



Modélisation par éléments finis du contact roue/rail non stationnaire dans un repère Eulérien : résultats et validation

Van, Vuong Lai, Olivier Chiello, Dufrénoy Philippe, Jean-François Brunel

► To cite this version:

Van, Vuong Lai, Olivier Chiello, Dufrénoy Philippe, Jean-François Brunel. Modélisation par éléments finis du contact roue/rail non stationnaire dans un repère Eulérien : résultats et validation. CFM 2017 - 23ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2017, Lille, France. hal-03465758

HAL Id: hal-03465758

<https://hal.science/hal-03465758>

Submitted on 3 Dec 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation par éléments finis du contact roue/rail non stationnaire dans un repère Eulérien : résultats et validation

V.-V. LAI^{a,b}, O. CHIELLO^{b,c}, J.-F. Brunel^b, P. Dufrénoy^b

a. LML, Université de Lille 1, France, {van-vuong.lai, Jean-francois.brunel, philippe.dufrenoy}@polytech-lille.fr

b. IFSTTAR, AME, LAE, Bron, France, {van-vuong.lai, olivier.chiello}@ifsttar.fr

c. CeLyA, Université de Lyon, France

Résumé :

Ce papier s'inscrit dans le cadre de recherches visant à réduire le bruit de contact roue/rail émis par les véhicules ferroviaires. En courbe de faible rayon, en plus du bruit de roulement large bande généré par les irrégularités des surfaces en contact, un bruit de crissement peut apparaître. Ce bruit est généralement attribué à des vibrations auto-entretenues dues au glissement latéral de la roue sur la tête du rail. Le phénomène entraîne des oscillations de type adhérence/glissement et dépend des conditions de frottement. La modélisation de ces vibrations nécessite de bien reproduire la dynamique non linéaire du frottement de roulement dans la zone de contact. On propose d'effectuer ce calcul dans un repère eulérien en utilisant une méthode combinant éléments finis, discrétisation de la surface de contact et contact frottant non régularisé. Les résultats sont en bon accord avec des lois analytiques dans des cas académiques sans instabilité.

Abstract :

This paper is part of the research framework to reduce the noise of wheel / rail contact emitted by railway vehicles. In the case of a small radius curve, in addition to the broadband rolling noise generated by the irregularities of the surfaces in contact, a squealing noise may appear. This noise is generally attributed to self-sustained vibrations due to lateral sliding of the wheel on the head of the rail. The phenomenon results in oscillations of the adhesion / slip type and depends on the friction conditions. The modeling of these vibrations requires the nonlinear dynamics of the bearing friction to be well reproduced in the contact zone. It is proposed to carry out this calculation in an Eulerian frame using a method combining finite elements, discretization of the contact surface and unregulated frictional contact. The results are in good agreement with analytical laws in academic cases without instability.

Mots clefs : Contact roue/rail, vibration.

1 Introduction

Les problèmes de confort acoustique et de protection sonore de l'environnement et des usagers sont de plus en plus sensibles dans l'exploitation des matériels ferroviaires. Le contact roue-rail conduit essentiellement à deux types de bruit [1] : le bruit de roulement et le bruit de crissement. Le bruit de crissement intervient dans des courbes à faible rayon [2,3] et constitue une gêne importante pour les usagers du transport mais aussi pour les riverains. Il correspond à un bruit intense caractérisé par un spectre de raies à relativement haute fréquence (de l'ordre du kHz) [1,4,5]. Les réseaux de tramways et de métro sont fortement concernés. Ce problème du bruit demeure un problème scientifique complexe en raison des nombreuses interactions physiques mises en jeu (mécanique, acoustique, tribologique, etc.) et de la difficulté à identifier et à maîtriser la source d'excitation. De nombreuses études ont été entreprises afin

de comprendre les mécanismes d'apparition du crissement. Il est acquis que le crissement est dû à l'excitation de certains modes propres de la roue par un phénomène d'instabilité vibratoire lié au frottement roue/rail dans la courbe. Deux difficultés demeurent néanmoins : la détermination de la nature de cette instabilité et de ces conditions d'occurrence, ainsi que la raison de l'excitation de certains modes plutôt que d'autres [5–12]. Ce papier s'inscrit dans le cadre de recherches visant à améliorer ces modèles de bruit de crissement en courbe. Dans cette optique, on souhaite développer des méthodes de calcul performantes de la dynamique du contact roue/rail en roulement et contact frottant en courbe. La stratégie de simulation numérique consiste à utiliser une méthode élément finis complète pour ce problème.

En effet, pour le calcul quasi-statique et dynamique par éléments finis du contact roue/rail en frottement de roulement, il existe principalement deux types de modèle. Le modèle de contact ponctuel se base sur des formules analytiques qui sont des lois heuristiques de contact frottant [13, 14]. Elles sont bien adaptées au calcul quasi-statique avec surfaces lisses, même dans le cas de forts glissements. Dans les cas dynamiques faiblement non linéaires (proches du roulement pur) des raideurs et amortissements ponctuels équivalents peuvent être utilisés et donnent de bons résultats, en particulier pour la modélisation du bruit de roulement [1]. Dans les autres cas (glissements importants avec une contribution de la dynamique), les modèles de contact surfacique, où la zone de contact est discrétisée sont plus adaptés. La théorie variationnelle de Kalker [14] implémentée dans le programme CONTACT est le modèle de ce type le plus utilisé. Toutefois, un certain nombre de simplifications sont généralement effectuées dans ces modèles (hypothèses de massif semi-infini, découplage contact et frottement). Se pose donc la question de l'impact de ces simplifications dans le cas des vibrations en courbes ou se mêlent instabilités de frottement et excitation par les irrégularités de surface (à différentes échelles). La méthode des éléments finis permet de simuler le contact roue/rail en présence de frottement à l'aide de logiciels commerciaux [15] mais le calcul reste généralement non-stationnaire, ce qui en limite fortement les performances et ne permet pas une utilisation en dynamique hautes fréquences.

Dans ce papier, on propose une simulation quasi-statique et dynamique du contact roue/rail par la méthode des éléments finis, avec discrétisation de la surface de contact. L'approche est réalisée autour de la position stationnaire, dans un repère eulérien. Des lois de contact unilatéral et de frottement de Coulomb sont utilisées. Une formulation faible sur Lagrangien augmenté et une résolution par un algorithme de point fixe permet au final d'aboutir à des temps de calcul raisonnables.

2 Problème de référence

On considère le contact roue/rail avec le repère de référence en Figure 1. La direction x est la direction longitudinale de roulement le long du rail. La direction y est la direction latérale. La direction z est la direction verticale qui pointe vers la surface de la tête du rail. Sans glissement ni déformation, les particules de chaque surface potentielle en contact s'écoulent à travers zone de contact avec la vitesse V de roulement suivant x . Dans le repère Eulérien, le matériau est en mouvement mais les déplacements restent fixes dans l'espace.

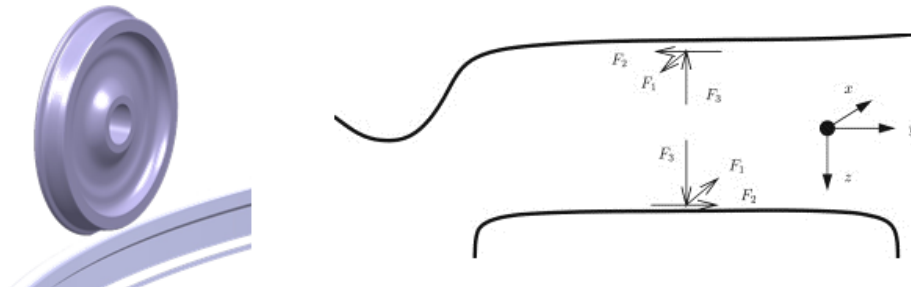


FIGURE 1 – Modèle roue/rail et repère de référence du modèle d'interaction roue/rail [11]

Le mouvement global relatif entre la roue et le rail est imposé par le glissement longitudinal s_{xo} , le glissement latéral s_{xy} et le glissement de spin $s_{\omega o}$ tels que [16] :

$$s_{xo} = \frac{V_x^W - V_x^R}{V} = \frac{\delta V_x}{V} \quad (1)$$

$$s_{yo} = \frac{V_y^W - V_y^R}{V} = \frac{\delta V_y}{V} \quad (2)$$

$$s_{\omega o} = \frac{\omega_z^W - \omega_z^R}{V} = \frac{\delta \omega_z}{V} \quad (3)$$

où les indices W et R font référence à la roue et au rail tandis que V_x , V_y et ω_z dénotent les vitesses suivant x et y et la vitesse de rotation autour de l'axe z .

La vitesse des éléments matériels est influencée à la fois par le mouvement global relatif imposé et l'état de déformation. En notant $u_x(M, t)$ et $u_y(M, t)$ les composantes suivant x et y du déplacement en un point M de la surface de contact roue/rail potentielle, les vitesses de glissement relatives au contact sont données par [17] :

$$v_x^W - v_x^R = \delta V_x - \delta \omega_o y + V \left(\frac{\partial u_x^W}{\partial x} - \frac{\partial u_x^R}{\partial x} \right) + (\dot{u}_x^W - \dot{u}_x^R) \quad (4)$$

$$v_y^W - v_y^R = \delta V_y + \delta \omega_o x + V \left(\frac{\partial u_y^W}{\partial x} - \frac{\partial u_y^R}{\partial x} \right) + (\dot{u}_y^W - \dot{u}_y^R) \quad (5)$$

L'état de contact en un point M dépend des vitesses matérielles relatives définies ci-dessus : adhérence si elles sont nulles et glissement si elles sont non nulles.

Les glissements relatifs roue/rail sont quant à eux définis par :

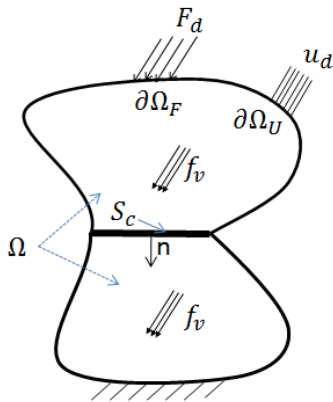
$$\dot{s}_x = \frac{v_x^W - v_x^R}{V} = s_{xo} - s_{\omega o} y + \left(\frac{\partial u_x^W}{\partial x} - \frac{\partial u_x^R}{\partial x} \right) + V(\dot{u}_x^W - \dot{u}_x^R) \quad (6)$$

$$\dot{s}_y = \frac{v_y^W - v_y^R}{V} = s_{yo} + s_{\omega o} x + \left(\frac{\partial u_y^W}{\partial x} - \frac{\partial u_y^R}{\partial x} \right) + V(\dot{u}_y^W - \dot{u}_y^R) \quad (7)$$

Dans le cas de roulement quasi-statique, les termes transitoires peuvent être négligés et l'état du système ne dépend plus de la vitesse de roulement mais uniquement des glissements imposés.

3 Choix retenus pour la simulation temporelle en présence de contact frottant

On considère le problème de mécanique des milieux continus des deux solides élastiques en situation de contact unilatéral avec frottement sous l'hypothèse de petites déformations comme illustré sur la figure 2.



Notations	Champs
$\underline{u}(\underline{x}, t)$	champ de déplacement dans Ω
$\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$	champ de contrainte dans Ω
$\underline{r}(\underline{x}, t)$	réaction de contact sur la surface de contact S_c
A	tenseur de Hooke
f_v	force volumique
F_d	force surfacique
u_d	déplacement imposé
$\underline{\varepsilon}$	déformation

FIGURE 2 – Notations

3.1 Lois de contact

Le contact frottant est modélisé à l'aide des lois de contact unilatéral (Signorini) et de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement constant μ . Ces lois peuvent s'écrire sous des formes de projection à l'aide de paramètres d'augmentation [18].

$$\begin{cases} r_n = \text{Proj}_{\mathbb{R}^-}(r_n - \rho_n u_n) & \forall \rho_n > 0 \\ r_t = \text{Proj}_{C(\mu r_n)}(r_t - \rho_t \dot{s}_t) & \forall \rho_t > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Dans ces équations, r_n et r_t dénotent la réaction normale et la force de frottement dans le plan tangent tandis que u_n et $\dot{s}_t$ représentent respectivement le jeu normal et le vecteur de glissement relatif de composantes $\dot{s}_x$ et $\dot{s}_y$. ρ_n et ρ_t sont les coefficients d'augmentation, $\text{Proj}_{\mathbb{R}^-} \langle \cdot \rangle$ désigne la partie négative de $\langle \cdot \rangle$ et $\text{Proj}_{C(\mu r_n)} \langle \cdot \rangle$ est la projection sur le cône de Coulomb $C(\mu r_n)$ de $\langle \cdot \rangle$.

3.2 Formulation variationnelle et discrétisation

Pour les lois locales choisies, une des formulations variationnelles adaptée est le Lagrangien augmenté [19]. Dans le milieu continu, le problème est de trouver le déplacement $\underline{u} \in \mathcal{U} = \{\underline{u} | u = u_d \text{ sur } \partial\Omega_u\}$ et les réactions de contact $\underline{r}$ vérifiant :

$$\int_{\Omega} \rho u^* \cdot \ddot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \underline{\sigma}(\underline{u}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \underline{u}^* \cdot \underline{F}_d dS + \int_{S_c} \underline{u}^* \cdot \underline{r} dS \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^0 \quad (9)$$

avec $\mathcal{U}^0 = \{\underline{u} | u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u\}$

Les lois de Signorini et de frottement de Coulomb (8) exprimées sous forme augmentée peuvent également s'écrire sous forme faible :

$$\int_{S_c} u_n^* \cdot r_n dS = \int_{S_c} u_n^* \cdot \text{Proj}_{\mathbb{R}^-}(r_n - \rho_n u_n) dS \quad \forall \rho_n > 0 \quad \forall u_n^* \quad (10)$$

$$\int_{S_c} \dot{s}_t^* \cdot r_t dS = \int_{S_c} \dot{s}_t^* \cdot \text{Proj}_{C(\mu r_n)}(r_t - \rho_t \dot{s}_t) dS \quad \forall \rho_t > 0 \quad \forall \dot{s}_t^* \quad (11)$$

Pour la discrétisation, on utilise des maillages compatibles sur l'interface et des fonctions d'interpolation linéaires pour éviter les phénomènes d'oscillation des réactions de contact dans la solution transitoire [19]. Après la discrétisation des équations (9, 10, 11), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{H}_n \mathbf{R}_n + \mathbf{H}_t \mathbf{R}_t \\ \mathbf{H}_n \mathbf{R}_n = \int_{S_c} \mathbf{N}_n^T \text{Proj}_{\mathbb{R}^-}(\mathbf{N}_n(\mathbf{R}_n - \rho_n \mathbf{U}_n)) dS \\ \mathbf{H}_t \mathbf{R}_t = \int_{S_c} \mathbf{N}_t^T \text{Proj}_C(\mathbf{N}_t(\mathbf{R}_t - \rho_t \dot{\mathbf{s}}_t)) dS \end{cases} \quad (12)$$

Dans ces équations, $\mathbf{N}_n$ et $\mathbf{N}_t$ dénotent les vecteurs des fonction d'interpolation normales et tangentielles sur l'interface, $\mathbf{H}_n = \int_{S_c} \mathbf{N}_n^T \mathbf{N}_n dS$, $\mathbf{H}_t = \int_{S_c} \mathbf{N}_t^T \mathbf{N}_t dS$ et $\dot{\mathbf{s}}_t = \mathbf{s}_{t0} + \mathbf{B}_1 \mathbf{U} + \frac{1}{V} \mathbf{B}_2 \dot{\mathbf{U}}$ est le vecteur nodal des glissements définis dans (6) et (7).

La résolution dynamique nécessite de passer à une formulation du contact en vitesse, par exemple en utilisant la technique *Level-Sets* basée sur le modèle Signorini-Moreau [20] pour introduire les chocs. Cependant la formulation (12) peut aussi décrire des chocs inélastiques en utilisant un schéma d'intégration temporel adapté (cf.ci-dessous).

3.3 Intégration temporelle et résolution non linéaire

Pour l'intégration numérique des équations non-régulières, on choisit un schéma du premier ordre implicite (θ méthode modifiée) [18]. A chaque pas de temps, la résolution consiste à condenser le système sur les degrés de liberté de contact et à utiliser un algorithme de point fixe sur les réactions de contact, adapté à l'écriture des lois de contact sous forme augmentée.

La convergence de l'algorithme est linéaire et dépend du choix des paramètres d'augmentation ρ_n et ρ_t avec une jacobienne du système fixe, par rapport aux méthodes de type Newton. Une unique factorisation de la matrice de l'intégrateur condensé est nécessaire.

4 Mise en œuvre et validation de la méthode

On présente ici la mise en œuvre et la validation de la méthodologie proposée en quasi-statique d'abord dans le cas d'un contact cylindre/cylindre en 2D puis dans le cas d'un contact cylindre/cylindre en 3D.

4.1 Contact cylindre/cylindre en 2D

On considère le modèle de Carter qui traite du contact entre deux cylindres (Figure 3) en déformation plane. Le comportement du matériau est élastique. Une force verticale de 141 kN résulte d'un déplacement vertical de 0.22 mm appliqué au centre du cylindre 2. Dans le repère eulérien, les moyeux des cylindres sont fixés. Un glissement longitudinal s_{x0} est imposé au niveau de l'interface.

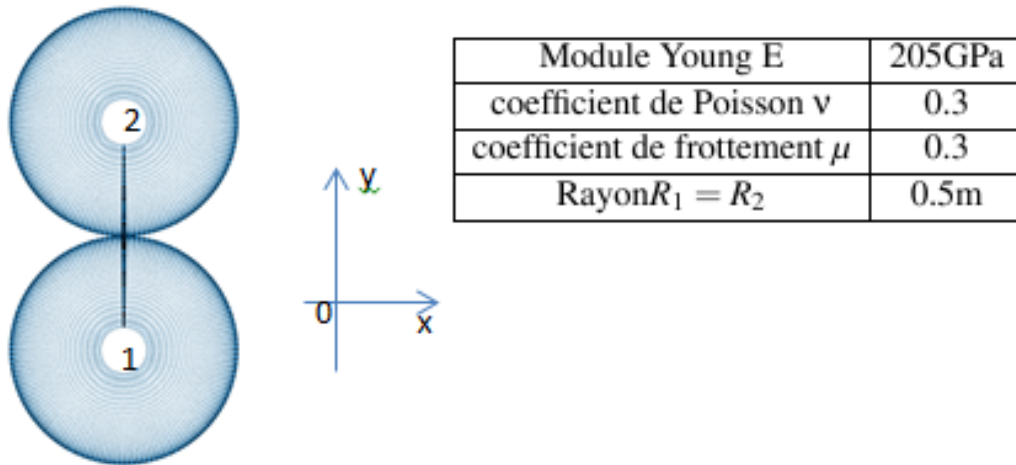


FIGURE 3 – Problème de Carter : contact entre deux cylindres avec des données

L'état de la zone de contact – adhérence, glissement partiel ou glissement total – dépend de l'amplitude du glissement. Pour comparaison, la solution théorique se trouve dans [17] et une simulation éléments finis dans [15]. Les figures 4 et 5 présentent les distributions des contraintes tangentielles dans la zone de contact pour 3 glissements longitudinaux obtenues, permettant de retrouver les trois états de contact classiques :

- $s_{x0} = 0$: adhérence (Figure 4)
- $0 < s_{x0} < \frac{2\mu a}{R}$: Glissement partiel (Figure 5) avec a : demi-largeur de la zone de contact R^* : courbure composite
- $s_{x0} > \frac{2\mu a}{R}$: Glissement total (Figure 5)

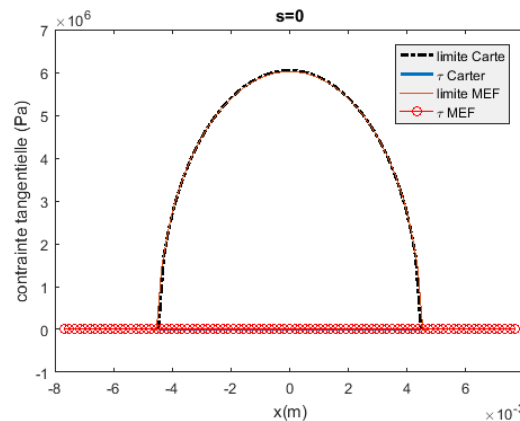


FIGURE 4 – Contraintes tangentielles dans la zone de contact en roulement pur $s_{x0} = 0$

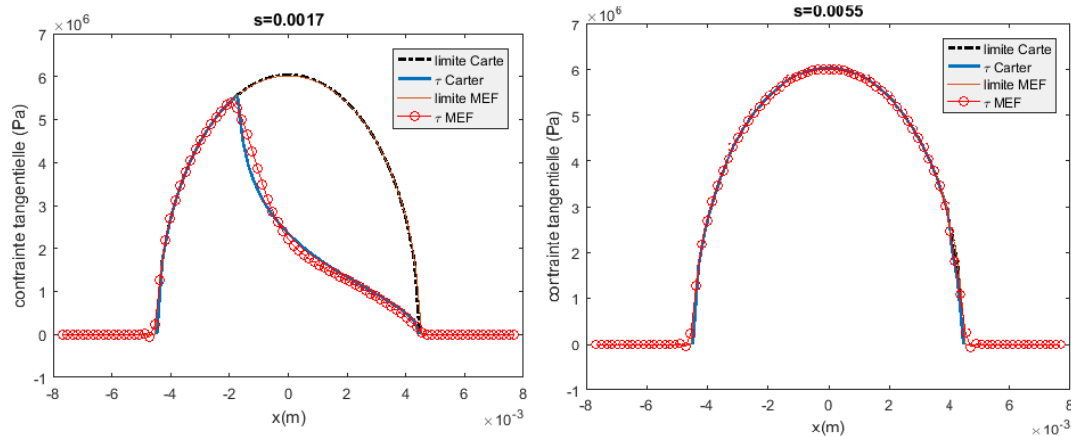


FIGURE 5 – Contraintes tangentiels dans la zone de contact en glissement partiel $s_{x0} = 0.0017$ (gauche) et glissement total $s_{x0} = 0.0055$ (droit)

Les résultats sont en accord avec ceux obtenus par l'approche analytique développée par Carter. A noter, un léger écart dans la phase de transition entre l'adhérence et le glissement dans le cas du glissement partiel que l'on retrouve également dans [15].

4.2 Extension au contact cylindre/cylindre en 3D

La simulation quasi-statique est étendue au cas du contact cylindre/cylindre en 3D (Figure 6) avec le même comportement matériau que le cas précédent. L'épaisseur des deux cylindres est de 0.1 m. Une courbure latérale aux deux cylindres est introduite en changeant la géométrie locale (2). Le maillage de la structure est non-structuré (éléments C3D8 pour la zone potentielle de contact et C3D4 pour la structure restante) pour réduire le nombre de degrés de liberté. Une force verticale de 42000 N est appliquée au moyeu d'un cylindre en imposant un déplacement vertical de 0.07 mm. Des glissements relatifs sont imposés au niveau de l'interface. En quasi-statique, l'état de contact dépend du glissement imposé. Les théories de contact ponctuel roue/rail [13, 14] et le programme CONTACT permettent de valider des résultats.

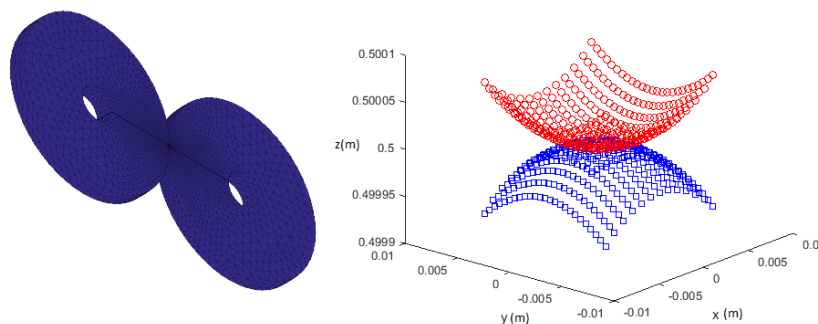
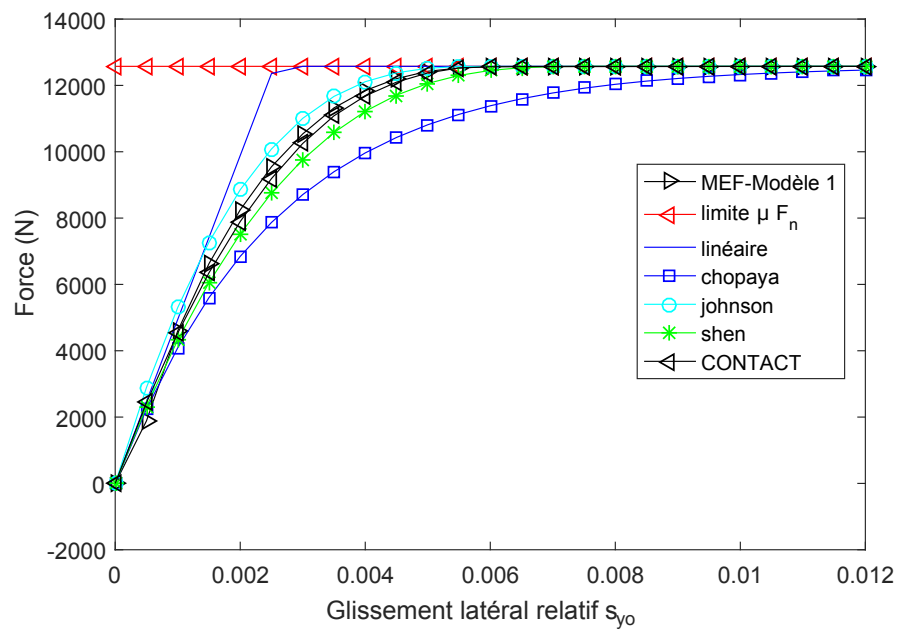
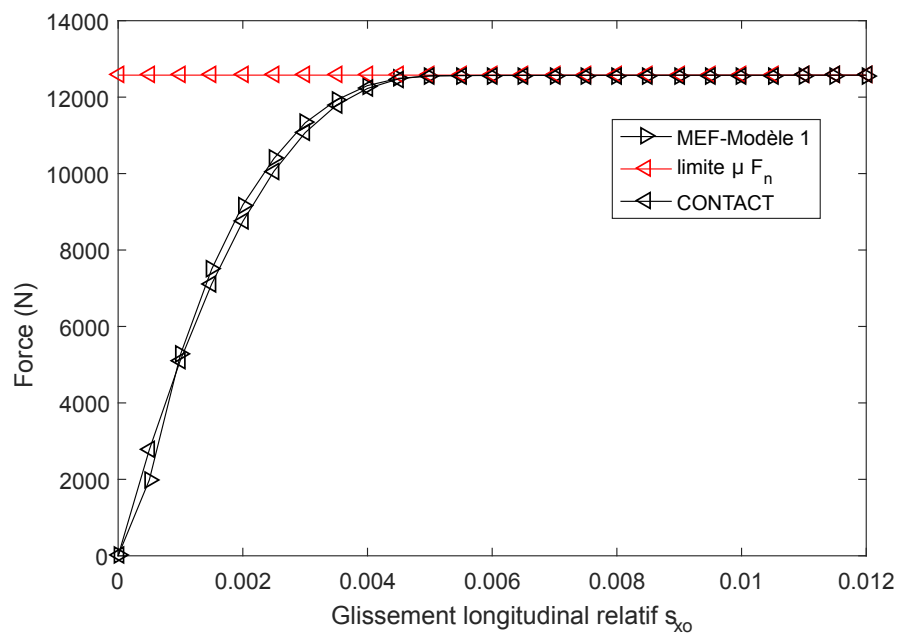
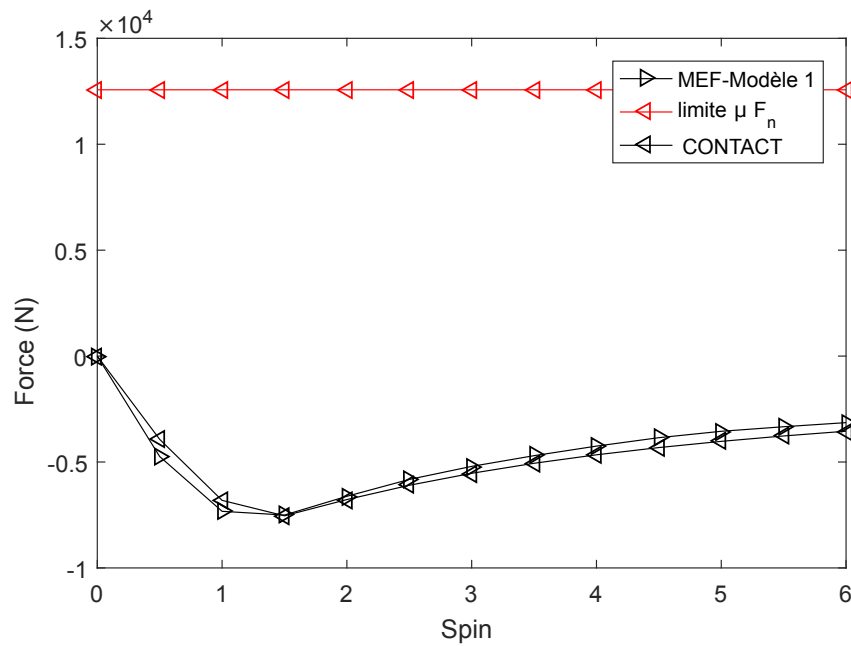
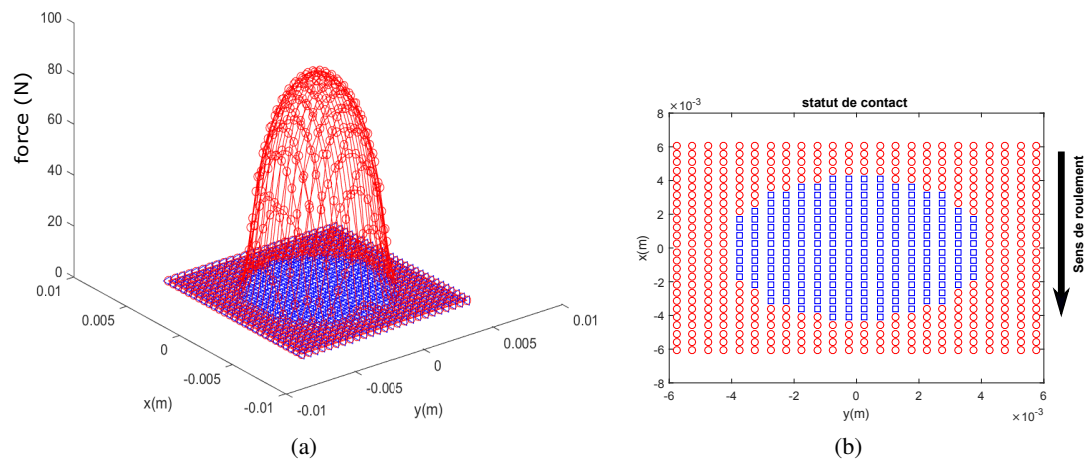
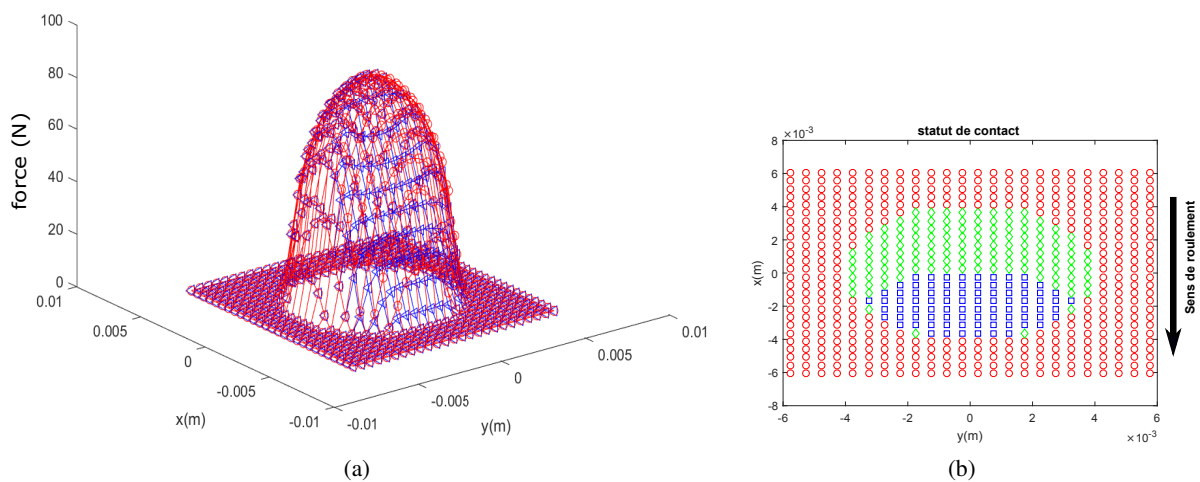


FIGURE 6 – Contact entre deux cylindres en 3D (gauche) et zone de contact (droit)

Les courbes de saturation de la résultante des forces de frottement en fonction du glissement latéral, longitudinal et du spin sont présentées respectivement sur les Figures 7, 8 et 9. Les résultats obtenus sont comparés aux différents résultats disponibles dans la littérature et ceux du programme CONTACT.

La distribution des forces de frottement nodales et l'état de contact dans la zone de contact sont illustrés sur les figures Figure 10, Figure 11 et Figure 12 pour les trois cas typiques de glissement latéral : roulement pur ($s_y = 0$), glissement partiel ($s_y = 0.3\%$) et glissement total ($s = 0.01\%$). Une force verticale de 42000 N est appliquée au moyeu d'un cylindre en imposant un déplacement vertical de 0.07 mm.

FIGURE 7 – Résultant des forces de frottement en fonction du glissement latéral imposé s_{y0} FIGURE 8 – Résultant des forces de frottement en fonction du glissement longitudinal imposé s_{x0}

FIGURE 9 – Résultant des forces de frottement en fonction du glissement de spin imposé $s_{\omega 0}$ FIGURE 10 – a : Distribution des forces de frottement (rouge : limite μF_n , bleu : $\|F_t\|$) et b : Statut de contact (rouge : pas de contact , bleu : adhérence) dans le cas de roulement pur $s_{y0} = 0$ FIGURE 11 – a : Distribution des forces de frottement (rouge : limite μF_n , bleu : $\|F_t\|$) et b : Statut de contact (rouge : pas de contact , bleu : adhérence, vert : glissement) dans le cas de glissement partiel $s_{y0} = 0.3$

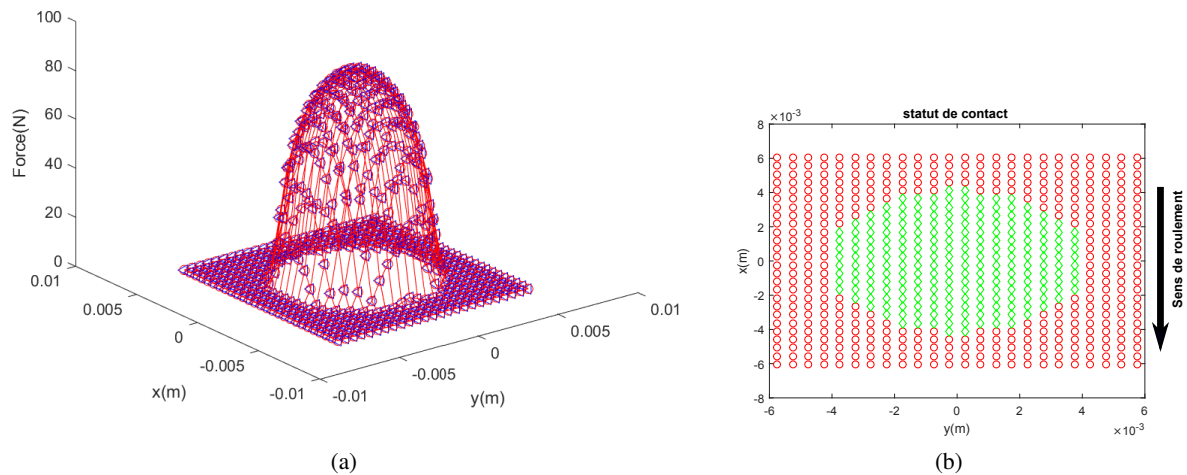


FIGURE 12 – a : Distribution des forces de frottement (rouge : limite μF_n , bleu : $\|F_t\|$) et b : Statut de contact (rouge : pas de contact ,vert : glissement) dans le cas de glissement complet $s_{y0} = 1\%$

5 Conclusion

Une méthode permettant la simulation dynamique du contact roue/rail en courbe a été proposée. Le calcul est effectué dans un repère eulérien en utilisant une méthode combinant éléments finis, discrétisation de la surface de contact et contact frottant non régularisé. Les résultats sont en bon accord avec des lois analytiques dans des cas académiques sans instabilité. La méthode va ensuite être utilisée pour modéliser les vibrations auto-entretenues conduisant au crissement dans des cas plus réalistes avec instabilités.

Références

- [1] D. Thompson. *Railway noise and vibration : mechanisms, modelling and means of control*, Elsevier, 2008.
- [2] M.J. Rudd. *Wheel/rail noise-Part II : Wheel squeal*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 381-394, 1976.
- [3] P.J. Remington. *Wheel/rail squeal and impact noise : What do we know ? What don't we know ? Where do we go from here ?*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 339-353, 1987.
- [4] N.Vincent, J.R.Koch, H.Chollet, J.Y.Guerder. *Curve squeal of urban rolling stock—Part 1 : State of the art and field measurements*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 691-700, 2006.
- [5] C.Glocker, E.Cataldi-Spinola, R.I.Leine. *Curve squealing of trains : Measurement, modelling and simulation*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 365-386, 2009.
- [6] M.A. Heckl, I.D. Abrahams. *Curve squeal of train wheels, part 1 : mathematical model for its generation*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 669-693, 2000.
- [7] M.A.Heckl. *curve squeal of train wheels, Part 2 : Which wheel modes are prone to squeal ?*, Journal of sound and vibration, Elsevier, 695-707, 2000.
- [8] J.R.Koch, N.Vincent, H.Chollet, O.Chiello *Curve squeal of urban rolling stock—Part 2 : Parametric study on a 1/4 scale test rig*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 701-709, 2006.
- [9] O.Chiello, J.B.Ayasse, N.Vincent, J.R.Koch *Curve squeal of urban rolling stock—Part 3 : Theoretical model*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 710-727, 2006.
- [10] J.F. Brunel, P.Dufrénoy, M.Naït, J.L. Muñoz, F.Demilly. *Transient models for curve squeal noise*, Journal of sound and vibration, Elsevier, 758-765, 2006.
- [11] A.Pieringer. *A numerical investigation of curve squeal in the case of constant wheel/rail friction*, Journal of sound and vibration, Elsevier, 4295-4313, 2014.
- [12] G.Squicciarini, S.Usberti,D.J.Thompson, R.Corradi, A.Barbera. *Curve squeal in the presence of two wheel/rail contact points*, Noise and Vibration Mitigation for Rail Transportation Systems, Springer, 603-610, 2015.
- [13] J.B. Ayasse, H.Chollet. *4 Wheel–Rail Contact*, Handbook of railway vehicle dynamics, CRC Press, 85, 2006.
- [14] J.J.Kalker. *Wheel-rail rolling contact theory*, Wear, Elsevier, 243-261, 1991.

- [15] J.Dahlberg, B.Alfredsson. *Transient rolling of cylindrical contacts with constant and linearly increasing applied slip*, Wear, Elsevier, 316-326, 2009.
- [16] J.J.Kalker. *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] K.L.Johnson. *Contact mechanics*, Cambridge university press, 1987.
- [18] Michel Jean. *The non-smooth contact dynamics method*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, 235-257, 1999.
- [19] X.Lorang. *Instabilité des structures en contact frottant : Application au crissement des freins à disque de TGV*, Ecole Polytechnique X, 2007.
- [20] H.B.Dhia. *Contact impact elements*, Mécanismes et mécanique du comportement de la dégradation et de la rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques, 1999.