



**HAL**  
open science

## Modèle IOHMM pour le diagnostic et le pronostic de systèmes

Kamrul Islam, Christophe Simon, Philippe Weber

► **To cite this version:**

Kamrul Islam, Christophe Simon, Philippe Weber. Modèle IOHMM pour le diagnostic et le pronostic de systèmes. 22e Congrès de Maîtrise des Risques et de Sécurité de Fonctionnement, Institut pour la Maîtrise des Risques,  $\lambda\mu 22$ , Oct 2020, Le Havre (virtual), France. hal-03462822

**HAL Id: hal-03462822**

**<https://hal.science/hal-03462822>**

Submitted on 2 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Modèle IOHMM pour le diagnostic et le pronostic de Systèmes

## IOHMM Model for the diagnostic and prognostic of Systems

Kamrul Islam SHAHIN  
Université de Lorraine, CNRS, CRAN  
F-54000 Nancy, France  
kamrul-islam.shahin@univ-lorraine.fr

Christophe SIMON  
Université de Lorraine, CNRS, CRAN  
F-54000 Nancy, France  
christophe.simon@univ-lorraine.fr

Philippe WEBER  
Université de Lorraine, CNRS, CRAN  
F-54000 Nancy, France  
philippe.weber@univ-lorraine.fr

**Résumé**— Dans cet article, nous proposons d'exploiter une forme évoluée de modèle de Markov caché pour représenter le processus d'évolution de l'état de santé d'un système. Ce type de modèle correspond bien au principe d'évolution d'un élément (état de santé) complexe et uniquement observable au travers de variables d'observation. Sa nature stochastique permet la prise en compte de l'incertitude de données et de modèle. Dans ce contexte, les réseaux bayésiens dynamiques sont particulièrement bien appropriés pour représenter un HMM conditionné par des états de conditions opérationnelles pour former les Input-Output HMM.

**Mots Clés** — dégradation, état de santé, condition opérationnelle

**Abstract**— In this paper, we propose to exploit an advanced form of Hidden Markov Model to represent the process of evolution of a system's health. This type of model corresponds well to the evolution principle of an item (health status) that is complex and only observable through observation variables. Its stochastic nature allows to take into account data and model uncertainty. In this context, dynamic Bayesian networks are particularly well suited to represent an HMM conditioned by states of operational conditions to build Input-Output HMM.

**Keywords:** *degradation, Health State, Operating conditions*

### I. INTRODUCTION

Pronostiquer avec précision l'état futur d'un système est assez difficile à réaliser alors que le système se dégrade, et ce d'autant plus que de multiples conditions opérationnelles varient. Le diagnostic est alors un point clé pour le calcul du pronostic de l'état de santé du système. Par ailleurs, un système même en apparence simple est rapidement complexe au regard de son état de santé, car il a de nombreuses interactions avec son milieu, possède de nombreux mécanismes de dégradation concourants et subit les contraintes opérationnelles qui sont autant d'agresseurs pour son état de santé, et ce tout au long de sa durée de vie. Aussi, un diagnostic optimal est difficile à obtenir si on considère l'ensemble des contraintes de fonctionnement et leur impact sur la dégradation de l'état de santé. Aussi, dès lors que le niveau de dégradation ou l'état de santé peut être estimé correctement, et ce dans toutes les conditions d'exploitation alors un pronostic peut être envisagé. La qualité du pronostic d'évolution de l'état de santé sera impactée aussi bien par la qualité du diagnostic et par la qualité de la modélisation de l'évolution. Tout du moins, ce pronostic peut être de qualité suffisante pour planifier des actions de maintenance avant que le système ne tombe en panne.

Le diagnostic est un domaine de recherche actif avec un large éventail d'applications et de méthodes. Dans la littérature abondante sur le sujet, trois grandes approches sont considérées : les approches à base de modèles quantitatifs, les approches à base de modèles qualitatifs ou les méthodes à base de d'historique de données (cf. Fig.1) [1]. Dans le cas d'un processus de dégradation, il peut être difficile de formaliser un modèle quantitatif, d'une part parce qu'il est difficile d'accéder aux données de dégradation, d'autre part parce que le processus est complexe. Les modèles qualitatifs sont également assez difficiles à mettre en œuvre, car ils nécessitent généralement une bonne connaissance de la physique de dégradation et des interactions entre processus concourants. C'est pourquoi une approche basée sur les données et un modèle stochastique ont été privilégiés ici puisque le modèle est par essence incertain et qu'il est toujours possible d'observer les conséquences d'une dégradation sans en observer l'état.

Les méthodes stochastiques sont nombreuses dans le domaine de la sûreté de fonctionnement et les modèles markoviens sont largement utilisés [2], mais aussi les réseaux de Petri stochastiques [3] même si chacun d'entre eux apporte son lot d'avantages et de contraintes. Les réseaux bayésiens statiques et dynamiques représentent une évolution intéressante [4] des chaînes de Markov, car ils en sont une

forme compacte. Les modèles stochastiques présentent donc l'intérêt de considérer l'incertitude inhérente aux données et à notre incapacité à élaborer un modèle déterministe exact. La dégradation est une notion complexe. Dans l'approche stochastique que nous considérons, le problème de modélisation de la dégradation fait appel à une forme plus complexe que les chaînes de Markov puisque l'accès aux états de dégradation ou de santé n'est pas possible directement, car il n'existe pas de capteur de dégradation. Seules les conséquences en sont visibles. Aussi, les modèles Markoviens cachés (HMM) sont bien appropriés à la modélisation des processus de dégradation. Il existe bien évidemment d'autres modèles stochastiques comme les processus Gamma, Wiener ...[6]. Les réseaux bayésiens dynamiques et notamment les 2TBN (2 Time slices Bayesian Networks) [7] sont particulièrement bien appropriés puisqu'ils sont également capables de représenter un HMM.

Les modèles HMM ont été introduits par Baum au début des années 1970 [8]. Ils ont été utilisés pour la première fois dans [9] par Rabiner pour la reconnaissance de la parole. Leur usage à des fins de diagnostic et de pronostic a été proposé dans [10]. Le diagnostic d'un outil de coupe par HMM a été développé dans [11]. Une approche avancée de diagnostic pour une turbine à gaz a été proposée dans [12] et l'application sur une foreuse a été proposée dans [13]. Dans [14], une méthode de diagnostic appliquée à une machine tournante est discutée. Deux autres modèles HMM sont implémentés dans [15] et [16] pour la détection des défauts de roulements. Des applications de diagnostic dans un contexte d'usinage sont décrites dans [17], [18] et [19]. Pour l'ensemble de ces applications, seuls des modèles classiques de HMM sont employés. L'hypothèse sous-jacente est donc que le processus est homogène et unique, car indépendant des conditions opérationnelles.

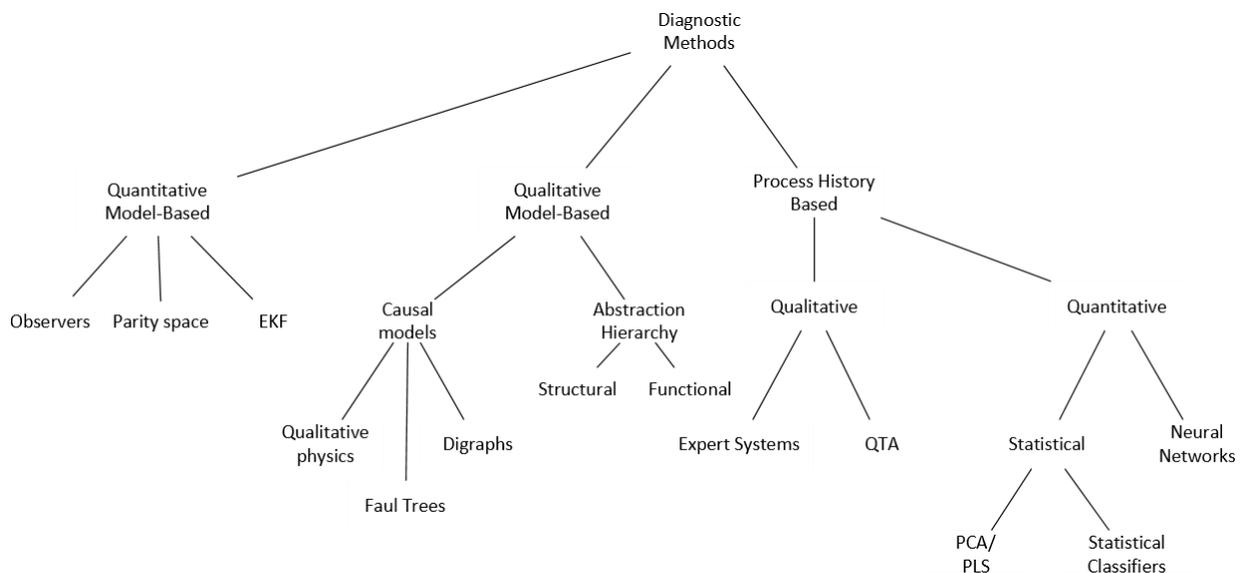


Fig. 1. Les approches de diagnostic [35]

Certains modèles modifiés tels que le modèle semi-Markov caché (HsMm) sont utilisés dans [20] et dans le cadre d'un diagnostic dans [21]. Un modèle de Markov caché à mélange gaussien (MogHMM) est utilisé pour le diagnostic de défauts [22] et un modèle de Markov semi-caché non stationnaire (NSHSM) [23] est utilisé pour le pronostic de santé de pompes. Mais les limites inhérentes aux HMM, *c'est-à-dire* pour l'essentiel l'indépendance aux conditions opérationnelles existe toujours. Or, si un système est soumis à des conditions opérationnelles différentes, celles-ci ne sont pas considérées et le modèle est un modèle moyen ou indépendant à ces conditions. Par ailleurs, les modèles de type HMM sont généralement basés sur une seule variable d'observation, or les conséquences d'une dégradation peuvent s'observer indirectement sur un ensemble de variables. Ainsi, un HMM ordinaire ne peut être utile pour réaliser un diagnostic dès lors que le problème considère des conditions de fonctionnement multiples et des observations multiples. Dans [24,25], un modèle HMM à multiples branches a été exploité. Il s'agit en fait d'un

ensemble de HMM classiques entraînées chacune avec des conditions opérationnelles fixes. L'usage en diagnostic puis en pronostic suppose de sélectionner le bon modèle HMM ou de commuter entre les modèles. La difficulté majeure réside dans la construction de lots de données conformes pour l'apprentissage de chaque HMM puis une sélection du modèle le plus approprié pour réaliser un bon diagnostic et un meilleur pronostic.

Pour tenir compte des conditions opérationnelles dans un processus markovien caché, mais également pour modéliser les multiples variables d'observations, Bengio & Frasconi [26] ont proposé l'Input-Output Hidden Markov Model (IOHMM). Weber et al. [7, 30] ont travaillé avec un IOHMM pour la fiabilité du système à l'aide d'un réseau bayésien dynamique (RBD) à variables exogènes qui sont des formes compactes d'IOHMM [4]. Ce type d'IOHMM sous forme de RBD a été utilisé pour diagnostiquer un générateur diesel dans [31]. Cette application procède par

simulation d'un réseau bayésien, mais aucun apprentissage du modèle n'est proposé ni de sorties multiples.

Inspiré par ces travaux, mais aussi les points d'amélioration possibles (situation d'apprentissage, prise en compte de variables exogènes et de sorties multiple), cet article propose un ensemble d'algorithmes pour l'apprentissage, le diagnostic et le pronostic de l'état de dégradation de systèmes. L'article est organisé comme suit : la section 2 donne la base théorique des HMM et les algorithmes fondamentaux d'apprentissage. La section 3 est consacrée à la modification des algorithmes pour traiter l'IOHMM. La section 4 montre comment les algorithmes sont utilisés dans le cadre d'une application. Enfin, la section 5 dresse quelques conclusions et perspectives.

## II. ÉLÉMENTS ALGORITHMIQUES DE BASE DES HMM ET IOHMM

Supposons que  $X_k$  représente l'état caché non observable du niveau de dégradation ou l'état de santé d'un système. Le modèle de dégradation sous forme d'un processus stochastique du système est donné par la chaîne de Markov  $P(X_k|X_{k-1})$  tel que présenté à la Fig. 2 avec son équivalent sous forme de RBD et d'un 2 Time slices Bayesian Network (cf. Fig. 3). Dans l'exemple de la Fig. 2, la variable  $X$  a 3 états discrets  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  au cours du temps. Les RBD représentent quant à eux l'évolution de variables  $X$  à 3 états aux cours du temps. Le réseau 2TBN représente la récurrence homogène entre deux instances consécutives de la variable  $X$ .

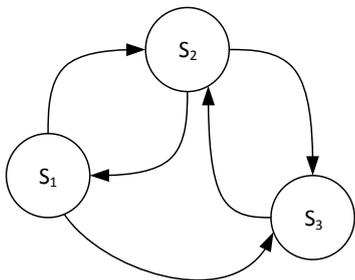


Fig. 2. Chaîne de Markov à 3 états

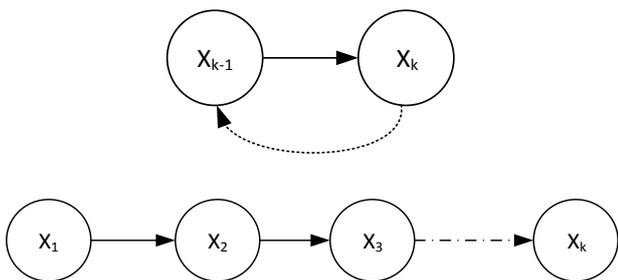


Fig. 3. Réseaux bayésiens dynamiques équivalent à une chaîne de Markov

Si l'état du système ne peut être observé directement, mais au travers d'une variable d'observation  $Y$  telle que  $B = P(Y_k|X_k)$  alors la chaîne de Markov devient un HMM telle que représentée sous la forme d'un 2TBN à la Fig. 4.a. Par ailleurs, si la variable  $X$  à chaque instant  $k$  est conditionnée par l'état de la variable exogène  $U$  à l'instant

$k - 1$  alors il s'agit d'un IOHMM dont le modèle 2TBN est donné à la Fig. 4.b.

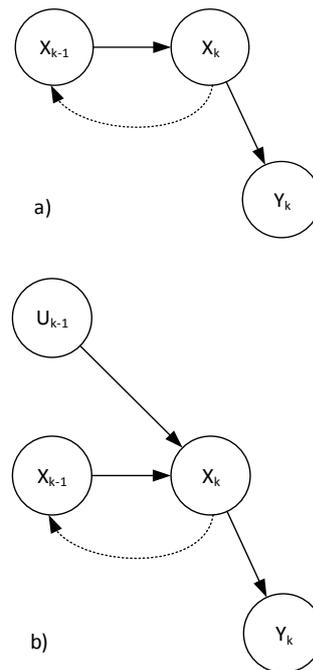


Fig. 4. Structure de Réseaux Bayésiens Dynamique équivalent aux HMM et IOHMM

La variable exogène  $U_k$  est connue ou observée et représente une condition opérationnelle (une commande ou une condition environnementale) conditionnant l'évolution du processus de dégradation. Le processus markovien caché s'écrit alors  $A_N = P(X_k|X_{k-1}, U_{k-1})$  où  $N$  représente les états possibles de  $U_k$  [30]. Formellement, un IOHMM est bien adaptée à la modélisation de processus stochastiques complexes tels que la probabilité jointe est  $P(Y_k, X_k, U_{k-1})$  [31]. Si on tient compte de la séquence d'états cachés  $X_{1:k-1}$  et de la séquence d'entrée  $U_{1:k-1}$ , il est possible de définir la probabilité jointe à partir de la distribution initiale des états cachés  $\pi = P(X_1)$ . Un IOHMM est donc complètement défini par le triplet :  $\Lambda = (A_N, B, \pi)$ . Si la variable  $Y$  est un vecteur de variables d'observation indépendantes, alors  $B$  est un ensemble de matrices de probabilités  $B^M = P(Y_k^M|X_k)$  avec  $M$  l'indice de la variable d'observation.

La commutation du processus caché se fait sur la base du mécanisme de commutation comme proposé dans [32]. Cette commutation induit directement un problème algorithmique d'apprentissage des paramètres à partir de séquences multiples. Les algorithmes d'apprentissage de paramètres proposés par Baum et Welch [8], tout comme l'algorithme de Viterbi [33] pour connaître l'état caché, sont dédiés aux HMM et ne peuvent s'appliquer directement aux IOHMM et demandent une adaptation exposée ci-après.

### A. Algorithmes Forward et Backward

Les algorithmes Forward et Backward sont largement utilisés dans les problèmes de HMM. Ils permettent de calculer efficacement la probabilité qu'une séquence ait été générée par un HMM. Ils supposent donc que le modèle  $\Lambda = (A, B, \pi)$  est connu. Si la séquence d'observations de la variable  $Y$  est donnée alors les algorithmes peuvent calculer

$P(X|Y)$  à l'aide de l'algorithme Forward basé sur la récurrence suivante :

### Forward

1. Initialisation :  
 $\alpha(X_1) = P(Y_1|X_1)P(X_1)$ .
2. Récurrence :

$$\alpha(X_k) = \sum_{X_{k-1}=1}^N \alpha(X_{k-1})P(X_k|X_{k-1})P(Y_k|X_k)$$

pour  $2 \leq k \leq K$ .

### Backward

1. Initialisation :  
 $\beta(X_K = s_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ , où  $k = K$ .
2. Récurrence :

$$\beta(X_k) = \sum_{X_{k+1}=1}^N \beta(X_{k+1})P(Y_{k+1}|X_{k+1})P(X_{k+1}|X_k)$$

pour  $(K-1) \leq k \leq 1$ .

Sur cette base algorithmique, on peut calculer la probabilité que le HMM ait généré la séquence d'observation avec l'équation 1 :

$$P(Y_k|\Lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k) \beta_i(k); \forall k \quad (1)$$

Comme on le voit, ces deux algorithmes évaluent la probabilité que le HMM ait généré la séquence d'observations de la variable  $Y$ . Toutefois, une seule variable est considérée et il n'y a pas de conditionnement aux variables d'entrée, ce qui demande des modifications ad hoc pour l'application aux IOHMM.

### B. Estimation du modèle par l'algorithme de Baum-Welch

Parmi les problèmes posés dans le cas des HMM, il y a la détermination des paramètres  $\Lambda = (A, B, \pi)$  sachant des séquences d'observation  $o$ . Il s'agit de trouver  $\Lambda$  qui maximise  $P(o|\Lambda)$ . Dans ce cas, l'algorithme de Baum-Welch est utilisé. Il s'agit d'un algorithme d'estimation-maximisation de type programmation dynamique. Il peut éventuellement converger vers un minimum local. Il existe d'autres algorithmes notamment par métaheuristique [36].

Le problème de maximisation est de grande complexité algorithmique. A l'aide des algorithmes précédents, on calcule la probabilité que le HMM  $\Lambda$  ait généré l'ensemble des séquences  $Y$  grâce à l'équation 2. La variable auxiliaire  $\varepsilon_k(i, j)$  définie par l'équation 3 où  $i, j$  représente respectivement les indices des états cachés et les symboles d'émission.

$$P(Y_k|\Lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(X_k) \beta_i(X_k); \forall k \quad (2)$$

$$\varepsilon_k(i, j) = \frac{\alpha_i(X_k) \cdot a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot \beta_j(X_{k+1})}{P(Y_k|\Lambda)} \quad (3)$$

La variable auxiliaire  $\varepsilon_k(i, j)$  est finalement utilisé pour actualiser les paramètres selon l'algorithme ci-dessous.

1. Distribution initiale :  $\pi_i = \varepsilon_1(i, j)$ , où  $1 \leq i \leq N$
2. Probabilité de transition :

$$a_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{K-1} \varepsilon_k(i, j)}{\sum_{k=1}^{K-1} \sum_{j=1}^N \varepsilon_k(i, j)}$$

3. Probabilité d'émission :

$$b_{jk} = \frac{\sum_{k=1}^K \varepsilon_k(i, j)}{\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N \varepsilon_k(i, j)}$$

Ces étapes sont répétées jusqu'à ce que les changements entre deux résultats convergent.

### C. Algorithme de Viterbi

Cet algorithme permet le calcul de la séquence la plus probable d'états cachés étant donné les observations, ce qui est nommé le chemin de Viterbi. On obtient donc l'état le plus probable à chaque instant, ce qui constitue le diagnostic attendu du système. L'algorithme se définit ainsi :

1. Initialisation :

$$\omega(X_1) = P(X_1, Y_1)$$

2. Maximisation de la variable auxiliaire pour  $X_2$ :

$$\omega(X_2) = \max_{(X_1)} P(X_{1:2}, Y_{1:2})$$

3. Récursion maximale :

$$\omega(X_k) = \max_{(X_{1:k-1})} P(X_{1:k}, Y_{1:k})$$

$$= \max_{(X_{k-1})} P(Y_k|X_k)P(X_k|X_{k-1})\omega(X_{k-1})$$

A chaque nouvelle observation  $Y_k$ , il est donc possible de réestimer le chemin de Viterbi et notamment l'état de la chaîne cachée  $X_k$ . Cela constitue une forme de diagnostic en ligne de l'état de santé ou du niveau de dégradation du système modélisé. Il est à noter que le chemin de Viterbi à l'instant  $k$  peut être différent de celui à l'instant  $k-1$  grâce à la connaissance apportée par la nouvelle observation.

### D. Pronostic par simulation

Le pronostic par un HMM consiste à caractériser l'instant où l'état caché indésirable ou définissant un niveau de performance inacceptable est atteint sachant que l'état actuel est défini par l'équation 3. Pour cela, plusieurs techniques peuvent être employées. Un calcul formel à l'aide de l'équation 4 donnera le temps moyen d'atteinte de l'état inacceptable qui est absorbant (MTR) ou une simulation de Monte-Carlo de la chaîne cachée qui nous donnera la distribution des temps d'atteinte de ce même état sachant la distribution actuelle sur les états.

$$MRT = \frac{\det \begin{vmatrix} 0 & P(X_k) \\ 1 & P(X_k|X_{k-1}) \end{vmatrix}}{\det |P(X_k|X_{k-1})|} \quad (4)$$

### III. ADAPTATION ALGORITHMIQUE POUR LES IOHMM MULTI-ENTREES/MULTI-SORTIES

Les IOHMM multi-entrées/multi-sorties sont une extension des HMM, tenant compte d'une part que plusieurs variables  $Y$  sont observées et qu'une entrée  $U$  permet la commutation du processus caché entre plusieurs matrices définissant des dynamiques différentes, mais contraintes sur le même nombre d'états. La Fig. 5 représente un IOHMM multi-entrées/multi-sorties sous la forme d'un 2TBN, car la représentation graphique est plus explicite.

Compte tenu de ces multiples sorties  $Y_1$  à  $Y_q$  et de ces multiples entrées  $U_1$  à  $U_p$ , la définition initiale d'un HMM est étendue. On définit complètement un IOHMM telle qu'à la Fig. 5 à l'aide d'un triplet  $\Lambda = (A_p, B_q, \pi)$ . Il est à noter que chacune des variables d'entrée et de sortie est définie sur son propre espace (nombre de symboles) et que dans le modèle considéré ici, chacune est indépendante. Cette indépendance n'est pas une contrainte, mais simplifie grandement le problème. De facto, les algorithmes fondamentaux des HMM sont à redéfinir pour cette nouvelle structure.

#### A. Algorithmes Forward et Backward

Fondamentalement, la structure algorithmique est la même. Toutefois, le processus caché est conditionné par l'entrée. L'hypothèse d'indépendance des entrées permet de fusionner les entrées comme une seule variable agrégée dont le nombre d'états est le produit du nombre d'états de chacune des variables. L'ensemble des états est donc le produit cartésien des états de variables d'entrée. Dans la suite du document, nous utiliserons donc uniquement la variable  $U$  pour l'entrée. Le nombre d'états de  $U$  définit automatiquement le nombre de matrices  $A$  du processus caché. Les sorties  $Y$  sont indépendantes, aussi on définit autant de matrices  $B$  que de sorties pour mettre en relation l'état caché de l'IOHMM et chacune des sorties.

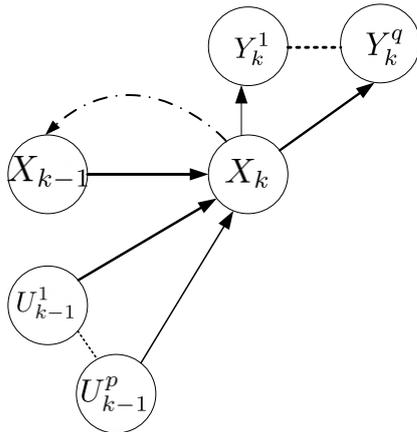


Fig. 5. IOHMM multi-entrées/multi-sorties sous forme d'un 2TBN

Les algorithmes Forward et Backward deviennent :

#### Forward

- *Initialisation* :  $\alpha(X_1) = \prod_{i=1}^p P(Y^i|X_1)P(X_1)$
- *Récurrance* :

$$\alpha(X_k) = \sum_{X_{k-1}=1}^N \alpha(X_{k-1})P(X_k|X_{k-1}, U_{k-1}) \prod_{i=1}^p P(Y_k^i|X_k)P(X_1)$$

pour  $2 \leq k \leq K$ .

#### Backward

- *Initialisation* :  $\beta(X_K = s_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , when  $k = K$ .
- *Récurrance* :

$$\beta(X_k) = \sum_{X_{k+1}=1}^N \beta(X_{k+1}) \cdot \prod_{i=1}^p P(Y_{k+1}^i|X_{k+1})P(X_{k+1}|X_k, U_k)$$

pour  $(K-1) \leq k \leq 1$ .

Dans les équations précédentes,  $\prod_{i=1}^p P(Y_{k+1}^i|X_{k+1})$  est le produit de Hadamard des distributions de probabilités et  $U_k$  est l'état combiné des entrées.

#### B. Algorithme de Baum-Welch

De la même manière que précédemment, l'algorithme de Baum-Welch destiné à l'estimation des paramètres du modèle sachant les séquences d'observation doit être révisé.

$$P(Y_k|\Lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(X_k) \beta_i(X_k); \forall k \quad (5)$$

$$\varepsilon_k(i, j) = \frac{\alpha_i(X_k) \cdot a_{ij}^p \cdot b_{jk}^q \cdot \beta_j(X_{k+1})}{P(Y_k|\Lambda)} \quad (6)$$

Ainsi, l'algorithme suivant est défini :

1. Distribution initiale :  $\pi_i = \varepsilon_1(i, j)$ , where  $1 \leq i \leq N$
2. Probabilité de transition :

$$a_{ij}^p = \frac{\sum_{k=1}^{K-1} \varepsilon_k(i, j) \cdot \mathbf{1}_{U_k=p}}{\sum_{k=1}^{K-1} \gamma_k(j) \cdot \mathbf{1}_{U_k=p}}$$

3. Probabilité d'émission :

$$b_{jk}^q = \frac{\sum_{k=1}^K \gamma_k(j) \cdot \mathbf{1}_{Y_k^q=v_m}}{\sum_{k=1}^K \gamma_k(j)}$$

Ces étapes sont répétées jusqu'à ce que les changements entre deux résultats convergent.

$\mathbf{1}_{X_k(U_k=p)}$  est la fonction indicatrice telle que  $\mathbf{1}_{X_k(U_k=p)} = \begin{cases} 1 & \text{if } U_k = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et de manière similaire on a  $\mathbf{1}_{Y_k^q=v_m} = \begin{cases} 1 & \text{if } Y_k^q = v_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

#### C. Algorithme de Viterbi

Encore une fois et de manière similaire aux cas précédents, l'algorithme de Viterbi destiné à identifier l'état le plus probable à l'instant  $k$  sachant les observations et les commandes précédentes est défini à partir de la version HMM ainsi :

$$\text{On a : } P(X|Y^1, \dots, Y^q, U) \propto P(X, Y^1, \dots, Y^q, U)$$

$$\begin{aligned} \max_{(X_{1:k})} P(X|Y^1, \dots, Y^q, U) \\ = \max_{(X_{1:k})} P(X, Y^1, \dots, Y^q, U) \end{aligned}$$

- *Initialisation :*

$$\omega(X_1) = P(X_1, Y_1^1, \dots, Y_1^q)$$

- *Récurrance :*

$$\begin{aligned} \omega(X_k) &= \max_{(X_{1:k-1})} P(X_{1:k}, Y_{1:k}^1, \dots, Y_{1:k}^q, U_{1:k}) \\ &= \max_{(X_{k-1})} \sum_{i=1}^p P(Y_k^i | X_k) P(X_k | X_{k-1}, U_{k-1}) \omega(X_{k-1}) \end{aligned}$$

#### D. Pronostic de durée de vie résiduelle

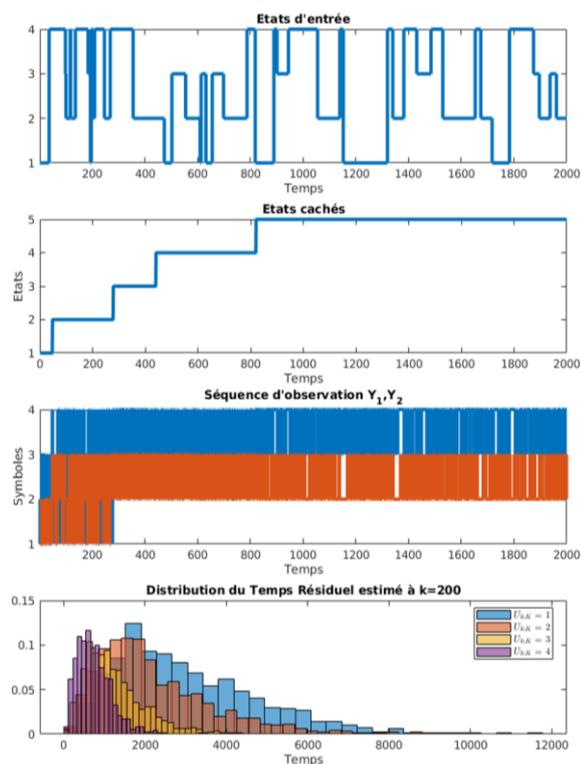
Comme dans la section 2.4, il est possible de fournir la durée de vie résiduelle soit par calcul soit par simulation avec les avantages et inconvénients énoncés précédemment. Cependant, le pronostic doit tenir compte des entrées/commandes futures.

$$T_p = \frac{\det \begin{vmatrix} 0 & P(X_k) \\ 1 & P(X_k | X_{k-1}, U_k = p) - I \end{vmatrix}}{\det |P(X_k | X_{k-1}, U_k = p) - I|} \quad (11)$$

L'équation 11 impose que l'entrée  $U$  soit constante dans le futur aussi, il existe autant de durée résiduelle de vie que de valeurs possibles pour  $U$ . Ce qui intéresse l'utilisateur final est donc la gamme de valeurs possibles prises par  $T$ . Dans le cas d'une simulation, la séquence d'entrée  $U_{k:K}$  peut être quelconque ou définie selon la connaissance possédée.

#### IV. ILLUSTRATION NUMERIQUE

Pour illustrer les éléments théoriques définis précédemment, nous utilisons l'application numérique suivante. Considérons un processus à 5 états cachés, 2



entrées à 2 états  $U_1$  et  $U_2$ , et 2 sorties  $Y_1$  et  $Y_2$  possédant respectivement 3 et 4 états.

Le modèle estimé est donné ci-dessous :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0.999 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.999 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.999 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.999 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0.996 & 0.004 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.996 & 0.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.999 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.999 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 0.999 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.998 & 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.996 & 0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.998 & 0.002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_4 &= \begin{pmatrix} 0.993 & 0.007 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.996 & 0.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.996 & 0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.996 & 0.004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après avoir estimé les matrices du modèle IOHMM grâce à l'algorithme de Baum-Welch modifié, nous pouvons diagnostiquer les états cachés grâce à l'algorithme de Viterbi. La Fig. 6 montre la séquence des observations et les probabilités des états estimés par un HMM classique en tenant compte soit de  $Y_1$  soit de  $Y_2$ . Elle montre également les états estimés par l'IOHMM tenant compte des entrées et sorties.

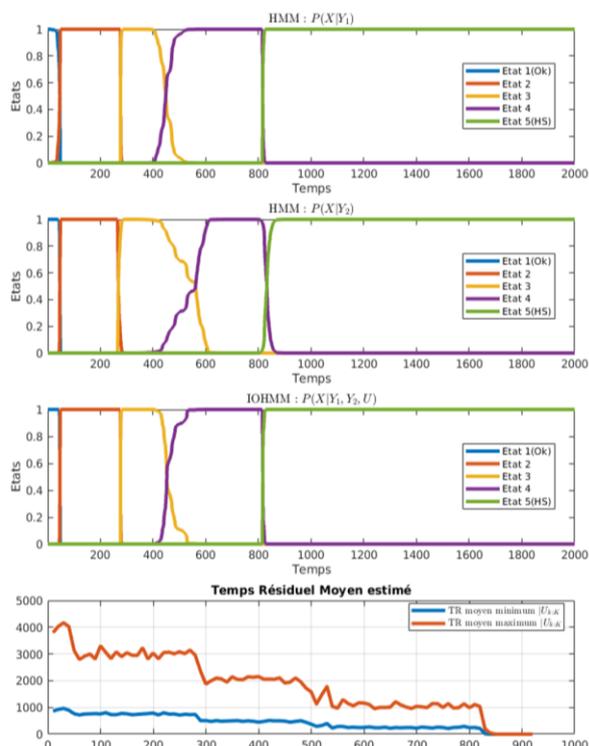


Fig. 6. Illustration numérique

Compte tenu des états estimés, une simulation de Monte-Carlo donne une distribution des temps résiduels. Ainsi, la courbe en bas à gauche de la Fig. 6 illustre les 4 distributions de temps résiduels de fonctionnement à l'instant  $k=200$  si on considère chacune des combinaisons des états des entrées. Le temps résiduel moyen à chaque instant sachant l'état courant est donné en bas à droite de la Fig. 6. Ce temps résiduel moyen dépend des entrées du processus. On ne retient dans cette figure que les cas extrêmes pour des raisons de commodité.

Les performances de diagnostic de l'approche IOHMM sont tout à fait satisfaisantes en regard de celle d'un HMM classique. Il y a moins d'erreurs d'estimation de l'état courant et chaque nouvelle observation permet de rectifier le diagnostic.

Le pronostic est basé sur une chaîne de Markov conditionnée par les entrées. On retrouve des plateaux d'estimation de la durée résiduelle qui sont très caractéristiques. Cela est dû à une bonne estimation des états cachés avec des probabilités élevées. Les HsMM seraient sur ce point relativement intéressantes avec une gradualité plus fine bénéfique à un usage en pilotage de l'état de santé par exemple.

## V. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons proposé d'exploiter une forme évoluée de modèle de Markov caché pour représenter le processus d'évolution de l'état de santé d'un système. Il correspond bien au principe d'évolution d'un élément (état de santé) complexe et non observable directement, mais au travers de variables d'observation. Sa nature stochastique permet la prise en compte de l'incertitude.

Ainsi, nous avons présenté les fondamentaux des HMM et présenté les IOHMM. Sur la base des algorithmes classiques des HMM, nous avons proposé des algorithmes adaptés pour traiter les IOHMM multi-entrées/multi-sorties.

Nous avons également donné une expression formelle du calcul du temps résiduel d'utilisation moyen et la distribution du temps résiduel conditionné aux entrées via une simulation de Monte-Carlo donnant l'accès à une distribution des temps résiduels de fonctionnement estimés.

Une illustration numérique a montré la comparaison du résultat d'estimation des états cachés entre un HMM et un IOHMM, l'évolution en ligne du pronostic et la distribution des temps résiduels à un instant donné selon la valeur des conditions opérationnelles futures.

La propriété de Markov qui persiste avec les IOHMM et que l'on peut voir comme une contrainte puisque nous avons à faire à des lois exponentielles, pourraient être levée en s'appuyant sur d'autres modèles comme les modèles semi-Markoviens cachés. Il serait donc intéressant de combiner ces modèles semi-Markoviens et le principe de conditionnement aux entrées sorties. Cette perspective de travail offrirait de nouvelles opportunités pour le diagnostic et le pronostic de systèmes à partir de séries de données d'observations.

## VI. BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Tidriri, Chatti, N., Verron, S., and Tiplica, T. (2016). Bridging data-driven and model-based approaches for process fault diagnosis

and health monitoring: A review of researches and future challenges. 42:63 – 81. », *Annu. Rev. Control.*

[2] W. Mechri, C. Simon, F. Bicking, et K. Ben Othman, « Probability of failure on demand of safety systems by Multiphase Markov Chains », in *2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, oct. 2013, p. 98- 103.

[3] J.-F. Aubry, N. Brinzei, et M.-H. Mazouni, *Benefits of Petri Nets Models*, vol. 1. ISTE WILEY, 2015.

[4] P. Weber et C. Simon, *Benefits of Bayesian Network Models*, vol. 2. ISTE WILEY, 2016.

[5] T.M.H. La, K. T. Huynh, Y. Langeron, et A. Grall, « Dégradation d'un système dynamique: Modélisation dans le plan complexe », présenté à 21e congrès de Maîtrise des Risques et Sureté de Fonctionnement, Reims, oct. 2018.

[6] J. Baussaron, « Mise au point de modèles prédictifs de fiabilité dans un contexte de dégradation associé à des profils de mission », Doctorat, Université d'Angers, Angers, 2011.

[7] P. Weber, P. Munteanu, et L. Jouffe, « Dynamic Bayesian Networks Modelling the Dependability of Systems with Degradations and Exogenous Constraints », *IFAC Proc. Vol.*, vol. 37, n° 4, p. 207- 212, avr. 2004, doi: 10.1016/S1474-6670(17)36120-7.

[8] L. E. Baum et T. Petrie, « Statistical Inference for Probabilistic Functions of Finite State Markov Chains », *Ann. Math. Stat.*, vol. 37, n° 6, p. 1554- 1563, déc. 1966, doi: 10.1214/aoms/1177699147.

[9] L. R. Rabiner, « A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition », *Proc. IEEE*, vol. 77, n° 2, p. 257- 286, févr. 1989, doi: 10.1109/5.18626.

[10] J. Ying, T. Kirubarajan, K. R. Pattipati, et A. Patterson-Hine, « A hidden Markov model-based algorithm for fault diagnosis with partial and imperfect tests », *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C Appl. Rev.*, vol. 30, n° 4, p. 463- 473, nov. 2000.

[11] A. Kumar, R. B. Chinnam, et F. Tseng, « An HMM and polynomial regression based approach for remaining useful life and health state estimation of cutting tools », *Comput. Ind. Eng.*, vol. 128, p. 1008- 1014, févr. 2019.

[12] M. J. Roemer et G. J. Kacprzynski, « Advanced diagnostics and prognostics for gas turbine engine risk assessment », in *2000 IEEE Aerospace Conference. Proceedings (Cat. No.00TH8484)*, mars 2000, vol. 6, p. 345- 353 vol.6.

[13] H. M. Ertunc et K. A. Loparo, « A decision fusion algorithm for tool wear condition monitoring in drilling », *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, vol. 41, n° 9, p. 1347- 1362, juill. 2001.

[14] Z. Li, Z. Wu, Y. He, et F. Chu, « Hidden Markov model-based fault diagnostics method in speed-up and speed-down process for rotating machinery », *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 19, p. 329- 339, mars 2005.

[15] X. Zhang, R. Xu, Chiman Kwan, S. Y. Liang, Q. Xie, et L. Haynes, « An integrated approach to bearing fault diagnostics and prognostics », in *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.*, juin 2005, p. 2750- 2755 vol. 4.

[16] T. xinmin, D. baoxiang, et X. Yong, « Bearings Fault Diagnosis Based on HMM and Fractal Dimensions Spectrum », in *2007 International Conference on Mechatronics and Automation*, août 2007, p. 1671- 1676, doi: 10.1109/ICMA.2007.4303801.

[17] D. Tobon-Mejia, K. Medjaher, N. Zerhouni, et G. Tripot, « Hidden Markov models for failure diagnostic and prognostic. », in *Prognostics and System Health Management Conference, PHM'11.*, Shenzhen, China, mai 2011, p. 1- 8.

[18] F. Camci et R. B. Chinnam, « Hierarchical HMMs for Autonomous Diagnostics and Prognostics », in *The 2006 IEEE International Joint Conference on Neural Network Proceedings*, juill. 2006, p. 2445- 2452, doi: 10.1109/IJCNN.2006.247092.

[19] P. Baruah et R. B. Chinnam \*, « HMMs for diagnostics and prognostics in machining processes », *Int. J. Prod. Res.*, vol. 43, n° 6, p. 1275- 1293, mars 2005, doi: 10.1080/00207540412331327727.

[20] Q. Liu, M. Dong, et Y. Peng, « A novel method for online health prognosis of equipment based on hidden semi-Markov model using sequential Monte Carlo methods », *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 32, p. 331- 348, oct. 2012, doi: 10.1016/j.ymssp.2012.05.004.

[21] M. Dong et D. He, « Hidden semi-Markov model-based methodology for multi-sensor equipment health diagnosis and prognosis », *Eur. J.*

- Oper. Res.*, vol. 178, n° 3, p. 858- 878, mai 2007, doi: 10.1016/j.ejor.2006.01.041.
- [22] C. Jianmin et Z. Xinghui, « Fault Diagnosis of Gearbox based on EEMD and MGHMM », *J. Mech. Transm.*, vol. 11, n° 8, 2012.
- [23] M. Dong et D. He, « A segmental hidden semi-Markov model (HSMM)-based diagnostics and prognostics framework and methodology », *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 21, n° 5, p. 2248- 2266, juill. 2007, doi: 10.1016/j.ymsp.2006.10.001.
- [24] T.T. Le, « Contribution to deterioration modeling and residual life estimation based on condition monitoring data », Thèse de Doctorat, Université de Grenoble Alpes, 2015.
- [25] T.T. Le, C. Berenguer, et F. Chatelain, « Prognosis based on Multi-branch Hidden semi-Markov Models: A case study », *IFAC-Pap.*, vol. 48, n° 21, p. 91- 96, janv. 2015, doi: 10.1016/j.ifacol.2015.09.510.
- [26] Y. Bengio et P. Frasconi, « An Input Output HMM Architecture », in *Proceedings of the 7th International Conference on Neural Information Processing Systems*, Cambridge, MA, USA, 1994, p. 427-434.
- [27] Y. Bengio et P. Frasconi, « Input-output HMMs for sequence processing », *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 7, n° 5, p. 1231- 1249, sept. 1996, doi: 10.1109/72.536317.
- [28] A. Just, O. Bernier, et S. Marcel, « HMM and IOHMM for the Recognition of Mono- and Bi-Manual 3D Hand Gestures », présenté à British Machine Vision Conference, janv. 2004, p. 28.1-28.10, doi: 10.5244/C.18.28.
- [29] J. Hu, Y. Wang, et Y. Zhang, « IOHMM for location prediction with missing data », in *2015 IEEE International Conference on Data Science and Advanced Analytics (DSAA)*, oct. 2015, p. 1- 10, doi: 10.1109/DSAA.2015.7344851.
- [30] A. Ben Salem, A. Muller, et P. Weber, « Dynamic Bayesian Networks in System Reliability Analysis », *IFAC Proc. Vol.*, vol. 39, n° 13, p. 444- 449, janv. 2006, doi: 10.3182/20060829-4-CN-2909.00073.
- [31] T. Klingelschmidt, P. Weber, C. Simon, D. Theilliol, et F. Peysson, « Fault diagnosis and prognosis by using Input-Output Hidden Markov Models applied to a diesel generator », in *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, juill. 2017, p. 1326- 1331.
- [32] C.-M. Kuan, « Markov switching model (in Russian) », *Quantile*, n° 11, p. 13- 40, 2013.
- [33] A. Viterbi, « Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm », *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1967.
- [34] W. Mechri, C. Simon, et K. BenOthman, « Switching Markov chains for a holistic modeling of SIS unavailability », *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 133, p. 212- 222, janv. 2015.
- [35] V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, K. Yin, et S. N. Kavuri, « A review of process fault detection and diagnosis: Part I: Quantitative model-based methods », *Comput. Chem. Eng.*, vol. 27(3), p. 293- 311, mars 2003.
- [36] S. Aupetit, Contributions to Hidden Markov Models: metaheuristics for training, new models and dissimilarity visualization, Université François Rabelais – Tours, 2005.