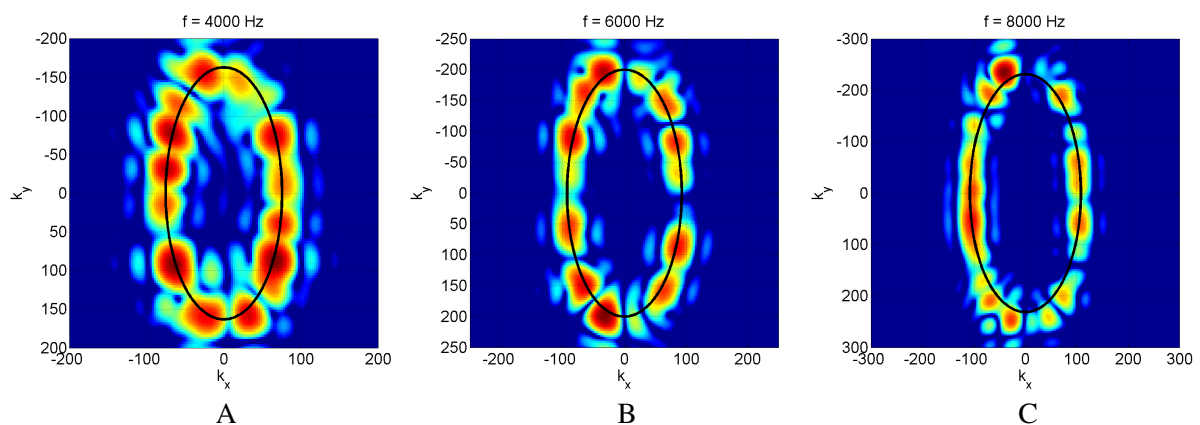


FIGURE 5 – Représentation k-space du bois d'épicéa (– : modèle orthotrope, zone colorée : FFT 2D)

Nous observons une bonne cohérence entre les profils obtenus par la mesure et le modèle, malgré un léger décalage dans le cas C à 8000 Hz pouvant être dû à des erreurs d'approximation des caractéristiques du Tab. (2).

#### 4.4 Multicouche orthotrope : composite

Enfin, une troisième mesure expérimentale a été réalisée sur deux multicouches en composites fabriquées par l'entreprise Hexcel à partir de résine époxy et de fibre de carbone. Le premier multicouche est dit uniforme car il est composé de quatre couches identiques orientées dans le même sens (0-0-0-0). Le deuxième multicouche est dit croisé car il possède les quatre mêmes couches mais les couches centrales sont orientées à 90° par rapport aux couches extérieures (0-90-90-0).

Des patchs visco-élastiques ont été collés autour des multicouches (voir Fig. 2) permettant ainsi de limiter les ondes réfléchies et d'avoir une meilleure cohérence entre le signal d'excitation et celui de mesure.

Dans le cas du multicouche uniforme, la méthode d'analyse est identique à celle du bois d'épicéa. À partir du champ de vitesse mesuré, l'IWC permet d'obtenir le nombre d'onde naturel conduisant aux caractéristiques dynamiques de la plaque. Ensuite, nous avons cherché pour quels paramètres d'entrée l'écart entre le modèle et la mesure est minimum. Ces paramètres sont présentés dans le Tab. 3.

$h$ (mm)	$\rho$ ( $kg.m^{-3}$ )	$E_x$ (GPa)	$E_y$ (GPa)	$G_{xy}$ (GPa)	$\nu_{xy}$
0.187	1540	138.4	9.5	3.4	0.31

TABLE 3 – Caractéristiques optimales d’une couche du modèle orthotrope pour le multicouche uniforme

$h$ ,  $\rho$  ont été mesurés et  $\nu_{xy}$  a été fixé.

Dans le cas du multicouche croisé, le champ de vitesse a aussi permis de remonter aux caractéristiques globales du multicouche grâce à l’indice IWC. L’intérêt du résultat est alors d’observer la réaction du modèle orthotrope dans le cas du multicouche croisé en gardant les caractéristiques du tableau (3) par couche. Voici une comparaison du modèle (courbes noires) et des mesures par IWC (points de couleur) pour les deux multicouches en fonction de la fréquence :

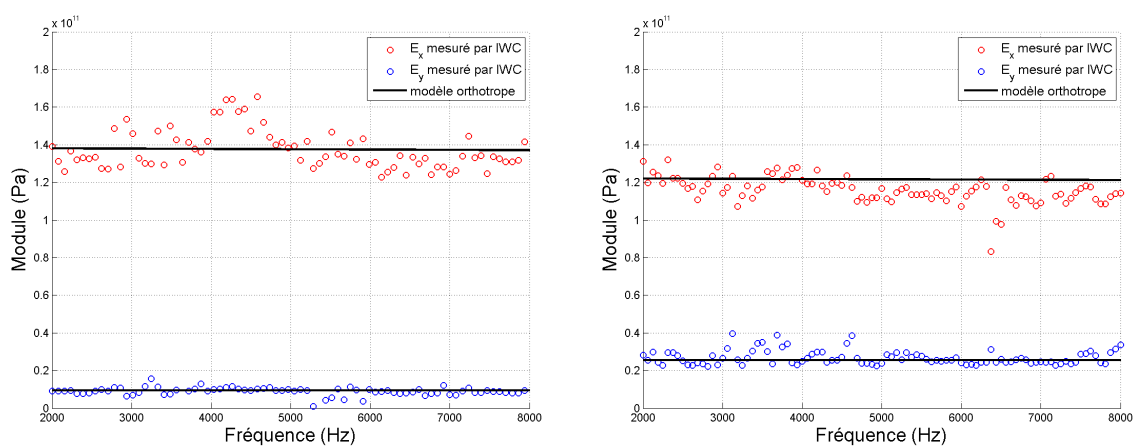


FIGURE 6 – Caractéristiques dynamiques des multicouches composites

Pour le multicouche uniforme, les modules obtenus par le modèle sont centrés par rapport à la mesure puisque c’est la condition que l’on a imposée. Pour le multicouche croisé, nous observons une bonne cohérence entre les modules obtenus par la mesure et le modèle, malgré une légère surestimation en haute fréquence.

Pour compléter, voici une comparaison des plans d’onde des multicouches pour différentes fréquences :

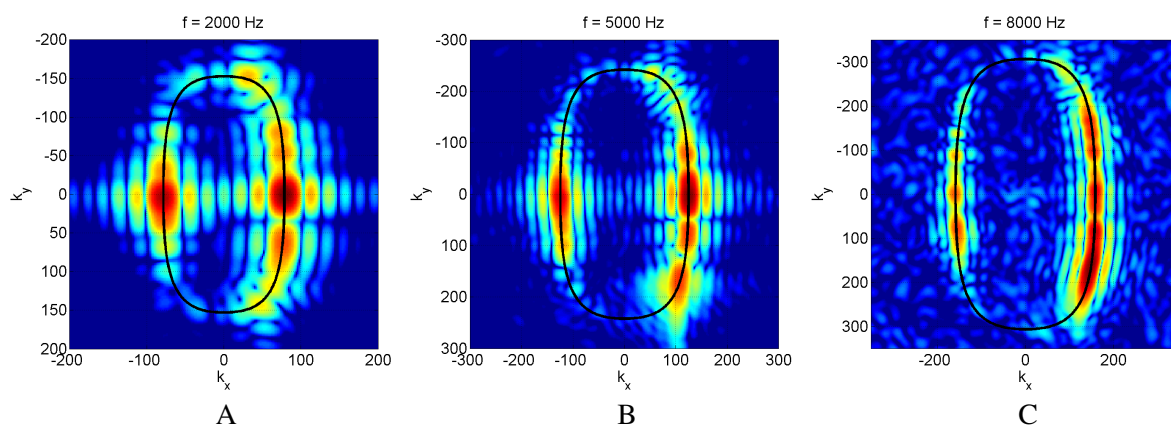


FIGURE 7 – Représentation k-space du multicouche uniforme (– : modèle orthotrope, zone colorée : FFT 2D)

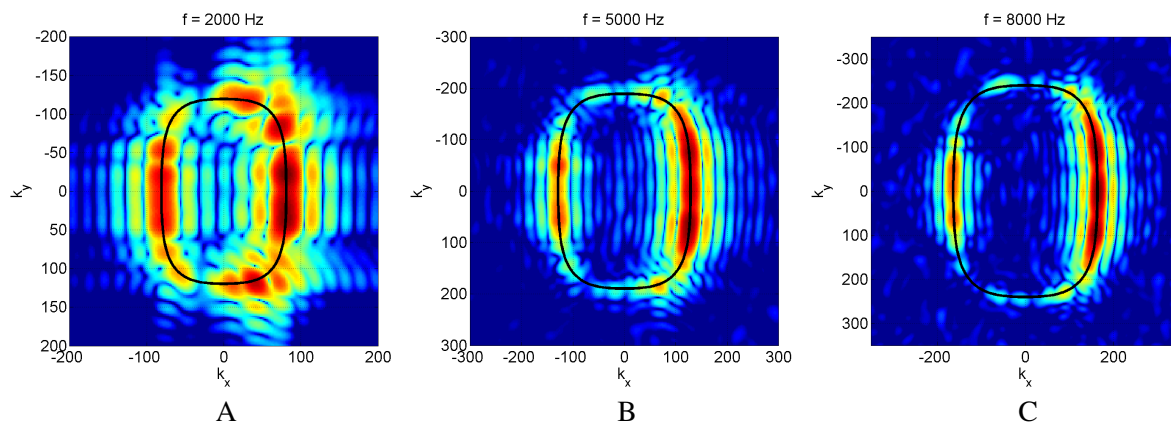


FIGURE 8 – Représentation k-space du multicouche croisé (– : modèle orthotrope, zone colorée : FFT 2D)

Les profils k-space du modèle coïncident parfaitement avec ceux de la mesure pour les deux multicouches. Ce qui signifie qu'à partir des données de chaque couche, la plaque équivalente du modèle a simulé le comportement dynamique des multicouches sur toute la plage fréquentielle.

Finalement, les caractéristiques trouvées expérimentalement diffèrent légèrement de celles du constructeur qui donnait un  $E_x(\text{traction}) = 175 \text{ GPa}$ ,  $E_x(\text{compression}) = 145 \text{ GPa}$ ,  $E_y = 9,6 \text{ GPa}$  et  $G_{xy} = 4.6 \text{ GPa}$ . Cela peut-être dû à la non-uniformité du matériau et à une différence entre un module d'Young mesuré en traction/compression par le constructeur et un module d'Young de flexion obtenu par les mesures dynamiques.

## 5 Conclusion

La prise en compte de l'orthotropie dans modèle de plaque équivalente de Guyader est concluante pour les diverses mesures réalisées à ce jour. Le cas particulier de multicouche isotrope est bien respecté par le modèle. L'étude de multicouches en composite a permis d'observer l'efficacité du modèle quant à la prédiction du comportement dynamique de structure complexe (multicouche avec des fibres croisées). La caractérisation de bois d'épicéa destiné à la facture instrumentale a aussi pu être obtenu par le modèle.

Par la suite, la mise en place d'un protocole expérimental (notamment avec l'outil d'analyse CFAT (Corrected Force Analysis Technique) développé par Leclère et al. [8], appliqué au cas orthotrope), permettra d'obtenir des comparaisons et de conclure quant à la validité du modèle du point de vue de l'amortissement.

De plus, la prise en compte d'un angle d'orthotropie par couche pourra aussi être introduit dans le modèle. La suppression de l'hypothèse de plaque mince pourra aussi faire preuve de réflexion, notamment avec une plaque équivalente non plus identifiée au modèle de Love-Kirchhoff mais à celui de Reissner-Mindlin.

## Remerciements

Nous remercions l'entreprise "Hexcel" de nous avoir fourni les plaques en composite mesurées dans cet article.

## Références

- [1] J.L. Guyader, C. Cacciolati, Viscoelastic properties of single layer plate material equivalent to multi-layer composites plate, *Internoise*, 2007.
- [2] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, New York, (1951) 31-38.
- [3] J. Berthaut, M.N. Ichchou, L. Jezequel, K-space identification of apparent structural behaviour, *Journal of Sound and Vibration*, 280 (2005) 1125-1131.
- [4] J.L. Guyader, C. Lesueur, Acoustic transmission through orthotropic multilayered plates, part 1 : plate vibration modes, *Journal of Sound and Vibration*, 58(1) (1978) 51-68.
- [5] R.L. Woodcock, Free vibration of advanced anisotropic multilayered composites with arbitrary boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 312 (2008) 769-788.
- [6] K. Ege, V. Henry, Q. Leclère, R.G. Rinaldi, C. Sandier, Vibrational behavior of multi-layer plates in broad-band frequency range : comparisons between experimental and theoretical estimations, *Internoise*, 2015.
- [7] R. Cherif, J.D. Chazot, Noureddine Atalla Damping loss factor estimation of two-dimensional orthotropic structures from a displacement field measurement, *Journal of Sound and Vibration*, 356 (2015) 61-71.
- [8] Q. Leclère, F. Ablitzer, C. Pézerat, Practical implementation of the Corrected Force Analysis Technique to identify the structural parameter and load distributions, *Journal of Sound and Vibration*, 351 (2015) 106-118.

## Annexe

Définition des coefficients  $a_i$  :

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_7 + 2\lambda_{13} + \lambda_{22},$$

$$a_2 = \sqrt{2}(\lambda_5 + \lambda_{19} + \lambda_{29}),$$

$$a_3 = \sqrt{2}(\lambda_4 + \lambda_{16} + \lambda_{27}),$$

$$a_4 = \sqrt{2}(\lambda_{11} + \lambda_{15} + \lambda_{30}),$$

$$a_5 = \sqrt{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14} + \lambda_{28}),$$

$$a_6 = 2(\lambda_3 + \lambda_{25}),$$

$$a_7 = 2(\lambda_6 + \lambda_{32}),$$

$$a_8 = 2(\lambda_{21} + \lambda_{36}),$$

$$a_9 = 2(\lambda_{20} + \lambda_{34}),$$

$$a_{10} = 2(\lambda_2 + \lambda_{23}),$$

$$a_{11} = 2(\lambda_{18} + \lambda_{33}),$$

$$a_{12} = 2(\lambda_{17} + \lambda_{31}),$$

$$a_{13} = 2(\lambda_9 + \lambda_{26}),$$

$$a_{14} = 2(\lambda_{12} + \lambda_{35}),$$

$$a_{15} = 2(\lambda_8 + \lambda_{24})$$