



HAL
open science

ANALYSE STATIQUE DES PLAQUES EN MATERIAU FONCTIONNELLEMENT GRADUE SOUS L'EFFET THERMIQUE

Bouchra Elmassouess, Abdeldjalil Benbakhti, Bouiadjra, Mohammed Bachir,
Fouad Boukhelf

► **To cite this version:**

Bouchra Elmassouess, Abdeldjalil Benbakhti, Bouiadjra, Mohammed Bachir, Fouad Boukhelf. ANALYSE STATIQUE DES PLAQUES EN MATERIAU FONCTIONNELLEMENT GRADUE SOUS L'EFFET THERMIQUE. CFM 2017 - 23ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2017, Lille, France. hal-03465715

HAL Id: hal-03465715

<https://hal.science/hal-03465715>

Submitted on 3 Dec 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse Statique Des Plaques En Matériaux Fonctionnellement Gradués Sous L'effet Thermique

ELMOSSOUESS Bouchra¹, BOUKHELF Fouad², BACHIR BOUIADJRA
Mohamed³⁻⁶, BOUKHARI Ahmed⁴, TOUNSI Abdelwahed⁵⁻⁶.

¹ Laboratoire de mécanique appliqué, université des sciences et technologie d'ORAN
Mouhamed Boudiaf. BP 1505 Elmnouar 31000, ORAN.

²⁻³ Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics,
université de SIDI BEL ABBES. BP 89 cite Ben M'hidi 22000 SIDI BEL ABBES, Algérie.

⁴⁻⁵ Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, université de SIDI BEL ABBES. BP 89 cite Ben
M'hidi 22000 SIDI BEL ABBES, Algérie.

⁶ Agence thématique de recherche Scientifique et Technologique. ATRST (Algérie).

Résumé :

Dans ce travail, une étude du flambement des plaques hybrides en matériau fonctionnellement gradué (FGM) est présentée en utilisant la théorie des plaques raffinées à quatre variables. Cette théorie, qui a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans beaucoup d'aspects, suppose une variation quadratique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur. De plus elle satisfait les conditions aux limites concernant l'annulation des contraintes de cisaillement transverse sur les faces supérieures et inférieures sans tenir compte du facteur de correction de cisaillement.

La plaque est constituée d'un mélange de céramique et de métal où la fraction volumique varie selon une loi de puissance, ainsi et afin de servir une base de comparaison le travail, s'est basé sur un matériau relativement différent qui est constitué dudit FGM et une fraction d'une épaisseur bien définie de céramique à la partie supérieure et une autre épaisseur en bas représentant une couche de métal. Les équations d'équilibres sont déterminées en utilisant le principe des travaux virtuel. Trois cas de chargement thermique sont considérés tels que; une distribution uniforme, linéaire et non linéaire de la température à travers l'épaisseur de la plaque.

Des résultats numériques sont présentés pour montrer l'influence de plusieurs paramètres à savoir: l'indice matériel, les rapports géométriques et le type du chargement thermique sur la température critique du flambement thermique d'une plaque fonctionnellement gradué et simplement appuyés.

Abstract :

In this work, a study for buckling analysis of an hybrid functionally graded plates (FGPs) is presented, using a four-variable refined plate theory. This one which has a strong similarity with the classical plate theory in many aspects involves a quadratic variation of transverse shear stresses through the thickness. Moreover it satisfies the zero traction boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate without using shear correction factors.

The plate is constituted of a mixture of ceramic and metal where the volume fraction varies according to a power law across the thickness. So and to serve a base of comparison, the work based itself on a

relatively different material which is constituted by the aforementioned FGM and a fraction of a thickness defined well by ceramic in the top and another thickness below representing the bottom layer of metal.

Numerical results are presented to show the influence of several parameters including: the power law index, the aspect and dimension ratio and the type of thermal loading on the critical temperature.

Mots clefs : plaque fonctionnellement graduée, la théorie classique des plaques, des plaques hybrides , flambement des plaques

1 Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des composites spéciaux dont les propriétés varient de façon continue grâce à leur épaisseur. Les FGM sont habituellement faits de mélange de céramique et de métal et peuvent donc résister à des environnements de haute température tout en maintenant leur ténacité. La technologie de la FGM était celle des matériaux de fabrication originale proposée au Japon en 1984 par Sendai Groupe. Ils sont utilisés dans des applications très différentes, telles que les cuves de réacteur, les appareils de l'énergie de fusion, les secteurs biomédicaux, les avions, les véhicules spatiaux, les industries de la défense et d'autres ouvrages d'art. En effet, le comportement mécanique des éléments de structure avec les FGM est d'une importance considérable dans les domaines à la fois de recherche et d'industrie. L'avantage d'utiliser les FGM est pour la raison de leur aptitude de résister à des environnements à haut gradient de température, tout en conservant leur intégrité structurale. Par exemple, dans un revêtement de barrière thermique classique et pour des applications à haute température, une couche discrète de matériau céramique est limitée à une structure métallique. Cependant, la transition des propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux distincts peut causer de fortes contraintes inter-laminaires et conduit à la déformation plastique ou de rupture (Finot et Suresh, 1996).

2 Formulation du problème

Les déplacements d'un point M (x, y, z) situé dans la plaque, peuvent être écrits en tant que :

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z) \theta_x \\ v &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z) \theta_y \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

Où u , v , w sont les déplacements dans les directions x , y , z . u_0 , v_0 sont les déplacements centraux moyens. θ_x et θ_y désignent les rotations flexionnelles des plans YZ et XZ, respectivement. La fonction $\Psi(z)$ représente la fonction de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales sur l'épaisseur. Le domaine de la théorie de la plaque mince classique (CPT) de déplacement est obtenu facilement en mettant $\Psi(z) = 0$. Le déplacement de la théorie de plaque de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDPT) est obtenu avec $\Psi(z) = z$. En outre, le déplacement de la théorie de plaque de déformation de cisaillement parabolique (PPT) de Reddy (1984) est obtenu comme suit ;

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2)$$

La théorie sinusoidale de plaque de déformation de cisaillement (SSDPT) de Touratier (1991) est obtenue par la mise en :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (3)$$

En outre, la théorie de plaque de déformation de cisaillement exponentielle (DEPT) de Karama et al (2003) est obtenue par :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (4)$$

2.1 Présente théorie (Modèle développé) :

Soit une plaque fonctionnellement graduée d'épaisseur « h », de la longueur « a » dans le sens x et « b » dans le sens y. La théorie des quatre variables de la plaque raffinée utilisée par Tounsi et al .2011 considère de la variation quadratique des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque, et satisfait l'annulation de la traction aux conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements au plan médian de la plaque dans le sens x et y, respectivement; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement de déplacement transversal, respectivement. Les équations non linéaires de Von Karman exprimant les déplacements et les déformations s'écrivent comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Ou,

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad (7)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right), \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad f(z) = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z \left(\frac{z}{h} \right)^2 \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2$$

2.2. Cinématiques et équations constitutives:

Considérons une plaque à gradient fonctionnel, réalisée à partir d'un mélange de céramique et de métal. La plaque est soumise à une charge thermique. Il est supposé ainsi que les propriétés de la composition des FGM varient à travers l'épaisseur de la plaque.

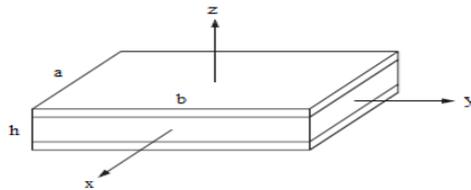


Fig. 1: Géométrie d'une plaque rectangulaire en FGM sandwich avec une épaisseur uniforme dans le système de coordonnées cartésiennes.

La variation des propriétés des matériaux s'exprime ci-dessous comme:

$$P(z) = P_b + (P_t - P_b) V^n \quad (8)$$

Où P représente une propriété de matériau générique comme module et P_t et P_b désignent les propriétés correspondantes aux faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement.

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (9a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (9b)$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (9c)$$

Où $V^{(n)}$ ($n=1,2,3$) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche. Et k est un paramètre déterminant le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur. Il est supposé que les modules E , G et le coefficient de dilatation thermique α varient selon l'équation. (08) et le coefficient de Poisson ν est considéré constant.

Les équations linéaires constitutives sont données ci-dessous :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes des contraintes et de déformations respectivement. En utilisant les caractéristiques des matériaux définies à l'équation (08), les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (11)$$

2.3. Equations de stabilité :

Les équations régissant l'équilibre, peuvent être obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels.

L'énergie potentielle totale de la plaque FGM peut être écrite comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \iiint [\sigma_x(\varepsilon_x - \alpha T) + \sigma_y(\varepsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}] dx dy dz, \quad (12)$$

Le principe du travail virtuel pour le problème actuel peut être exprimé:

$$\begin{aligned} \iint [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \\ + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz. \quad (14)$$

En utilisant l'équation. (10) dans l'équation. (14), les résultantes de contrainte de la plaque FGM peut être exprimée par des déformations totales comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (15)$$

Où;

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t,$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t,$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t,$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^s & \mathbf{B}_{12}^s & 0 \\ \mathbf{B}_{12}^s & \mathbf{B}_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^s & \mathbf{D}_{12}^s & 0 \\ \mathbf{D}_{12}^s & \mathbf{D}_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^s & \mathbf{H}_{12}^s & 0 \\ \mathbf{H}_{12}^s & \mathbf{H}_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{66}^s \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, \quad \mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{44}^s & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{55}^s \end{bmatrix},$$

Avec \mathbf{A}_{ij} , \mathbf{B}_{ij} , etc., représentent les rigidités de la plaque, définies par

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{B}_{11}^s & \mathbf{D}_{11}^s & \mathbf{H}_{11}^s \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{B}_{12}^s & \mathbf{D}_{12}^s & \mathbf{H}_{12}^s \\ \mathbf{A}_{66} & \mathbf{B}_{66} & \mathbf{D}_{66} & \mathbf{B}_{66}^s & \mathbf{D}_{66}^s & \mathbf{H}_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}_{11}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \frac{1-\mathbf{v}}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad (16)$$

et

$$(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{B}_{22}, \mathbf{D}_{22}, \mathbf{B}_{22}^s, \mathbf{D}_{22}^s, \mathbf{H}_{22}^s) = (\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_{11}, \mathbf{D}_{11}, \mathbf{B}_{11}^s, \mathbf{D}_{11}^s, \mathbf{H}_{11}^s), \quad \mathbf{Q}_{11} = \frac{\mathbf{E}(z)}{1-\mathbf{v}^2}$$

$$\mathbf{A}_{44}^s = \mathbf{A}_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\mathbf{E}(z)}{2(1+\mathbf{v})} [\mathbf{g}(z)]^2 dz,$$

Les résultantes de contrainte et des moments, $\mathbf{N}_x^T = \mathbf{N}_y^T$, $\mathbf{M}_x^{bT} = \mathbf{M}_y^{bT}$, et $\mathbf{M}_x^{sT} = \mathbf{M}_y^{sT}$ due à la charge thermique sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_x^T \\ \mathbf{M}_x^{bT} \\ \mathbf{M}_x^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\mathbf{E}(z)}{1-\mathbf{v}} \boldsymbol{\alpha}(z) \mathbf{T} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (17)$$

Les équations de stabilité de la plaque peuvent être dérivées à partir du critère de l'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque FGM sous des charges thermiques est défini en terme de composantes de déplacements ($\mathbf{u}_0^0, \mathbf{v}_0^0, \mathbf{w}_b^0, \mathbf{w}_s^0$). Les composantes de déplacement d'un état stable voisin diffère par ($\mathbf{u}_0^1, \mathbf{v}_0^1, \mathbf{w}_b^1, \mathbf{w}_s^1$) par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, les déplacements totaux d'un état voisin sont :

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^0 + \mathbf{u}_0^1, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0^0 + \mathbf{v}_0^1, \quad \mathbf{w}_b = \mathbf{w}_b^0 + \mathbf{w}_b^1, \quad \mathbf{w}_s = \mathbf{w}_s^0 + \mathbf{w}_s^1 \quad (18)$$

Où l'exposant 1 désigne l'état de stabilité et de l'exposant 0 désigne l'état de conditions d'équilibre. En substituant les équations. (06) et(18) dans l'équation (13) et intégrant par parties, puis égalant les coefficients de $\delta \mathbf{u}_0^1$, $\delta \mathbf{v}_0^1$, $\delta \mathbf{w}_b^1$ et $\delta \mathbf{w}_s^1$ à zéro. Les équations de stabilité régissant sont obtenues pour les théories de déformation de cisaillement des plaques:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}_x^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{N}_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}_y^1}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{M}_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y^{b1}}{\partial y^2} + \bar{\mathbf{N}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{M}_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{S}_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{\mathbf{N}} &= 0 \end{aligned}$$

Avec

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \quad (20)$$

Où les termes N_x^0 et N_y^0 sont les résultantes de force de pré-flambement obtenu sous forme de;

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha(z) E(z) T}{1-\nu} dz. \quad (21)$$

Pour la CPT (Classical Plate Theory), les équations de stabilité sont réduites aux trois premières équations de l'équation(19).

2.4. Solution trigonométrique pour le flambement thermique

Des plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type d'appui utilisé. Nous sommes concernés dans ce travail par la solution exacte des équations(24), pour une plaque FGM appuyée simplement. Les conditions aux limites suivantes sont prescrites pour cette théorie de plaques à quatre variable raffinée sur les bords latéraux:

$$v_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial y} = N_x^1 = M_x^{b1} = M_x^{s1} = 0 \quad (22)$$

$$u_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial x} = N_y^1 = M_y^{b1} = M_y^{s1} = 0 \text{ à } y = 0, b.$$

La solution approximative suivante satisfait à la fois l'équation différentielle et les conditions aux limites;

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_b^1 \\ w_s^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Où ; U_{mn}^1 , V_{mn}^1 , W_{bmn}^1 , and W_{smn}^1 sont des paramètres arbitraires à déterminer, $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ et m , n sont les nombres de mode. En substituant l'équation (23) dans l'équation (19), on obtient:

$$[K]\{\Delta\} = 0, \quad (24)$$

Où $\{\Delta\}$ indique la colonne

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{bmn}^1, W_{smn}^1\}^t \quad (25)$$

et $[K]$ est la matrice symétrique donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

Pour lequel;

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -[2\lambda^2 + (1-\nu)\mu^2] \bar{A} \\
 a_{12} &= -(1+\nu)\lambda \mu \bar{A} \\
 a_{13} &= 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2) \bar{B} \\
 a_{14} &= 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2) \bar{B}^s \\
 a_{22} &= -[(1-\nu)\lambda^2 + 2\mu^2] \bar{A} \\
 a_{23} &= 2\mu(\lambda^2 + \mu^2) \bar{B} \\
 a_{24} &= 2\mu(\lambda^2 + \mu^2) \bar{B}^s \\
 a_{33} &= -2(\lambda^2 + \mu^2)^2 \bar{D} - 2\bar{N}_x^0 \lambda^2 - 2\bar{N}_y^0 \mu^2 \\
 a_{34} &= -2(\lambda^2 + \mu^2)^2 \bar{D}^s - 2\bar{N}_x^0 \lambda^2 - 2\bar{N}_y^0 \mu^2 \\
 a_{44} &= -2(\lambda^2 + \mu^2)^2 \bar{H}^s - 2\bar{J}(\lambda^2 + \mu^2) - 2\lambda^2 \bar{N}_x^0 - 2\mu^2 \bar{N}_y^0
 \end{aligned} \tag{27}$$

3 Résultats et discussion

On suppose que la plaque à gradient fonctionnel se compose d'un mélange d'aluminium qui représente le métal et d'alumine qui représente la céramique au milieu sur une épaisseur variable que nous définissons en terme de rapport $\gamma = t\text{FGM}/h$ en fonction de la hauteur totale (h) de la plaque; ainsi qu'aux bords deux couches distinctes du dit métal et céramique ayant une épaisseur égale à la moitié de l'épaisseur restante, soit $(h - t\text{FGM})/2$. Le module de Young, coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique de l'aluminium sont donnés respectivement $E_m = 70$ GPa, $\alpha_m = 23 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ et pour l'alumine $E_c = 380$ GPa, $\alpha_c = 7.4 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$. Autrefois, pour d'autre exemple et afin de justifier les valeurs de la température critique d'une plaque hybride les caractéristiques thermomécaniques sont données comme suit $E_m = 207.7$ GPa, $\alpha_m = 1.532 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ et pour l'alumine $E_c = 322.2$ GPa, $\alpha_c = 7.47 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$. Pour la température linéaire et non linéaire augmente à travers l'épaisseur, la température s'élève de 5 °C dans la surface riche en métal de la plaque (i.e. $T_m = 5$ °C). Nous supposons dans tous les cas analysés qu'il existe une variation paramétrique des dimensions de la plaque, soit $a = f(b), a = f(h)$ et l'indice de non linéarité est donné comme suit $\beta = 0, 1, 2, 5, 10$. Afin de prouver la validité de la formulation actuelle, les résultats pratiquement les mêmes ont été obtenus pour les plaques FG sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur pour les différentes théories.

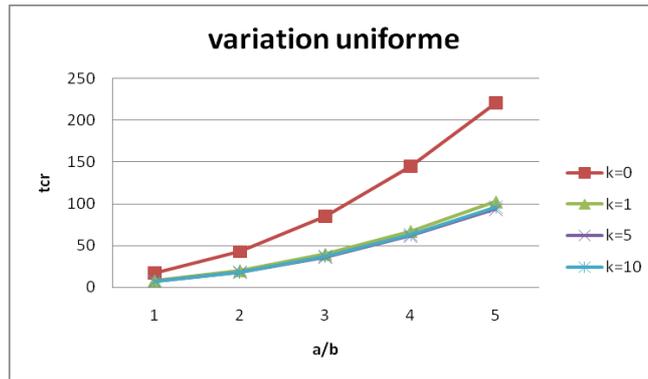


Fig. 2. Température critique du flambement de la plaque FG sous variation uniforme de la température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport a/b avec $a/h=100$

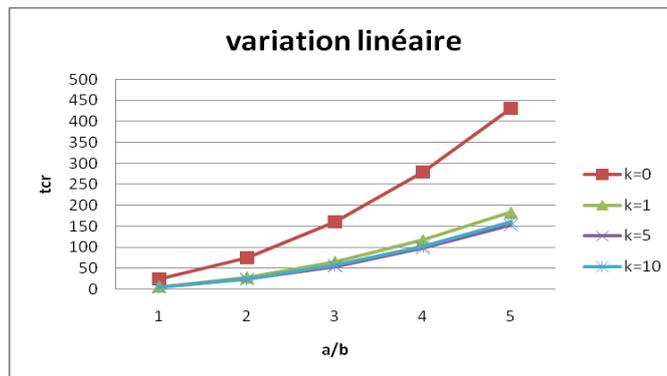


Fig. 3. Température critique du flambement de la plaque FG sous variation linéaire de la température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et le rapport a/b avec $a/h=100$

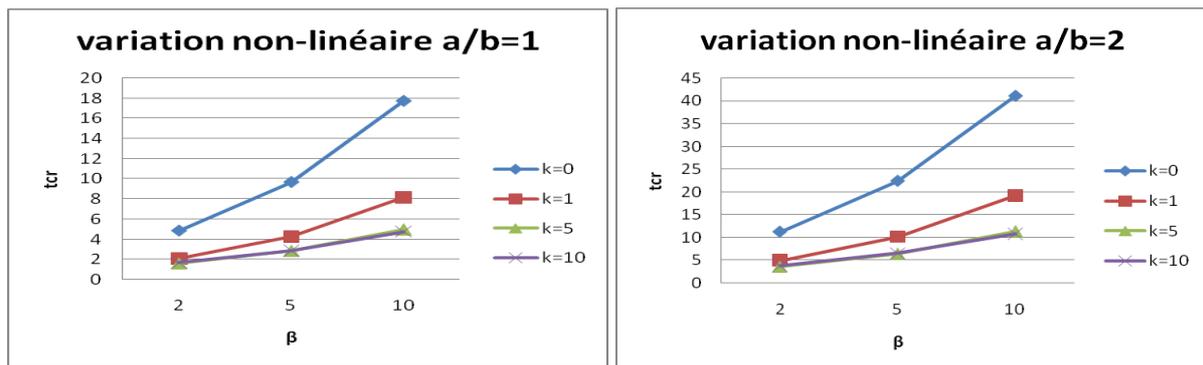


Fig.4. Température critique du flambement de la plaque FG sous variation non-linéaire de la température pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k , le rapport a/b , l'exposant de la température γ et le rapport d'épaisseur $a/h=10$

a) - Température critique du flambement de la plaque FG sous variation non-linéaire de la température pour différentes valeurs de l'indice de

loi de puissance k , l'exposant de la température γ avec le rapport $a/b=1$ et le rapport d'épaisseur $a/h=10$

b) Température critique du flambement de la plaque FG sous variation non-linéaire de la température pour différentes valeurs de l'indice de

loi de puissance k , l'exposant de la température γ avec le rapport $a/b=2$ et le rapport d'épaisseur $a/h=10$

4. Remerciement

Cette recherche a été soutenue par l'Agence thématique de recherche Scientifique et Technologique (Algérie) et l'université de Sidi Bel Abbes (UDL SBA) en Algérie.

5. Conclusion

Dans ce travail de recherche, l'analyse du flambement thermique des plaques rectangulaires épaisses fonctionnellement graduées hybride, dans un environnement thermique a été présentée. Il est basé sur la théorie des plaques raffinée, à quatre variables, les équations d'équilibre et la stabilité d'épaisseur ont été calculées.

des études paramétriques ont été effectuées afin d'examiner les influences de l'indice de loi de puissance, le rapport d'épaisseur et les types de chargement thermique sur la température critique de flambement d'aluminium /alumine fonctionnellement gradués des plaques rectangulaires. Sur la base de la discussion ci-dessus, certaines conclusions sont répertoriées comme suit:

- La température critique de flambement pour les plaques FG augmente proportionnellement par rapport aux valeurs du rapport de dimension.
- La température critique de flambement est généralement plus faible que celles correspondantes des plaques homogènes en céramique

Références

- [1] A.Benachour, H.D.Tahar, H.AitAtmane,A.Tounsi, S.A.Meftah,“A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient,” Composites: Part B,42, 1386–1394 (2011).
- [2] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, Journal of Materials Science Letters; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [3] A. Chakraborty., S. Gopalakrishnan.,J.N. Reddy, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, Int. J. Mech. Sci; 45 (3) : 519–539,2003.
- [4] A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2-Buckling and free vibration, Int. J. Solids Struct; 42 (18-19): 5243–5258, 2005.
- [5] A.M. Zenkour., M. Sobhy, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, Compos Struct; 93 (1):102–93, 2010.
- [6] Chi, S. H., Chung, Y.L, Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part II: Numerical results, Int. J; Solids Structures; 43 (13): 3675-3691, 2006.
- [7] M. BACHIR BOUAIDJRA ,