



**HAL**  
open science

## Méthode des solutions fondamentales combinée aux techniques PGD et MAN pour la résolution des problèmes transitoires non linéaires

Amen Amevi Sogah, Norman Mathieu, Kékéli Kpogan, Abdeljalil Tri, Hamid Zahrouni, Michel Potier-Ferry

► **To cite this version:**

Amen Amevi Sogah, Norman Mathieu, Kékéli Kpogan, Abdeljalil Tri, Hamid Zahrouni, et al.. Méthode des solutions fondamentales combinée aux techniques PGD et MAN pour la résolution des problèmes transitoires non linéaires. CFM 2017 - 23ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2017, Lille, France. hal-03465429

**HAL Id: hal-03465429**

**<https://hal.science/hal-03465429v1>**

Submitted on 3 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthode des solutions fondamentales combinée aux techniques PGD et MAN pour la résolution des problèmes transitoires non linéaires

A. Sogah<sup>a,b</sup>, N. Mathieu<sup>a,b</sup>, K. Kpogan<sup>a,b</sup>, A. Tri<sup>c</sup>, H. Zahrouni<sup>a,b</sup>, M. Potier-Ferry<sup>a,b</sup>

a. LEM3, Université de Lorraine, France, amen-amevi.sogah@univ-lorraine.fr

b. Labex DAMAS, Université de Lorraine, France

c. Laboratoire de Mécanique/ FSAC-ISEM de Casablanca, Maroc

## Résumé :

*L'objectif de ce travail est de proposer une nouvelle approche basée sur la combinaison de la méthode des solutions fondamentales (MFS), la méthode de décomposition propre généralisée (PGD) et la méthode asymptotique numérique (MAN) pour résoudre l'équation de la chaleur non linéaire transitoire. Dans un premier temps, le problème non linéaire est transformé en une succession de problèmes linéaires grâce à la MAN. Dans un deuxième temps, la PGD considérée comme une méthode de séparation de variables, permet de décomposer chaque problème linéaire transitoire en deux sous problèmes. Le sous problème en temps est résolu par une méthode d'intégration classique et celui en espace est résolu en utilisant la méthode sans maillage MFS. Pour valider notre algorithme, nous considérons différentes géométries et fonctions sources de chaleur. Les résultats numériques ont été comparés avec succès aux solutions de référence dans un cadre 2D.*

## Abstract :

*The aim of this work is to propose a new approach based on the combination of the method of fundamental solution (MFS), the proper generalized decomposition method (PGD) and the asymptotic numerical method (ANM) method to solve transient nonlinear heat equation. In a first step, the nonlinear problem is transformed into a succession of linear problems thanks to the ANM. In a second step, the PGD, considered as a method of separation of variables, makes it possible to decompose each transient linear problem into two sub-problems. The time sub-problem is solved by a classical integration method and the space one is solved using the meshless method MFS. To validate our algorithm, we consider different geometries and functions sources of heat. The numerical results were compared successfully to the reference solutions in a 2D framework.*

## Mots clefs :

**Méthode des Solutions Fondamentales (MFS), Méthode Asymptotique Numérique (MAN), Décomposition Propre Généralisée (PGD), Problème transitoire non linéaire**

## 1 Introduction

On propose dans ce travail un algorithme associant la méthode des solutions fondamentales (MFS), la méthode de décomposition propre généralisée (PGD) et la méthode asymptotique numérique (MAN) pour résoudre l'équation de la chaleur non linéaire en régime transitoire. La MAN représente un outil très efficace pour résoudre une classe de problèmes non linéaires. De nombreuses applications ont établi la robustesse de cette méthode aussi bien en mécanique des solides qu'en mécanique des fluides ([7], [8], [9]). La MAN consiste en la transformation du problème non linéaire en une succession de problèmes linéaires en développant les variables sous forme de série de Taylor. Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à des problèmes instationnaires non linéaires qui sont transformés à l'aide de la MAN en des problèmes instationnaires linéaires. Ces derniers sont résolus en utilisant la méthode PGD combinée à la méthode MFS. La méthode PGD, considérée comme une méthode de réduction de modèle, a été proposée pour réduire la dimension du problème physique et ainsi le temps de calcul. Moyennant une séparation de variables, elle permet de décomposer chaque problème linéaire transitoire en un problème en temps et un autre en espace [1]. La PGD a été associée à la méthode des éléments de frontière (BEM) [2] pour résoudre l'équation de la chaleur non-linéaire instationnaire. La méthode PGD a aussi été associée à la MAN pour résoudre des problèmes de bifurcation [3]. Dans ce travail, le problème en temps est résolu par une méthode d'intégration classique comme la méthode de Runge-Kutta et le problème en espace est résolu en utilisant la méthode sans maillage MFS. Cette dernière a été proposée pour résoudre les équations aux dérivées partielles homogènes et a été étendue aux équations aux dérivées partielles non homogènes grâce à l'utilisation des fonctions de base radiale (RBF) pour la détermination de la solution particulière (MPS). L'efficacité de MFS a été prouvée à travers son application pour des problèmes stationnaires aussi bien linéaires que non linéaires. La MFS a été proposée également pour résoudre des problèmes transitoires. Elle a été appliquée en particulier aux équations de la chaleur [11], aux équations de Navier-stokes [16], aux problèmes de vibration [17] et à d'autres problèmes physiques [18]. Dans ces travaux, deux méthodes ont été particulièrement utilisées. La première a permis de convertir le problème instationnaire en un autre indépendant du temps grâce à la transformée de Laplace et la deuxième méthode consiste à chercher les solutions comme une combinaison linéaire des solutions fondamentales dépendantes du temps. L'association des méthodes PGD et MFS, proposée ici, représente une troisième voie pour une séparation entre le temps et l'espace.

## 2 Formulation du problème

On considère une équation de la chaleur non linéaire et transitoire définie dans un cadre 2D avec les conditions aux limites et initiale suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u + u^2 = f(x, y, t) & \text{dans } \Omega \times \mathcal{T} \\ u(x, y, t) = g(x, y, t) & \text{sur } \partial\Omega \times \mathcal{T} \\ u(x, y, t_0) = h(x, y) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\Omega$  un domaine dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ ,  $\partial\Omega$  sa frontière,  $\mathcal{T} = [t_0, \tau]$  l'intervalle de temps,  $u$  le champ de température et  $k$  le coefficient de conductivité thermique, supposé constant. Les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont données.

### 3 Techniques d'homotopie et de perturbation

On cherche à résoudre (1) en combinant les techniques d'homotopie et de perturbation. La technique d'homotopie consiste à introduire un paramètre arbitraire dans l'équation non linéaire pour faciliter sa résolution. Dans notre travail, nous introduisons ce paramètre noté  $\epsilon$  sur le terme non linéaire. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - k \Delta w = f(x, y, t) - \epsilon w^2 & \text{dans } \Omega \times \mathcal{T} \\ w(x, y, t, \epsilon) = g(x, y, t) & \text{sur } \partial\Omega \times \mathcal{T} \\ w(x, y, t_0, \epsilon) = h(x, y) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2)$$

avec  $\epsilon \in [0, 1]$ . Pour  $\epsilon = 0$ , on a une équation linéaire transitoire et pour  $\epsilon = 1$ , on retrouve (1). On note que  $w(x, y, t, \epsilon = 1) = u(x, y, t)$ .

#### 3.1 Technique de perturbation

Pour passer de  $\epsilon = 0$  à  $\epsilon = 1$ , on utilise la technique de perturbation consistant à chercher la solution de (2) sous la forme de séries entières tronquées à un ordre élevé. Cette série s'écrit sous la forme :

$$w(x, y, t, \epsilon) = w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots + \epsilon^n w_n \quad (3)$$

avec  $n$  l'ordre de troncature,  $n \in \mathbb{N}$ . En introduisant (3) dans (2), on obtient les systèmes d'équations linéaires transitoires suivants :

— Ordre 0 :

$$\begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial t} - k \Delta w_0 = f(x, y, t) & \text{dans } \Omega \times \mathcal{T} \\ w_0(x, y, t) = g(x, y, t) & \text{sur } \partial\Omega \times \mathcal{T} \\ w_0(x, y, t_0) = h(x, y) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4)$$

— Ordre  $l$  avec ( $1 \leq l \leq n$ ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial w_l}{\partial t} - k \Delta w_l = - \sum_{i=0}^{l-1} w_i w_{l-i-1} & \text{dans } \Omega \times \mathcal{T} \\ w_l(x, y, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathcal{T} \\ w_l(x, y, t_0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (5)$$

Grâce à la méthode PGD, chaque système (4) et (5) est séparé en deux systèmes, l'un en espace et l'autre en temps.

### 4 Décomposition propre généralisée (PGD)

Pour illustrer la PGD, on considère la forme générique des systèmes (4) et (5) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}(v) = \mathcal{A}(x, y, t) & \text{dans } \Omega \times \mathcal{T} \\ v(x, y, t) = \mathcal{C}(x, y, t) & \text{sur } \partial\Omega \times \mathcal{T} \\ v(x, y, t_0) = \mathcal{D}(x, y) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (6)$$

avec  $\mathcal{L}(\cdot)$  l'opérateur laplacien linéaire. La solution du système (6) est recherchée sous la forme :

$$v(x, y, t) \approx v^m = \sum_{i=1}^m \Phi_i(x, y) T_i(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \Phi_i(x, y) T_i(t) + \Phi_m(x, y) T_m(t) \quad (7)$$

Connaissant les  $(m - 1)$  premiers couples, l'algorithme décrit ci-dessous permet de déterminer les fonctions  $\Phi_m$  et  $T_m$ . Pour simplifier l'écriture, on réécrit  $\{\Phi_m, T_m\} = \{\Phi, T\}$ . La stratégie pour calculer le couple  $\{\Phi, T\}$  se fait en deux étapes. Premièrement  $\Phi$  est supposée connue, on détermine  $T$  en résolvant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_x \frac{dT(t)}{dt} + \beta_x T(t) = \langle \mathcal{A}(x, y, t), \Phi(x, y) \rangle - \sum_{i=1}^{m-1} \left( \alpha_x^i \frac{dT_i(t)}{dt} - k \beta_x^i T_i(t) \right) \quad \text{dans } \mathcal{T} \\ \alpha_x T(t_0) = \langle \mathcal{D}(x, y), \Phi(x, y) \rangle - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_x^i T_i(t_0) \end{array} \right. \quad (8)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_x = \langle \Phi(x, y), \Phi(x, y) \rangle; \quad \alpha_x^i = \langle \Phi_i(x, y), \Phi(x, y) \rangle, \quad i = 1, \dots, m-1; \\ \beta_x = \langle \mathcal{L}(\Phi(x, y)), \Phi(x, y) \rangle; \quad \beta_x^i = \langle \mathcal{L}(\Phi_i(x, y)), \Phi(x, y) \rangle \end{array} \right. \quad (9)$$

Le système (8) est une équation différentielle ordinaire résolue par la méthode de Runge-Kutta. On précise par ailleurs que d'autres méthodes d'intégration pourraient être utilisées. Deuxièmement, une fois que la solution  $T$  est calculée, on détermine  $\Phi$  en résolvant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_t \mathcal{L}(\Phi) + \beta_t \Phi(x, y) = \langle \mathcal{A}(x, y, t), T(t) \rangle - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_t^i \mathcal{L}(\Phi_i) + \beta_t^i \Phi_i(x, y)) \quad \text{dans } \Omega \\ \alpha_t \Phi(x, y) = \langle \mathcal{C}(x, y, t), T(t) \rangle - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_t^i \Phi_i(x, y) \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (10)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_t = \langle T, T \rangle; \quad \alpha_t^i = \langle T_i, T \rangle \quad i = 1, \dots, m-1; \\ \beta_t = \left\langle \frac{dT}{dt}, T \right\rangle; \quad \beta_t^i = \left\langle \frac{dT_i}{dt}, T \right\rangle \end{array} \right. \quad (11)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire, donc ici une intégration sur l'espace pour calculer  $T$  ou sur le temps pour calculer  $\Phi$ . L'équation (10) est alors résolue par la méthode sans maillage MFS.

## 5 Méthode des solutions fondamentales (MFS)

Dans cette section, on propose de résoudre par MFS le problème (10) pris sous la forme générique suivante à chaque itération PGD :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\Phi) + \gamma(x, y) \Phi(x, y) = \mathcal{F}(x, y) \quad \text{dans } \Omega \\ \Phi(x, y) = \mathcal{B}(x, y) \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (12)$$

On rappelle ici que  $\mathcal{L}(\cdot)$  est un opérateur laplacien. Les fonctions  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{B}$  sont données. Pour résoudre le système (12), la solution fondamentale n'étant pas toujours disponible, la méthode des équations

analogues (AEM) est utilisée pour le transformer en un problème de Poisson standard. Il devient alors :

$$\begin{cases} \Delta\Phi(x, y) = -\gamma(x, y)\Phi(x, y) + \mathcal{F}(x, y) = \mathcal{H}(x, y, \Phi) & \text{dans } \Omega \\ \Phi(x, y) = \mathcal{B}(x, y) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

qui est facilement résolu par la méthode MFS si la fonction  $\mathcal{H}$  est connue. Or  $\mathcal{H}$  dépend de l'inconnue  $\Phi$ , d'où la nécessité de la méthode MFS-MPS (MPS : méthode des solutions particulières) qui combine simultanément la solution particulière et la solution homogène. Cette solution s'écrit sous la forme :

$$\Phi(x, y) \approx \tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^{N_d} \eta_i v(r_i) + \sum_{j=1}^{N_s} \theta_j G(\rho_j) \quad (14)$$

où  $N_d$  et  $N_s$  représentent respectivement les points d'interpolation à l'intérieur du domaine  $\Omega$  et le nombre de points sur la frontière fictive  $\Gamma$ . La fonction  $v(r)$  représente la solution particulière de l'opérateur de Laplace définie par :

$$\Delta v(r) = \varphi(r) \quad (15)$$

où  $\varphi(r)$  est la fonction de base radiale qui permet d'approcher le second membre de la première équation de (13), ainsi :

$$\mathcal{H}(x, y, \Phi) = \sum_{i=1}^{N_d} \eta_i \varphi(r_i) \quad (16)$$

où  $r_i = \|(x, y) - (x_i, y_i)\|$ ,  $(x_i, y_i)_{i=1..N_d}$  sont des points de collocation dans le domaine. On note également que :

$$G(\rho_j) = -\frac{1}{2\pi} \log(\rho_j) \quad (17)$$

est la solution fondamentale du Laplacien pour le problème 2D caractérisé par,

$$\Delta G(\rho) = 0 \quad (18)$$

Les  $\rho_j = \|(x, y) - (x_{s_j}, y_{s_j})\|$ ,  $(x_{s_j}, y_{s_j})_{j=1..N_s}$  représentent les points sources pris sur une frontière fictive  $\Gamma$  contenant le domaine  $\Omega$ . Les coefficients  $\{\eta_i\}_{i=1}^{N_d}$  et  $\{\theta_j\}_{j=1}^{N_s}$  sont calculés en introduisant (14) dans (13), ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{N_d} \eta_i \Psi(r_i) + \sum_{j=1}^{N_s} \theta_j \Theta(\rho_j) = \mathcal{F}(x, y) \quad \text{dans } \Omega \quad (19)$$

avec :

$$\Psi(r_i) = \Delta v(r_i) + \gamma(x, y)v(r_i) = \varphi(r_i) + \gamma(x, y)v(r_i) \quad (20)$$

et

$$\Theta(\rho_j) = \Delta G(\rho_j) + \gamma(x, y)G(\rho_j) = \gamma(x, y)G(\rho_j) \quad (21)$$

Les fonctions  $\Psi(r)$  et  $\Theta(\rho)$  sont connues. L'efficacité et la précision de l'interpolation dépendent du choix des fonctions de base radiale  $\varphi$ . Dans ce travail, on propose d'utiliser les fonctions de base radiales

multi-quadratiques suivantes :

$$\varphi(r) = \sqrt{c^2 + r^2} \quad (22)$$

D'où

$$v(r) = \frac{1}{9}(4c^2 + r^2)\sqrt{c^2 + r^2} - \frac{c^3}{3}\log(c + \sqrt{c^2 + r^2}) \quad (23)$$

En 2D, le paramètre  $c$  est une constante choisie égale à 1. Pour la mise en œuvre de cette technique, avec  $N_d$ ,  $N_b$  et  $N_s$  fixés, par collocation on obtient un système d'ordre  $(N_d + N_s) \times (N_d + N_b)$  à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \Psi(r_{ij}) & \Theta(\rho_{ij}) \\ v(r_{ij}) & G(\rho_{ij}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{F} \\ \mathcal{B} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Une fois que les coefficients  $\{\eta_i\}_{i=1}^{N_d}$  et  $\{\theta_j\}_{j=1}^{N_s}$  sont déterminés en résolvant le système (24), la solution approchée est obtenue à partir de (14).

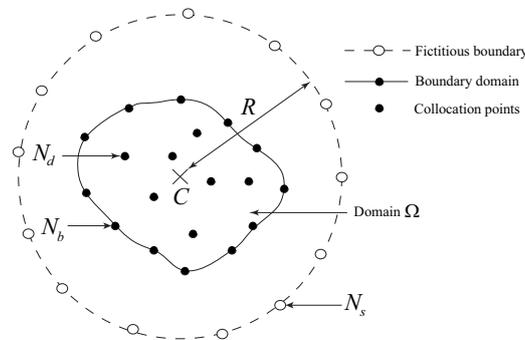


FIGURE 1: Points de collocation, domaine  $\Omega$ , bord réel  $\partial\Omega$  et bord fictif  $\Gamma$ .

## 6 Exemples numériques et discussions

Pour valider l'algorithme développé dans les sections précédentes, on résout l'équation de la chaleur non linéaire transitoire. La convergence de notre algorithme sera présentée et en particulier on va étudier l'influence des paramètres de la MFS ( $R$ ,  $N_s$  et  $N_d$ ) et le nombre d'intervalle de discrétisation temporelle  $n_t$ . Pour s'assurer d'avoir une meilleure approximation, on détermine l'erreur relative suivante :

$$E_{num} = \frac{|u_{num} - u_{exact}|}{\|u_{exact}\|} \quad (25)$$

A noter aussi que le rayon de validité de la série est calculé comme suit :

$$\epsilon_{max} = \left( \delta \frac{\|w_1\|}{\|w_n\|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (26)$$

avec  $\delta$  le paramètre de précision de la MAN.

### 6.1 Exemple 1 : Fonction source non séparable

On considère un domaine carré  $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ ,  $\mathcal{T} = [0, 0.2]$ ; le coefficient de conductivité thermique  $k$  est supposé égale à 1. La fonction source :

$f(x, y, t) = \frac{1}{t+x+y+2} + \frac{2}{(t+x+y+2)^2} + \log(t+x+y+2)^2$  est choisie de façon à respecter la solution analytique :  $u_{exact} = \log(t+x+y+2)$ . La condition initiale et aux limites correspondent à la solution exacte. Ce problème est discrétisé en 121 points de collocation, 30 points sur la frontière extérieure et 40 points sur la frontière interne. L'intervalle de temps  $\mathcal{T}$  est uniformément discrétisé en  $n_t = 2$ . Sur la figure 2, à gauche une coupe du domaine a été effectuée et à droite on compare la solution numérique avec la solution exacte le long de cette coupe. On remarque une meilleure approximation du problème avec notre approche. La figure 3 montre que l'erreur relative  $E_{num}$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $t = 0.2$ . Dans la Table 1, on montre que l'ordre de troncature reste plus ou moins constant quand le nombre d'intervalle temporelle augmente significativement. Aussi, on remarque que plus le nombre d'intervalle temporelle augmente, plus le rayon de validité de la série s'améliore. Pour étudier l'influence des paramètres de MFS, on se fixe le nombre d'intervalle temporelle à  $n_t = 10$ . Le premier paramètre à étudier est le rayon  $R$  du domaine fictif. Dans la Table 2, on remarque que la variation du nombre d'intervalle temporelle n'influence ni l'ordre de troncature, ni le rayon de validité de la série. On fixe le rayon du domaine fictif à  $R = 1.5$  et on va donc étudier l'influence du nombre de points de collocation  $N_d$  et sur le bord intérieur  $N_b$ . La Table 3 montre que le nombre de points de collocation et sur le bord intérieur n'influence ni le rayon validité, ni l'ordre de troncature de la série. Le dernier paramètre à étudier est le nombre de points sur le bord fictif  $N_s$ . La table 4 montre aussi que le nombre de points sur le bord fictif n'influence guère le rayon et l'ordre de troncature de la série. Seul le nombre d'intervalle temporelle semble apporté une fluctuation sur le rayon de validité et l'ordre de troncature de la série.

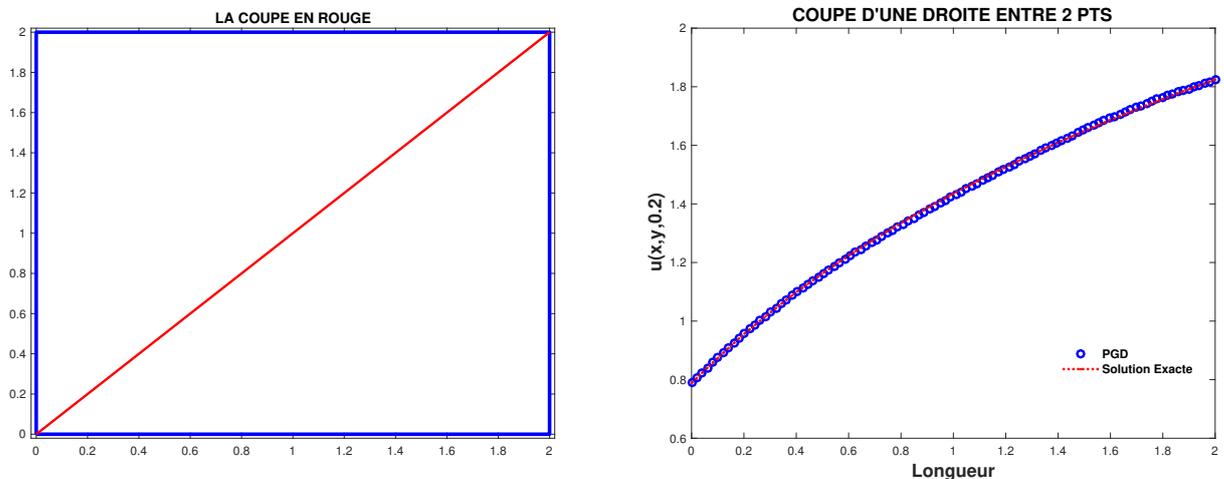
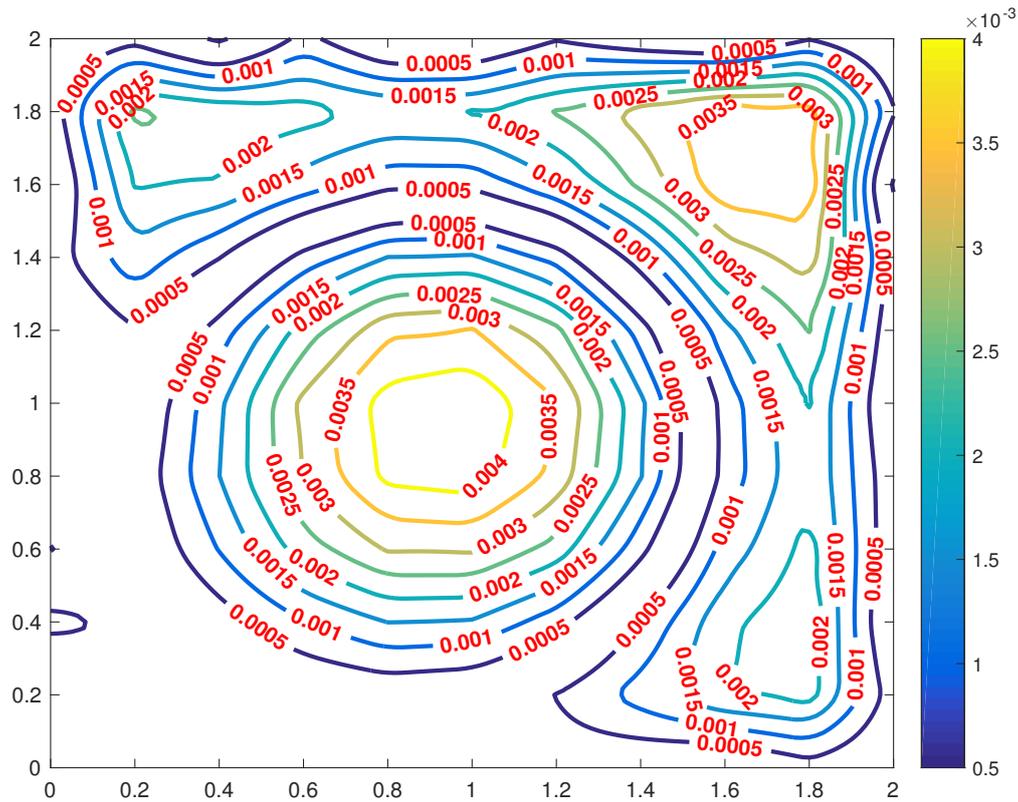


FIGURE 2: (Gauche) : Géométrie du domaine carré. (Droite) : Comparaison des résultats MAN-PGD-MFS avec la solution exacte le long de la ligne en rouge sur la figure de Gauche à  $t = 0.2$

Pour étudier l'influence du paramètre de discrétisation  $n_t$ , on a calculé le rayon de convergence de la MAN en fonction de l'ordre de troncature pour différentes valeurs de  $N_d$ ,  $N_s$  et  $R$ .

$n_t$	2	10	50	100
$n$	15	12	12	12
$\epsilon_{max}$	1.0368	1.0735	1.1185	1.1239

TABLE 1: Valeurs de  $\epsilon_{max}$  en fonction de l'ordre de troncature  $n$  pour différentes valeurs de  $n_t$  avec  $N_d = 121$ ,  $R = 1.5$  et  $N_s = 30$

FIGURE 3: Erreur relative  $E_{num}$  en espace à  $t = 0.2$ 

<b>R</b>	1.5	3	6	12
<b>n</b>	12	12	12	12
<b><math>\epsilon_{max}</math></b>	1.0735	1.0729	1.0729	1.0729

TABLE 2: Valeurs de  $\epsilon_{max}$  en fonction de l'ordre de troncature  $n$  pour différentes valeurs de  $R$  avec  $n_t = 10$ ,  $N_d = 121$  et  $N_s = 30$ 

## 6.2 Exemple 2 : Fonction source séparable

On considère l'équation de chaleur sur un domaine de Cassini de la figure (4) et un intervalle de temps  $\mathcal{T} = [0, 1]$  avec une source de terme définie par :  $f(x, y, t) = (1 + 2t) \cos(x + y)$ . La forme du domaine Cassini est décrite par :  $\Omega = \{x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)\}$  avec  $r = \left(\cos(3\theta) + \sqrt{2 - \sin(3\theta)^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ . Nous supposons une condition de limite et initiale homogène. Nous résolvons le même problème avec la boîte à outils des EDP de Matlab (pdetool) pour valider le modèle actuel. La boîte à outils pdetool est basé sur un modèle élément fini complet et fournit des solutions numériques pour des équations différentielles partielles en 2D. Le maillage de l'espace et la discrétisation du temps utilisées avec cette boîte à outils est effectuée afin d'atteindre la précision maximale de la solution. On a réalisé une coupe du domaine et on a comparé la solution de notre algorithme avec la solution numérique fournie par Pdetool le long de cette coupe. Sur la figure (5), on remarque une meilleure approximation du problème avec notre approche. Les résultats obtenus avec notre couplage MAN-PGD-MFS sont en bon accord avec la solution de référence. La figure (6) montre que l'erreur relative  $E_{num}$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $t = 1$ .

$N_d$	36	121	441	1071
$N_b$	20	40	80	140
$n$	12	12	12	12
$\epsilon_{\max}$	1.068	1.0735	1.0737	1.0737

TABLE 3: Valeurs de  $\epsilon_{max}$  en fonction de l'ordre de troncature  $n$  pour différentes valeurs de  $n_t$  avec  $R = 2$ ,  $N_d = 20$  et  $N_s = 30$

$N_s$	10	30	120
$n$	12	12	12
$\epsilon_{\max}$	1.0661	1.0735	1.0793

TABLE 4: Valeurs de  $\epsilon_{max}$  en fonction de l'ordre de troncature  $n$  pour différentes valeurs de  $N_s$  avec  $R = 1.5$ ,  $N_d = 121$  et  $N_b = 40$

## 7 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé un algorithme combinant la méthode des solutions fondamentales, les techniques de décomposition propre généralisée et la méthode asymptotique numérique pour résoudre l'équation de la chaleur non linéaire transitoire. A l'aide des techniques de la MAN, notamment les techniques d'homotopie et de perturbation, nous avons transformé le problème initial en une succession de problème transitoire linéaire. Nous avons ensuite utilisé la PGD pour découpler chaque problème transitoire linéaire en deux problèmes, l'un en temps que nous avons résolu par la méthode de Runge Kutta et l'autre en espace résolu par la MFS. Nous avons étudié l'influence des paramètres de MFS et nous avons constaté que ces paramètres n'influent pas sur le rayon de validité et l'ordre de troncature de la série. Nous avons aussi étudié l'influence du nombre d'intervalle temporelle et le constat est qu'il influe sur le rayon de validité de la série par contre à partir d'une certaine valeur de  $n_t$ , l'ordre de troncature de la série reste constant. La convergence de notre approche a été aussi vérifiée notamment au temps final sur différentes géométries et fonctions sources de chaleur. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la référence. Des travaux sont en cours pour étendre cette technique dans un cadre 3D, pour un intervalle de temps relativement grand et aux problèmes visco-plastiques.

## Références

- [1] P. Ladevèze, *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Springer Verlag, 1999.
- [2] G. Bonithon, P. Joyot, F. Chinesta, P. Villon, Non-incremental boundary element discretization of parabolic models based on the use of the proper generalized decompositions, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 (1) (2011) 2–17.
- [3] M. Beringhier, A. Leygue, F. Chinesta, J.C. Granddier, Coupling Asymptotic Numerical Method and Proper Generalized Decomposition in bifurcation problems.
- [4] B. Sarler, R. Vertnik, Meshfree explicit local radial basis function collocation method for diffusion problems, *International Journal Computers and Mathematics with applications* 51(2006) 1269-1282.

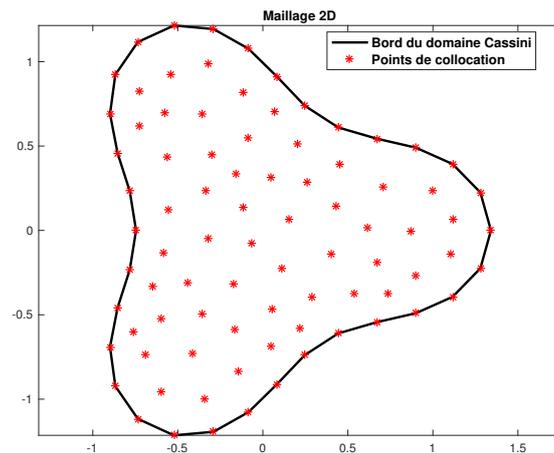
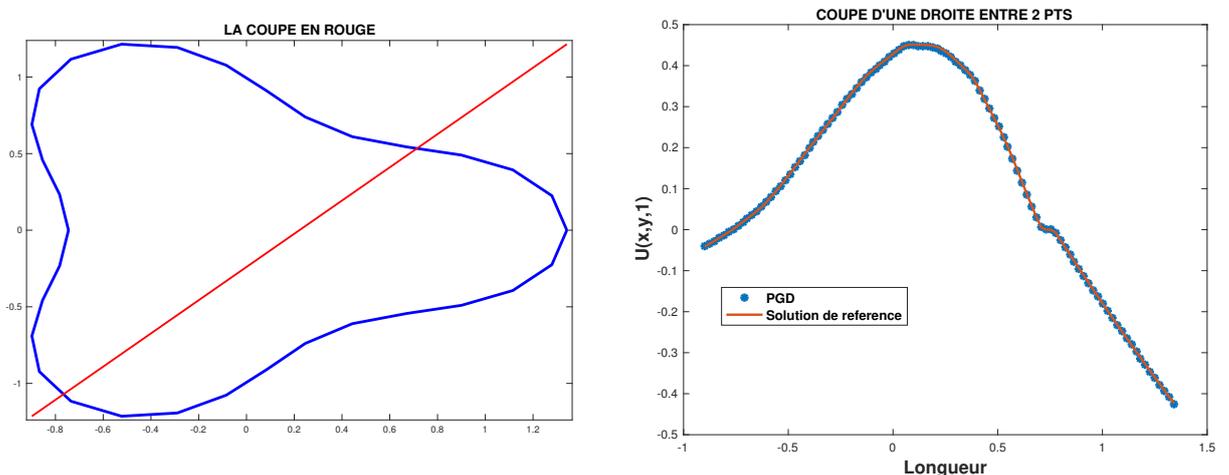


FIGURE 4: Géométrie du domaine cassini

FIGURE 5: (Gauche) : Géométrie du domaine cassini. (Droite) : Comparaison des résultats MAN-PGD-MFS avec la solution de référence le long de la ligne en rouge sur la figure de Gauche à  $t = 1$ 

- [5] A. Tri, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, Perturbation technique and method of fundamental solution to solve nonlinear Poisson problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 (2011) 273–278.
- [6] N. Damil, M. Potier-Ferry, A new method to computed bifurcation : application to the buckling of imperfect elastic structures, *International Journal of Engineering Science*, Volume 28, Issue 9, (1990) 943-957.
- [7] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, The asymptotic numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics. *Revue Européenne des Eléments Finis* 1994;3 :281–97.
- [8] A. Tri, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, Méthode asymptotique numérique pour les fluides visqueux incompressibles et détection de bifurcations de Hopf. Thèse de l'Université de Metz, France, 1996.
- [9] A. Tri, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, Résolution des équations de Navier Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une méthode asymptotique numérique. *Revue Européenne des Eléments Finis* 1996;5 :415–42.

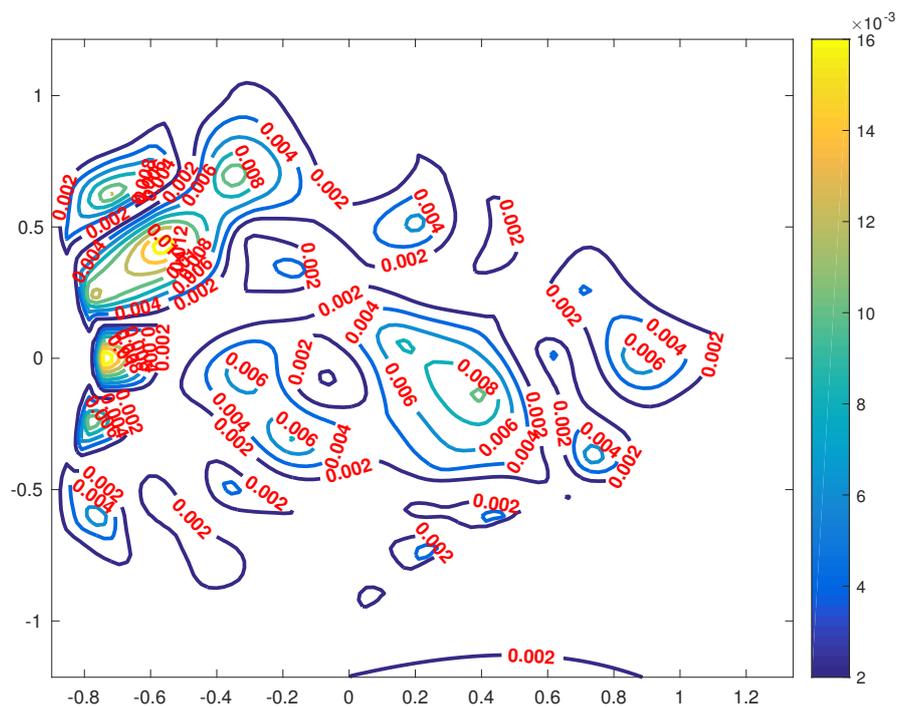


FIGURE 6: Erreur relative  $E_{num}$  en espace à  $t = 1$

- [10] B. Cochelin, A path-following technique via an asymptotic-numerical method, *Computers and Structures*, Volume 53 ,Issue 5 (1994) 1181–1192.
- [11] M.A. Golberg, C. Chen, A. Muleshkov, The method of fundamental solutions for time-dependant problems, *Boundary Element Technology XIII*, 377–386, (1999).
- [12] J.A. Kolodziej, M.Mierzwiczak, Transient heat conduction by different versions of the Method of Fundamental Solutions – a comparison study, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*,75–88 (2010).
- [13] A. Tri, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, High order continuation algorithm and meshless procedures to solve nonlinear poisson problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 36, Issue 11 (2012), 1705–1714.
- [14] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto, Proper generalized decomposition of multi- scale models, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*,1114–1132, (2010).
- [15] F. Chinesta, A. Leygue, M. Beringhier, T.L. Nguyen, J.C. Grandidier, F. Pasavento and B. Schrefler, Towards a Framework for Non-Linear Thermal Models in Shell Domains. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*.
- [16] D. L. Young, Y. C. Lin, C. M. Fan, C. L. Chiu, The method of fundamental solutions for solving incompressible Navier-Stokes problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 33 (8-9) (2009) 1031–1044.
- [17] S. Reutskiy, and Yu, The method of fundamental solutions for problems of free vibrations of plates, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 31 (1) (2007) 10–21.

- [18] C. C. Tsai, D. L. Young, C. L. Chiu, C. M. Fan, Numerical analysis of acoustic modes using the linear least squares method of fundamental solutions, *Journal of Sound and Vibration* 324 (3-5) (2009) 1086–1110.