



**HAL**  
open science

## Analyse de bifurcation des modes non-linéaires par équilibre harmonique

Clément Grenat, Sébastien Baguet, Régis Dufour, Claude-Henri Lamarque

► **To cite this version:**

Clément Grenat, Sébastien Baguet, Régis Dufour, Claude-Henri Lamarque. Analyse de bifurcation des modes non-linéaires par équilibre harmonique. CFM 2017 - 23ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2017, Lille, France. hal-03465596

**HAL Id: hal-03465596**

**<https://hal.science/hal-03465596>**

Submitted on 3 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse de stabilité et bifurcations des modes non-linéaires par équilibrage harmonique

C. GRENAT<sup>a</sup>, S. BAGUET<sup>a</sup>, R. DUFOUR<sup>a</sup> and C-H. LAMARQUE<sup>b</sup>

a. Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, F-69621, Villeurbanne, France

b. Université de Lyon, CNRS, ENTPE, LTDS UMR5513, F-69518, Vaulx-en-Velin, France

## Abstract :

*Ce travail présente une méthode d'analyse de stabilité et de bifurcation des Modes normaux non-linéaires (MNN) utilisant la méthode d'équilibrage harmonique (HBM). Afin de lever la non-unicité de la solution, une condition de phase temporelle a été adaptée au domaine fréquentiel puis ajoutée à l'équation de mouvement autonome. Ensuite un coefficient d'amortissement artificiel a été introduit dans l'équation de mouvement afin de rendre le problème bien posé. Finalement le problème quadratique aux valeurs propres associé à la méthode HBM a été modifié afin d'effectuer les analyses de stabilité et de bifurcation.*

## 1 Calcul des MNN en temps que solution périodique

La théorie des MNN a été introduite par Rosenberg [1] en définissant des modes normaux non-linéaires non-amortis et non-forcés. Les MNN calculés sont considérés comme des solutions périodiques synchronisées. Ainsi les solutions ne peuvent être considérées que d'un mode non-linéaire à la fois. Ne pouvant prendre en compte des possibles interactions modales où plusieurs modes non-linéaires cohabitent, cette définition a été étendue en levant la synchronisation des solutions périodiques [2]. Dans la littérature des méthodes numériques permettant de calculer les MNN peuvent être trouvées [3]. La définition étendue d'un MNN est celle considérée dans nos travaux. Les MNNs sont calculés en utilisant la méthode HBM couplée à des techniques de continuation par pseudo longueur d'arc.

### 1.1 Équation de mouvement

Un système dynamique non-forcé et non-amorti à 2 degrés de liberté tel que définie dans [3].

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + d\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{nl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1^3(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec  $\mathbf{x}(t)$  le vecteur déplacement,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  les matrices généralisées de masse, d'amortissement et de raideur,  $\mathbf{f}_{nl}$  le vecteur des forces non-linéaires. Un coefficient quasiment nul  $d$  est introduit devant la matrice d'amortissement afin de rendre le problème de continuation inversible. En appliquant l'équilibrage harmonique [4], l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel est obtenue :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega, d) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

où  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Fnl}$  représentent les coefficients de Fourier du vecteur déplacement et du vecteur des forces non-linéaires.  $\otimes$  correspond au produit tensorielle de Kronecker et  $\nabla$  représente l'opérateur de dérivée temporelle.

et

$$\mathbf{Z}(\omega, d) = \omega^2 \nabla^2 \otimes \mathbf{M} + \omega \nabla \otimes d\mathbf{C} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{K} = \text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_j, \dots, \mathbf{Z}_H) \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - j^2 \omega^2 \mathbf{M} & \omega d\mathbf{C} \\ -\omega d\mathbf{C} & \mathbf{K} - j^2 \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

$$\nabla = \text{diag}(\mathbf{0}, \nabla_1, \dots, \nabla_j, \dots, \nabla_H) \quad \text{with} \quad \nabla_j = j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 1.2 Condition de phase et initialisation

L'équation Eq. (1) est autonome, par conséquent si  $\mathbf{x}(t)$  est solution alors  $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  l'est aussi. Pour des solutions périodiques, cette non-unicité peut être interprétée comme une phase indéterminée. Ainsi une condition de phase doit être ajoutée à l'équation du mouvement afin d'imposer la phase et ainsi rétablir l'unicité de la solution [5]. Dans nos travaux une condition de phase temporelle a été adaptée au domaine fréquentiel, il en résulte une méthode numérique plus robuste. Le MNN est alors calculé en utilisant les techniques de continuation par pseudo longueur d'arc à partir du système augmenté composé de l'équation de mouvement modifiée et de la condition de phase.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega, d) = \mathbf{Z}(\omega, d)\mathbf{X} + \mathbf{Fnl}(\mathbf{X}) \\ r(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2H+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

## 1.3 Initialisation

L'initialisation des MNNs est réalisée à partir des modes linéaires. Ceux-ci sont calculés à partir de l'équation de mouvement en fréquentielle Eq. (2) pour  $\mathbf{X} = 0$  et  $\mathbf{Fnl}(\mathbf{X}) = 0$ . Il en résulte l'équation Eq. (6) où  $\omega$  représente la fréquence du mode et  $\phi$  correspond au mode linéaire. Le calcul des MNNs est alors initialisé en effectuant un changement de branche selon le mode linéaire considéré.

$$(\omega^2 \nabla^2 \otimes \mathbf{M} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{K})\phi = 0 \quad (6)$$

## 2 Analyse de stabilité et de bifurcation des MNNs

Contrairement aux Modes Normaux Linéaires, les MNNs présentent des comportements dynamiques complexes. Leurs branches peuvent changer de stabilité et des points de bifurcation comme les points de branchement (BP) ou les points limites (LP) peuvent apparaître. Afin de les détecter et de les calculer les exposants de Floquet  $\lambda$  du problème quadratique aux valeurs propres  $\mathbf{Q}$  sont utilisés :

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{R}_\mathbf{X} + \Lambda \mathbf{\Delta}_1 + \Lambda^2 \mathbf{\Delta}_2)\phi = 0 \quad (7)$$

où  $\phi$  sont les vecteurs propres complexes,  $\mathbf{R}_\mathbf{X}$  est la Jacobienne, et  $\mathbf{\Delta}_1$  et  $\mathbf{\Delta}_2$  sont définis par

$$\mathbf{\Delta}_1 = 2\omega \nabla \otimes \mathbf{M} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes d\mathbf{C} = \text{diag} \left( d\mathbf{C}, \begin{bmatrix} d\mathbf{C} & 2\omega \mathbf{M} \\ -2\omega \mathbf{M} & d\mathbf{C} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} d\mathbf{C} & 2H\omega \mathbf{M} \\ -2H\omega \mathbf{M} & d\mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \quad (8)$$

$$\Delta_2 = \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{M} \quad (9)$$

Comme le problème quadratique aux valeurs propres vient directement de l'équation de mouvement autonome [4], la non-unicité des solutions de celle-ci rend la Jacobienne  $\mathbf{R}_X$  singulière. Par conséquent une valeur propre nulle  $\lambda$  de multiplicité 2 est solution du problème quadratique aux valeurs propres. Afin d'effectuer des analyses de stabilité cette valeur propre nulle doit être décalée [7]. Il en résulte un problème quadratique aux valeurs propres modifié  $\mathbf{Q}_{\text{décalé}}$ . Une fois la modification effectuée, le nouveau problème quadratique est utilisé pour détecter et calculer les points de bifurcation. Les systèmes augmentés utilisés pour calculer les BP et les LP sont issus de Xie et al. [4]. Ensuite ces systèmes augmentés sont modifiés en adéquation avec le nouveau problème quadratique aux valeurs propres  $\mathbf{Q}_{\text{décalé}}$ . Le couplage de cet algorithme avec une méthode de changement de branche [5] permet de calculer toutes les branches de MNN ainsi que leur stabilité et points de bifurcation (BP et LP) associés. Dans la Figure 1, toutes les branches de MNN du système (1) ont été calculées, avec mise en évidence des interactions modales jusqu'à la 7 : 1 ème.

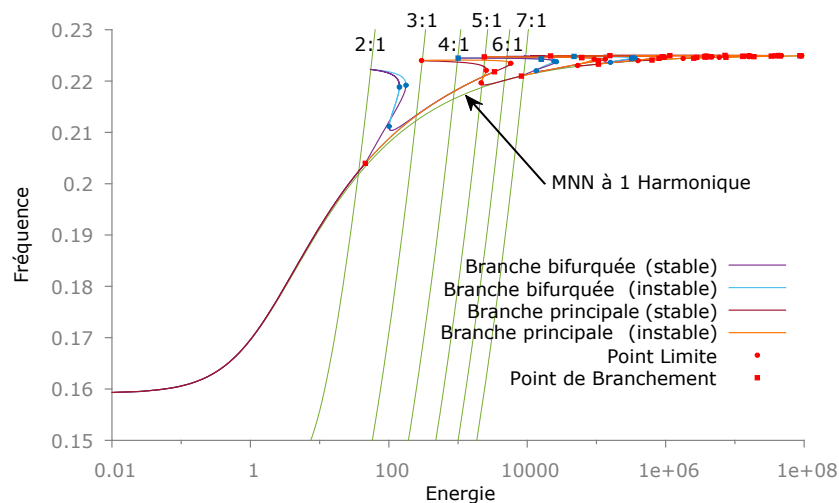


FIGURE 1: MNN à 20 Harmoniques

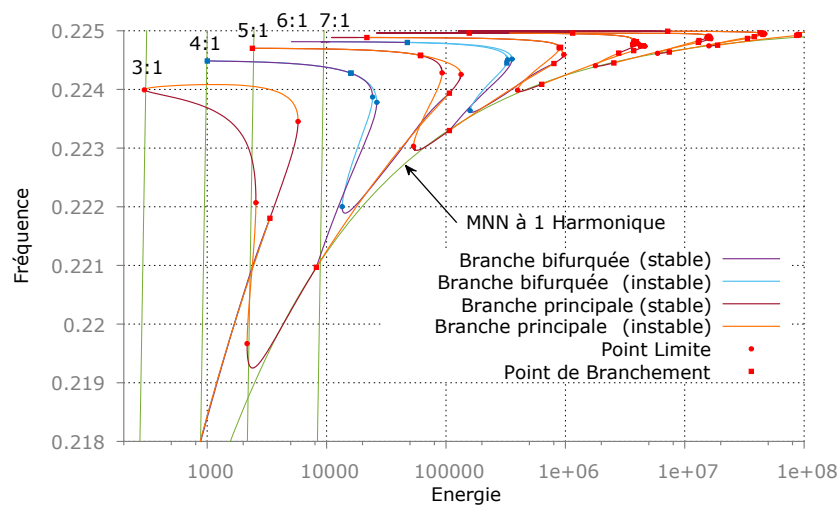


FIGURE 2: Zoom sur les interactions modales.

### 3 Conclusions

Une méthode d'analyse de stabilité et de bifurcation des MNNs a été développée en utilisant l'HBM. L'ajout d'une condition de phase adaptée au domaine fréquentiel et d'un petit coefficient d'amortissement conduit à une méthode de calcul des MNNs très robuste. En plus de cela une initialisation automatique permet d'accéder à la totalité des MNNs. Pour effectuer l'analyse de stabilité du MNN, un problème quadratique aux valeurs propres modifié est utilisé. Les points de bifurcations des MNNs ont été calculés en utilisant les systèmes augmentés modifiés en adéquation avec le nouveau problème quadratique aux valeurs propres. Enfin, le couplage de la continuation avec une méthode de changement de branche permet de suivre la totalité du réseau de MNN et de mettre en évidence les interactions modales.

### Références

- [1] R.M. Rosenberg, The normal modes of non linear n-degree-of-freedom systems, *Journal of Applied Mechanics* 29 (1)(1962)7-14.
- [2] Y.S. Lee, G. Kerschen, A.F. Vakakis, P. Panagopoulos, L. Bergmand, D.M. McFarland : Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment. *Physica D :Nonlinear-Phenomena* 204 (1-2) (2005)41-69.
- [3] L. Renson and G. Kerschen and B. Cochelin : Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *Journal of Sound and Vibration*, 2016.
- [4] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel and R. Dufour : Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing* 10.1016/j.ymssp.2016.09.037, 2016.
- [5] R. Seydel : *Practical bifurcation and stability analysis*. Springer Science & Business Media, Vol.5, 2009.
- [6] M. Peeters and R. Vigié and G. Sérandour and G. Kerschen and J.-C. Golinval : Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009.
- [7] B. Meini, A "shift-and-deflate" technique for quadratic matrix polynomials. *Linear Algebra and its Applications*, 2011.