Des égalités fondamentales de Marx à la résolution du problème de la transformation - Cohérence du modèle

Norbert Ankri, Païkan Marcaggi

Des égalités fondamentales de Marx à la résolution du problème de la transformation

COHÉRENCE DU MODÈLE

Norbert Ankri* & Païkan Marcaggi

Aix Marseille Université

* Correspondance : Norbert Ankri, norbert.ankri@univ-amu.fr

Table des matières

RÉSUMÉ 3
SUMMARY 3
AIDE-MÉMOIRE 4
INTRODUCTION 6
LES MODÈLES DE CETTE ÉTUDE 10
A- Problème de la transformation pour un modèle d'économie à deux branches 12
1. Modèle à deux branches avec capital fixe 12
2. Condition physique de la satisfaction des besoins 16
3. Cas simplifié (sans capital fixe et sans plus-value) et sens des égalités fondamentales 17
4. Remarque sur la répartition des capitaux en l'absence de plus-value 18
5. Conclusion 19
B- Problème de la transformation pour un modèle d'économie à trois branches 20
1. Modèle à trois branches avec capital fixe 20
2. Modèle à trois branches avec capital fixe et profit nuls 27
3. Conclusion 30
C- Particularité des cas pour lesquels le capital fixe est nul 31
1. Capital fixe nul et profit uniforme non nul 31
2. Capital fixe nul et taux de profit différents selon les branches 37
3. Différence avec le cas où il y a amortissement d'un capital fixe 37
4. Conclusion 39
D- Critère de convergence dans un processus « réel » 40
E- Invalidité des conséquences attribuées au théorème d'Okishio 43
1. Le théorème d'Okishio n'empêche pas la BTTPM 43
2. Le théorème d'Okishio favorise la BTTPM 47
3. Conclusion 51
F- L'ajout d'une branche de luxe 52
1. Cas sans capital fixe 52
2. Cas avec capital fixe 54
3. Conclusion 55
G- L'ajout d'une branche produisant le capital fixe 58
1. Cas général 58
2. Cas sans plus-value 59
3. Ajout d'une branche de luxe 60
H- Élément neutre de la transformation 61
I- Variations de la fonction z et détermination de r* 63
CONCLUSION GÉNÉRALE 65
BIBLIOGRAPHIE 70
ANNEXE 71
1. Algorithmes de résolution 71
2. Paramètres des simulations 75

RÉSUMÉ

Récemment, V. Laure van Bambeke a développé une approche originale du célèbre problème de la transformation des valeurs en prix de production : une résolution qui considère que la réallocation des montants de capitaux alloués à chaque secteur d'activité de façon à satisfaire les besoins sociaux est une condition nécessaire au respect approximatif des deux égalités fondamentales de Marx : entre la somme totale des valeurs et la somme totale des prix, et entre la plus-value totale (en valeur) et le profit total (en prix). Nous confirmons le bien-fondé de cette proposition et présentons une méthode de résolution simple qui trouve l'ensemble des solutions sans approximation. Notre méthode permet également de résoudre le problème en l'absence de capital fixe, dont le traitement ne doit donc pas constituer un point critiquable, et nous montrons pourquoi, pour ces systèmes particuliers, le taux de profit peut être déterminé à partir de la seule matrice des coefficients sociotechniques sans considération des capitaux alloués aux différentes branches. Notre algorithme permet des simulations qui montrent l'articulation entre la hausse transitoire du taux de profit prédite par le théorème d'Okishio et la Baisse Tendancielle du Taux de Profit Moyen (BTTPM) qui suit la réallocation des capitaux, baisse gouvernée par l'augmentation de la composition organique exprimée en valeur. Approfondissant la voie ouverte par le précurseur Laure van Bambeke, nous explicitons un algorithme simple qui résout le problème séculaire de la transformation quel que soit le nombre N de branches considérées et qui permet d'explorer les solutions, en nombre infini dès que N est supérieur à deux. Il en ressort la très grande cohérence de la conception de Marx, et son étonnante pertinence pour expliquer des phénomènes encore très discutés, comme la BTTPM

SUMMARY

Recently, V. Laure van Bambeke used an original approach to tackle the famous transformation problem of values into production prices: a resolution which considers that capital reallocation to each BRANCH to satisfy the social needs is required to obey, approximately, Marx's two fundamental equalities, between the total sum of values and the total sum of prices, and between the total surplus value and the total profit (in price). Here, we confirm the validity of this proposal and develop a simple resolution method which provides exact solutions, with no approximation needed. Our method also enables a resolution of the problem in the absence of any fixed capital. This supports that dealing with the latter is not essential and therefore cannot be seen as a potential flaw of the approach. In these particular cases, we show why the profit rate can be determined from the eigenvalue of the sociotechnical coefficient matrix, without any information required about the capital allocation to the various BRANCHs. Our algorithm enables simulations showing how the transient rise in profit rate predicted by the Okishio theorem is consistent with the Tendency of the Rate of Profit to Fall (TRPF) subsequent to capital reallocation, and how the TRPF is governed by the increase of organic composition, in value. Overall, we extend the precursory Laure van Bambeke work by showing a robust resolution method through a simpler algorithm, making it clear that the ancient transformation problem is now solved, whichever the N number of BRANCHs is considered, and providing a mean to explore the infinite number of solutions as soon as N is bigger than two. This emphasizes the high coherence of Marx's conception, and its impressive relevance regarding issues which have remained intensely debated, like the TRPF.

AIDE-MÉMOIRE

Le profit du capitaliste est réalisé sur la valeur en prix des marchandises produites et il est proportionnel au capital engagé en prix. Conformément à la théorie de la valeur de Karl Marx, la valeur des marchandises est proportionnelle à la quantité de travail socialement nécessaire à leur production et le profit a pour origine le travail qui est le seul mécanisme créateur de valeur. Sur la base d'une modélisation de l'économie de marché en branches de production de marchandises, la composition organique d'une branche est définie par le rapport du capital constant (somme du capital fixe, c'est-à-dire comprenant machines, bâtiments, matières premières, etc.) sur le capital variable (coût de la force de travail). La théorie de la valeur semble prédire que plus la composition organique d'une branche est faible, plus son taux de profit est élevé puisque la part du travail créateur de valeur est plus grande.

Cette prédiction intuitive se heurte aux faits qui tendent à montrer le contraire : les taux de profits sont généralement semblables dans toutes les branches et les capitaux se déplacent préférentiellement vers les branches les plus capitalistiques (à composition organique élevée). Pour résoudre ce paradoxe apparent, Marx a supposé que les marchandises sont vendues à un « prix de production de marché » différent de leur valeur et a proposé une théorie de la valeur et de l'exploitation qui repose sur deux lois de conservation que nous nommerons ici les égalités fondamentales de Marx : la somme totale de tous les prix des marchandises produites est égale à la somme totale de toutes leurs valeurs et la somme des profits exprimés en prix est égale à la somme des profits exprimés en valeurs. (Par commodité, nous désignons respectivement le profit en valeur et le profit en prix par la plus-value et le profit.)

À ce jour, la méthode mathématique permettant de convertir la valeur en prix de production de marché n'a pas été établie clairement, ce qui a donné lieu à un long débat rendu célèbre sous le nom du « problème de la transformation » de la valeur en prix de production de marché. Les nombreuses méthodes proposées ont toutes été assorties de contraintes plus ou moins restrictives ou bien ont dû abandonner l'une ou l'autre des deux égalités fondamentales. Étonnamment, le mouvement des capitaux entre branches, pourtant implicitement considéré par Marx comme une donnée du problème, a le plus souvent été ignoré. Récemment, V. Laure van Bambeke (1) s'engageant plus avant dans une voie déjà entrevue par Heimann (2) et Shangoon Lee (3), a mis en évidence que la prise en compte de ces mouvements est nécessaire pour rendre compte des besoins sociaux et permet de résoudre le problème de la transformation, conformément à l'idée originelle de Marx. Ici, nous explorons cette façon de résoudre le problème de la transformation sur la base d'une approche plus directe et plus facilement généralisable à un nombre de branches quelconque.

À la différence des travaux de V. Laure van Bambeke, nous montrons que l'existence d'un capital fixe préalable n'est pas nécessaire à la résolution et que les solutions sont numériquement exactes et peuvent être obtenues sans avoir recours à des méthodes approchées du type Moore-Penrose utilisée par V. Laure van Bambeke. Cette dernière ne respecte pas strictement les égalités fondamentales de Marx au cours d'un processus par « essai-erreur » qui de plus est fastidieux et difficilement praticable pour un nombre important de branches. Ici, nous détaillons une méthode qui respecte constamment et strictement les égalités fondamentales et dont l'algorithme fournit une solution avec un temps de calcul réduit, et quel que soit le nombre de branches considérées. Cette méthode nous permet de montrer pourquoi le respect des deux égalités fondamentales est la condition première et incontournable à une solution cohérente qui tient compte du besoin social solvable. Notre approche respecte strictement les égalités fondamentales, y compris quand les taux de profit des différentes branches ne sont pas égaux, soit pour une raison de monopole soit parce que la dynamique a amené le système dans un état de déséquilibre. Nous abordons d'ailleurs les situations où les branches d'activité présentent des taux de profit différents. Enfin, notre approche permet de rendre compte d'une baisse tendancielle du taux de profit moyen (BTTPM) accompagnant une élévation de la composition organique exprimée en valeur, y compris en absence de capital fixe. En montrant que le problème de la transformation se résout tout aussi bien en absence de capital fixe, cas revêtant un caractère quelque peu artificiel puisqu'un capitalisme sans capital fixe n'est pas celui qu'on observe, nous réalisons une expérience idéale de pensée qui permet d'écarter les objections quant aux diverses façons de traiter du capital fixe et nous fournissons une explication au fait que dans ces systèmes particuliers, le taux de profit peut être déterminé à partir de la seule matrice des coefficients sociotechniques sans considération des capitaux alloués aux différentes branches.

INTRODUCTION

Pour commencer cette introduction nous citerons le physicien Albert Einstein (1) :

> En se servant des moyens de production, l'ouvrier produit de nouveaux biens qui deviennent la propriété du capitaliste. Le point essentiel dans ce processus est le rapport entre ce que l'ouvrier produit et ce qu'il reçoit comme salaire, les deux choses étant évaluées en termes de valeur réelle. Dans la mesure où le contrat de travail est « libre », ce que l'ouvrier reçoit est déterminé, non pas par la valeur réelle des biens qu'il produit, mais par le minimum de ses besoins et par le rapport entre le nombre d'ouvriers dont le capitaliste a besoin et le nombre d'ouvriers qui sont à la recherche d'un emploi. Il faut comprendre que même en théorie le salaire de l'ouvrier n'est pas déterminé par la valeur de son produit.

Si l'opinion d'un grand scientifique n'est pas recevable en tant qu'argument infaillible qui peut faire autorité, encore moins dans un domaine qui n'est pas le sien, il nous faut considérer la personnalité d'Albert Einstein que l'on voit mal adopter une logique non préalablement bien comprise par lui. Einstein qui a toujours fait preuve d'une intuition extraordinaire dans des domaines très variés des sciences physiques, parle ici de valeur réelle, une notion qui fait référence à la loi de la valeur au sens marxiste et qui a été jugée superflue par la majorité des économistes contemporains. Ainsi, celui qui a anéanti la notion inutile d'éther luminifère, de mouvement absolu et a contribué à faire émerger l'espace-temps en révélant le caractère relatif de l'espace ou du temps considérés séparément, fait sienne la théorie marxiste de la valeur qui fait de la plus-value la provenance cachée du profit, plus-value pourtant bien visible quand on la mesure en termes de sueur et de travail chronométré des salariés sur les chaines de montages de Toyota, Ford, Renault, PSA, Ford, Volvo ou dans les entrepôts d'Amazon. Si l'avis d'Albert Einstein ne saurait valoir de conclusion définitive quant à la validité de la loi de la valeur marxiste, la clarté d'esprit à laquelle l'homme nous a habitué nous encourage à nous pencher de nouveau sérieusement sur la cohérence interne de cette loi qui a été selon nous injustement déconsidérée et remise en question.

Les deux tableaux ci-dessous sont proposés par Marx dans le Livre III du *Capital* (2).

Capitaux	Taux de la plus-value	Plus-value	Taux de profit	Valeur des marchandises	Coût de production
I. 80 *c* + 20 *v*	100%	20	20%	90	70
II. 70 *c* + 30 *v*	100%	30	30%	111	81
III. 60 *c* + 40 *v*	100%	40	40%	131	91
IV. 85 *c* + 15 *v*	100%	15	15%	70	55
V. 95 *c* + 5 *v*	100%	5	5%	20	15
390 *c* + 110 *v*		110			Total
78 *c* + 22 *v*		22	22%		Moyenne

Tableau 1A (Le Capital, livre III chapitre IX (2))

Dans ce premier tableau cinq branches sont représentées, la proportion entre le capital constant **C** (machines et matières premières) et le capital variable **V** (salaires correspondants aux biens de consommation nécessaires à la reproduction de la force de travail) y est différente pour chacune d'entre elles. Les taux d'exploitation (ou taux de plus-value) sont identiques, à 100 %, ce qui constitue l'hypothèse la plus simple d'une exploitation de la force de travail similaire dans chaque branche. Le tableau donne, pour chaque branche, le coût de production, c'est à dire la part du capital total consommé en valeur au cours d'un cycle. La valeur des marchandises est la somme du coût de production et de la plus-value. La plus-value peut se définir comme la différence de valeur entre les marchandises produites et celles des marchandises destinées à la consommation ouvrière. Elle n'est possible que parce que le temps de travail socialement nécessaire à la production de ces marchandises est supérieur à celui passé à la production destinée à sa consommation. Le taux de profit (aussi nommé « taux de profit en interne », à ne pas confondre avec le taux de profit en prix, voir Tableau 1B) est le rapport de la plus-value sur le capital investi. Le taux de plus-value étant identique dans chaque branche, les plus-values réalisées amènent à des taux de profits en interne différents selon les branches, le taux de profit moyen étant de 22 %. Pour que ce taux de profit moyen puisse s'appliquer à chaque branche (les capitalistes (3) se partagent la plus-value totale au prorata de leur investissement), Marx a proposé que les prix des marchandises ne soient pas « égaux » à leur valeur. Les prix sont tantôt plus élevés (quand le rapport C/V est au-dessus de la moyenne) tantôt plus faibles (rapport C/V plus faible) que les valeurs. Cela est illustré dans le tableau ci-dessous. La somme des écarts aux valeurs est nulle.

Capitaux	Plus-value	Valeur des marchandises	Coût de production	Prix des marchandises	Taux de profit	Écart du prix par rapport à la valeur
I. 80 *c* + 20 *v*	20	90	70	92	22 %	+2
II. 70 *c* + 30 *v*	30	111	81	103	22 %	-8
III. 60 *c* + 40 *v*	40	131	91	113	22 %	-18
IV. 85 *c* + 15 *v*	15	70	55	77	22 %	+7
V. 95 *c* + 5 *v*	5	20	15	37	22 %	+17

Tableau 1B (Le Capital, livre III chapitre IX (2)). Ce tableau ne représente pas la colonne des taux de plus-value, mais ce dernier est inchangé.

Seulement voilà, les capitalistes n'achètent pas les diverses matières premières à partir desquelles sont composées les marchandises, à leur valeur (comme le suggère le tableau) mais à leur prix de production de marché. Autrement dit, ce dernier tableau, pour être exact, devrait faire figurer les coûts de production et les capitaux en prix, et non en valeur. Cette difficulté avait été pleinement perçue par Marx comme le montre cet extrait du chapitre IX du livre III du Capital (2) :

> Puisqu'il est possible que le prix de production s'écarte de la valeur de la marchandise, son coût de production renfermant le prix de production d'une autre marchandise peut lui aussi se trouver au-dessus ou au-dessous de cette fraction de sa valeur globale que constitue la valeur des moyens de production consommés. Il faut se rappeler cette signification altérée du coût de production et penser qu'une erreur est toujours possible quand, dans une sphère de

> production particulière, on pose le coût de production de la marchandise comme égal à la valeur des moyens de production consommés au cours de sa production. Pour l'étude en cours, il est inutile d'examiner ce point de plus près.

Marx exprime clairement qu'il juge que cette erreur est un détail ne justifiant pas l'interruption du fil de son raisonnement. Comme nous allons le montrer ci-après, en effet, cette erreur peut être résolue sans remettre en question les conclusions de l'auteur. Cependant, il s'est avéré que les tentatives précédentes de correction de cette « erreur » (4, 5) ont conduit à des remises en cause de deux lois jugées fondamentales par l'auteur du Capital, que nous nommerons égalités fondamentales de Marx : 1) L'égalité entre la somme des valeurs des marchandises de toute l'économie et la somme de leurs prix. 2) L'égalité entre la somme des plus-values (en valeur) de toutes les branches et la somme des profits (en prix). Ces égalités ne sont pas de simples normalisations mais l'expression de la loi de conservation de la valeur, valeur crée par la seule plus-value dans le cadre du mode de production capitaliste et qui doit satisfaire le besoin social solvable.

De façon surprenante, aucuns des travaux suscités n'a considéré que les mouvements de capitaux entre branches faisaient partie intégrante du problème de la transformation, considérant que ce phénomène avait déjà produit son effet à travers la péréquation du taux de profit. Ce mouvement des capitaux semble pourtant une donnée implicite pour Marx qui explique que c'est la raison qui fait tendre à un taux de profit uniforme entre branches (extrait du chapitre XXII du livre III du Capital (2)) :

> Si, dans une sphère, les prix des marchandises sont au-dessous ou au-dessus du prix de production (abstraction faite des fluctuations propres à chaque affaire et liées aux différentes phases du cycle industriel), il y a égalisation par élargissement ou réduction de la production, c'est-à-dire par l'extension ou la diminution des masses de marchandises jetées sur le marché par des capitaux industriels ; cette égalisation est donc engendrée par le retrait ou l'apport de capital s'opérant dans les différentes sphères de production.

Les tableaux qu'utilise Marx pour illustrer sa théorie sont à considérer comme des illustrations d'un état d'équilibre hypothétique après transfert des capitaux entre branches. Le fait d'avoir attribué un même capital de 100 pour chaque branche dans les Tableaux 1A et 1B est une simplification qui ne tient pas compte des besoins sociaux, la satisfaction desquels, comme nous allons le montrer, nécessite des mouvements de capitaux conditionnés au respect des deux égalités fondamentales.

En prenant en compte les mouvements de capitaux entre branches comme mécanisme conduisant à un taux de profit uniforme, V. Laure van Bambeke a montré qu'une résolution du problème de la transformation est compatible avec le respect des deux égalités fondamentales, mais ces dernières n'étant vérifiée qu'approximativement. Ici, nous décrivons une résolution plus élémentaire, et pour laquelle les deux égalités fondamentales sont vérifiées strictement.

Dans le système capitaliste considéré, les capitaux sont libres de circuler. Pour prendre une analogie électrique, il y a un état de grande « conductance » entre les différentes branches. En électrostatique, lorsque l'on calcule le champ électrique en un point de l'espace, on peut certes se baser sur une configuration arbitraire des charges électriques, il est alors sous-entendu que ces charges sont maintenues à leur place par une contrainte quelconque. Mais dès que l'on suppose ces charges libres dans un milieu conducteur, comme par exemple à la surface d'une cage de Faraday, nous n'avons plus le droit de les disposer où bon nous semble. La répartition des charges et le calcul du champ résultant (nul à l'intérieur de la cage) deviennent des problèmes dépendants. En regardant le problème à l'envers les choses peuvent paraitre quelquefois surprenantes, voire magiques. C'est ainsi que, dans un livre de physique célèbre (6), on peut lire cette description du champ électrique dans une boîte métallique fermée (cage de Faraday) :

> Sur la surface de la boîte il y a une distribution de charges extrêmement inhomogène. Le champ en tout point de l'espace, y compris à l'intérieur de la boîte est la somme du champ dû à cette distribution de charges et de celui dû aux charges extérieures. IL SEMBLE À PEINE CROYABLE QUE LA CHARGE DE SURFACE PUISSE SE RÉPARTIR ELLE-MÊME SUR LA BOITE DE FACON ASSEZ compliquée POUR QUE SON CHAMP ANNULE EXACTEMENT CELUI créé par les charges extérieures en tout point situé à l'intérieur de la boîte. ET C'EST POURTANT CE QU'IL SE PASSE !!!

Il n'y a pourtant aucune magie dans cet état des choses qui s'explique très bien par une loi physique. C'est avec ce type de raisonnement « à l'envers » que M. Husson (10) conclue que l'analyse de V. Laure van Bambeke (11) « n'a pas de sens économique » puisqu' elle reviendrait à construire « de manière arbitraire, une économie hypothétique compatible avec les identités remarquables » (ici nommées égalités fondamentales) (10).

Dans le problème qui nous occupe, nous montrons que la libre circulation des capitaux entre branches est indissociable d'une allocation spécifique pour chacune d'entre elles du montant de capital qui tienne compte du besoin social solvable. Nous montrons par-là que, contrairement à une vision étonnamment répandue (10), la répartition des capitaux entre les branches ne peut en aucun cas constituer une donnée exogène, elle est imposée par la satisfaction des besoins sociaux solvables.

LES MODÈLES DE CETTE ÉTUDE

Le problème de la transformation a été introduit par Marx dans le but d'expliquer comment les taux de profit de branches de compositions organiques différentes tendent vers une valeur comparable que nous nommerons taux de profit moyen ou uniforme. Le postulat selon lequel l'unique mécanisme de création de valeur est la plus-value (réalisée sur le travail qui est moins rétribué que la valeur qu'il produit) conduit à cette intuition que les branches dont la répartition du capital penche davantage vers le capital variable (V) et qui donc génèrent plus de plus-value devraient voir leur taux de profit plus grand. Or, ce n'est pas ce qui est observé. Dans le monde réel, chaque branche tend vers le même taux de profit moyen (ou uniforme). Pour expliquer ce paradoxe apparent, Marx a proposé une inadéquation entre valeur et prix de production de marché et donné les clés pour résoudre mathématiquement la transformation des valeurs en prix. Ce problème de la transformation s'est heurté à de nombreuses critiques, et il a fallu attendre le travail de V. Laure van Bambeke (7) pour montrer qu'il se résout dès lors qu'il est admis que capitaux se répartissent entre branches pour satisfaire un équilibre correspondant à la réalisation d'un taux de profit uniforme et la satisfaction des besoins sociaux. L'approche de V. Laure van Bambeke remet en selle le problème de la transformation posé par Marx, mais elle n'est pas entièrement satisfaisante car (i) elle ne résout pas le problème quand le capital fixe est nul ; (ii) elle utilise la méthode d'approximation de Moore-Penrose qui implique que le respect des égalités fondamentales ne serait qu'approximatif tant que l'équilibre des taux de profit n'est pas atteint, en ce sens, elle n'applique pas de la théorie de la valeur de Marx ; (iii) sa méthode de résolution, basée sur des transferts successifs et parcimonieux de capitaux d'une branche à l'autre jusqu'à trouver une erreur « acceptable » pour toutes les équations est fastidieuse et difficilement praticable pour un nombre de branches supérieur à deux.

Ici, en considérant successivement des modèles d'économie à deux, trois, quatre et cinq branches, nous détaillons une résolution mathématique directe du problème de la transformation, qui respecte strictement les deux égalités fondamentales, et qui peut être généralisée à un nombre quelconque de branches. Notre approche, appliquée à un cas idéal sans capital fixe et sans profit permet de mettre en exergue le sens des égalités fondamentales de Marx, fondement de la méthode, qui traduisent la loi de conservation de la valeur et l'adéquation entre la production et les besoins sociaux solvables.

Les données initiales des tableaux, rangées par lignes (branches de production de chaque type de marchandise) correspondent à une répartition quelconque des capitaux entre branches qui ne respecte pas forcément les égalités fondamentales. En divisant les données d'une ligne correspondant à un secteur d'activité par le capital total de ce secteur, on définit les paramètres intangibles du modèle, définis comme les coefficients socio-techniques. Ces coefficients donnent pour une marchandise produite (extrant), les proportions (rapport de valeurs) nécessaires des marchandises qui la constituent (intrant). Les coefficients socio-techniques sont fonction de la nature de la marchandise, des avancées de la technique et des paramètres sociaux qui impactent sur le niveau de performance de la main d'œuvre.

Le principe de notre approche est de déterminer, pour des modèles d'économie à deux branches ou plus, pour chaque marchandise, les coefficients de transformation de valeurs en prix permettant d'ajuster la répartition des capitaux entre branches, tout en respectant les égalités fondamentales de Marx, jusqu'à obtention d'un taux de profit uniforme (le même pour chaque branche). Nos modèles prévoient cependant la possibilité de contraintes qui imposeraient une différence donnée entre ces taux de profit (existence de monopoles par exemple). La solution du problème est donnée par des coefficients de transformations (valeur en prix pour chaque type de marchandise) et une répartition des capitaux entre branches qui satisfont les égalités fondamentales et un différentiel imposé (nul dans le cas standard) des taux de profit.

Nous nous situons dans la continuité du travail précurseur de V. Laure van Bambeke (7-9) et nous avons adopté, pour les modèles à deux et trois branches, un capital fixe qui est importé, celui-ci est acheté par les capitalistes à son prix et transmet progressivement sa valeur à la marchandise produite sous la forme d'un amortissement annuel égal au rapport prix du capital fixe sur le nombre de cycles de production. Pour ces modèles la valeur totale transmise par ce capital fixe est considérée égale à son prix. Nous envisageons ensuite un modèle comportant une branche produisant les machines qui constituent le capital fixe dont le prix peut alors différer de la valeur.

De plus, nous envisageons la situation où ce capital fixe est nul et montrons que cette situation n'empêche pas de résoudre le problème de la transformation. Le modèle à deux branches est particulier dans le sens où il n'admet qu'une seule solution des coefficients de transformations et de la répartition des capitaux.

Les branches des différents modèles sont définies comme suit :

• Modèles à deux branches : C (matières premières), V (force de travail).

• Modèles à trois branches : E (énergie), C, V.

• Modèles à quatre branches :

a) Branches E, C, V, L (luxe) : les marchandises produites par la branche de luxe L ne sont pas utilisées par les trois premières branches fondamentales.

b) Branches M (machines), E, C, V : les machines sont produites à l'intérieur du système économique considéré, leur amortissement continue à être effectué selon les mêmes règles comptables que précédemment mais il faut tenir compte cette fois du prix de ces machines qui ne coïncide pas forcément avec leur valeur.

• Modèles à cinq branches : M, E, C, V, L. Nous ajoutons une branche de luxe dont les marchandises produites ne sont pas consommées par les quatre premières branches fondamentales.

Pour les différents modèles, en complément de démonstrations théoriques de la méthode permettant de résoudre la transformation, nous détaillons un algorithme et fournissons le *runtime* d'un programme écrit en LABVIEW (document complémentaire en libre accès sur HAL). Ce programme produit des résultats avec une précision de 14 chiffres significatifs. Il n'y a pas de limite théorique à la précision des résultats. Les tableaux donnés à titre d'exemples dans ce manuscrit montrent des résultats avec environs dix chiffres significatifs afin d'illustrer la précision de la méthode. En comparaison, les travaux de V. Laure van Bambeke présentent des résultats avec six chiffres significatifs obtenus par manipulation de nombres avec au moins huit chiffres significatifs. Leur obtention est difficile puisqu'à partir de seulement trois branches le nombre de transferts possibles est très grand, en outre les solutions en nombre infini forment un ensemble continu de réels.

A- Problème de la transformation pour un modèle d'économie à deux branches

1. Modèle à deux branches avec capital fixe

a) *Définitions*

Dans ce modèle minimal, la production se divise en deux branches : C et V. La branche C produit des matières premières. La branche V produit des biens consommés par les salariés des deux branches.

Dans chaque branche, le capital investi se subdivise en trois sous-types de capitaux.

Nous notons que pour la branche i, le capital total investi K_i se subdivise en F_i, C_i et V_i :

$\boldsymbol{K_i = F_i + C_i + V_i}$

F_i : Le capital fixe, c'est à dire le capital investi dans l'achat de l'infrastructure et des machines. Ce capital est amorti sur un nombre $\boldsymbol{n}$ de cycles. On définit $\boldsymbol{D_i} = {}^{\boldsymbol{F_i}}/_{\boldsymbol{n}}$, la quantité de valeur transmise par le capital fixe à chaque cycle.

C_i : Le capital circulant, par exemple le capital nécessaire à chaque cycle pour l'achat de matières premières. L'ensemble du capital circulant et du capital fixe forme le capital constant.

V_i : Le capital variable, défini comme le capital nécessaire à chaque cycle pour reproduire la force de travail des salariés.

La proportion de capital non variable dans la branche i est définie comme **composition organique** de la branche i : $CO_i = \frac{F_i + C_i}{V_i}$

La production totale de la branche i produit une plus-value, notée PL_i, dépendant du taux d'exploitation du travail, noté $\boldsymbol{e_i}$. Ce taux d'exploitation dépend des rapports de force entre travailleurs et employeurs. Notre hypothèse initiale est que ce rapport de force s'équilibre entre les branches et que le travail est exploité en moyenne par un même taux d'exploitation noté e. (Prendre des taux d'exploitation différents entre les branches ne change pas les conclusions générales de la transformation.)

Ainsi, pour la branche i, $\boldsymbol{PL_i} = e\boldsymbol{V_i}$

La production totale de la branche i à chaque cycle est notée W_i :

$\boldsymbol{W_i = D_i + C_i + V_i + PL_i = D_i + C_i + (1 +} e\boldsymbol{)V_i}$

Dans Le Capital, livre III, Marx postule que les marchandises sont échangées selon un prix de production de marché qui diffère de la valeur. La transformation de la valeur en prix se résout par un coefficient de transformation propre au type de marchandise. Ce coefficient est noté x_i pour la branche i. Autrement dit, pour la branche i, le prix de la production totale est $\boldsymbol{x_i W_i}$.

Dans le modèle à deux branches, le coefficient x_1 s'applique pour les matières premières et le coefficient x_2 s'applique pour les marchandises produites par la branche 2. Dans ce modèle essentiel, les salaires permettent l'achat des marchandises produites par la branche 2, par conséquent, le coefficient x_2 s'applique également au salaire des travailleurs.

Ainsi, le capital total en prix investi dans la branche i, noté K_{pi}, s'écrit :

$K_{pi} = \boldsymbol{F_i} + x_1\boldsymbol{C_i} + x_2\boldsymbol{V_i}$

Le profit en prix de la branche i est noté $\boldsymbol{S_i}$ et défini par l'équation suivante qui donne la production totale en prix de la branche i, à chaque cycle :

$\boldsymbol{x_i W_i} = \boldsymbol{D_i} + \boldsymbol{x_1 C_i} + \boldsymbol{x_2 V_i} + \boldsymbol{S_i}$

b) *Les égalités fondamentales de Marx*

Selon Marx, les coefficients de transformation des valeurs en prix sont contraints par un équilibre réel du système économique en valeurs. Marx a proposé deux égalités correspondant à ces contraintes.

La première égalité postule que la somme des profits (prix) est égale à la somme des plus-values (valeurs).

$\sum \boldsymbol{S_i} = \sum \boldsymbol{PL_i}$ égalité fondamentale I

La deuxième égalité postule que la somme des capitaux engagés en prix est égale à la somme des capitaux engagés en valeur. C'est-à-dire : $\sum \boldsymbol{K_{pi}} = \sum \boldsymbol{K_i}$

Cette égalité peut aussi s'écrire :

$$\sum(\boldsymbol{F_i} + x_1\boldsymbol{C_i} + x_2\boldsymbol{V_i}) = \sum(\boldsymbol{F_i} + \boldsymbol{C_i} + \boldsymbol{V_i})$$

$$\sum(x_1\boldsymbol{C_i} + x_2\boldsymbol{V_i}) = \sum(\boldsymbol{C_i} + \boldsymbol{V_i})$$

$$\sum(\boldsymbol{D_i} + x_1\boldsymbol{C_i} + x_2\boldsymbol{V_i}) = \sum(\boldsymbol{D_i} + \boldsymbol{C_i} + \boldsymbol{V_i})$$

et, en tenant compte de l'égalité fondamentale I :

$$\sum(\boldsymbol{D_i} + x_1\boldsymbol{C_i} + x_2\boldsymbol{V_i} + \boldsymbol{S_i}) = \sum(\boldsymbol{D_i} + \boldsymbol{C_i} + \boldsymbol{V_i} + \boldsymbol{PL_i})$$

Ce qui revient à postuler que la somme de la production en prix est égale à la somme des productions en valeur, et peut encore s'écrire :

$\sum \boldsymbol{x_i W_i} = \sum \boldsymbol{W_i}$ égalité fondamentale II

c) *Le problème de la transformation, en équations*

Dans ce qui suit, nous résolvons le problème de la transformation, c'est-à-dire nous déterminons les coefficients x_i, tout en respectant les deux égalités fondamentales. Le cas le plus simple est de considérer un même taux de profit pour chaque branche. Ce taux de profit, noté r est tel que, pour chaque branche $\boldsymbol{S_i} = \boldsymbol{rK_{pi}}$.

Le capital total K_T se distribue en K_1 et K_2 dans les branches 1 et 2 respectivement. Cette répartition n'est pas une donnée fixe, elle dépend de la transformation. Par contre, la composition organique des branches et les **coefficients sociotechniques** $\boldsymbol{f_i} = {}^{\boldsymbol{F_i}}/_{\boldsymbol{K_i}}$, $\boldsymbol{c_i} = {}^{\boldsymbol{C_i}}/_{\boldsymbol{K_i}}$ et $\boldsymbol{v_i} = {}^{\boldsymbol{V_i}}/_{\boldsymbol{K_i}}$ sont fixés par les moyens de la technique, la nature des marchandises considérées, leur composition et le degré de qualification de la main-d'œuvre.

Pour chaque branche, $\boldsymbol{f_i} + \boldsymbol{c_i} + \boldsymbol{v_i} = 1$ (1a)

Pour la démonstration qui suit, nous avons normalisé, par rapport à K_i, les différents termes intervenants.

$$\boldsymbol{w_i} = {}^{\boldsymbol{W_i}}/_{\boldsymbol{K_i}}\,,\ \boldsymbol{d_i} = {}^{\boldsymbol{D_i}}/_{\boldsymbol{K_i}}\,,\ \boldsymbol{pl_i} = {}^{\boldsymbol{PL_i}}/_{\boldsymbol{K_i}}\,,\ \boldsymbol{s_i} = {}^{\boldsymbol{S_i}}/_{\boldsymbol{K_i}}$$

Ainsi, les relations définies dans le paragraphe précédent peuvent s'écrire

$$pl_i = \boldsymbol{e}v_i \qquad (2a)$$

$$d_i = {}^{f_i}/_{\boldsymbol{n}} \qquad (3a)$$

$$w_i = d_i + c_i + v_i + pl_i = d_i + c_i + (1+e)v_i \qquad (4a)$$

$$x_i w_i = d_i + x_1 c_i + x_2 v_i + s_i \qquad (5a)$$

$$s_i = r(nd_i + x_1 c_i + x_2 v_i) \qquad (6a)$$

Nous posons $k_1 = {}^{K_1}/_{K_T}$ et $k_2 = {}^{K_2}/_{K_T}$, avec $K_T = K_1 + K_2$.

Égalité fondamentale II et détermination des $\boldsymbol{k_i}$ en fonction des $\boldsymbol{x_i}$

Pour le modèle à deux branches, l'égalité fondamentale II s'écrit

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 = k_1 x_1 w_1 + k_2 x_2 w_2$$

Le système d'équations suivant permet de déterminer k_1 et k_2 en fonction de x_1 et x_2.

$$\left.\begin{array}{l} k_1 + k_2 = 1 \\ k_1 w_1(1-x_1) + k_2 w_2(1-x_2) = 0 \end{array}\right\}$$

En supposant le dénominateur du déterminant différent de zéro, les solutions sont :

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}$$

Système d'équations des branches en prix et détermination des $\boldsymbol{x_i}$ en fonction de $\boldsymbol{r}$

x_1 et x_2 peuvent être déterminés en fonction de r (ou de r_1 et r_2 si on se place dans un cas ou les taux de profits sont différents) en utilisant les équations (5a) et (6a) qui donnent le système d'équations des branches en prix :

$$[c_1(1+r) - w_1]x_1 + v_1(1+r)x_2 = -(1+nr)d_1$$

$$c_2(1+r)x_1 + [v_2(1+r) - w_2]x_2 = -(1+nr)d_2$$

Donc k_1 et k_2 peuvent être déterminés en fonction de r également.

Égalité fondamentale I et détermination de $\boldsymbol{r}^*$

Nous définissons la fonction z comme la différence entre le profit total et la plus-value totale :

$$z(x_1, x_2) = k_1\big(x_1(w_1 - c_1) - x_2 v_1 - (d_1 + pl_1)\big) + k_2\big(x_2(w_2 - v_2) - x_1 c_2 - (d_2 + pl_2)\big) \quad (7a)$$

La fonction z peut donc également s'exprimer en fonction de r. Elle s'annule quand l'égalité fondamentale I est vérifiée, ce qui permet de déterminer r.

L'algorithme détaillé en Annexe permet de déterminer la valeur de r pour laquelle la fonction z s'annule. Nous montrons au chapitre **i** (Variation de la fonction z) que, quelle que soit le nombre de branches, la solution $\boldsymbol{r}^*$ de l'équation $z(r) = 0$ est la première annulation de la fonction z pour z décroissante.

Interprétation géométrique

Dans l'espace des K qui est ici le plan K1, K2, cette solution correspond à l'intersection, des deux droites d'équations 8a et 9a ci-dessous. La droite d'équation 7a est confondue à celle d'équation 9a.

8a) $\boldsymbol{K_1 + K_2 = K_T}$

9a) $\boldsymbol{K_1 w_1 (1 - x_1) + K_2 w_2 (1 - x_1) = 0}$

7a) $\boldsymbol{K_1[(w_1 - c_1)\, x_1 - v_1\, x_2 - (d_1 + pl_1)] + K_2[(w_2 - v_2)\, x_2 - c_2\, x_1 - (d_2 + pl_2)] = 0}$

d) *Conclusion*

Quels que soient les coefficients socio-techniques des deux branches, une valeur r^* du taux de profit existe, telle que les deux égalités fondamentales sont respectées. La plus-value étant, dans ce modèle, le seul mécanisme créateur de profit, le taux de profit en interne (calculé en valeur) est plus important pour la branche la moins capitalistique (composition organique faible). Mais en prix, il est observé, dans le monde réel, un taux de profit comparable entre branches (disons uniforme). Marx avait décrit ce processus en exprimant que « les capitalistes sont frères » (3), c'est-à-dire qu'ils se partagent la plus-value totale, et ce partage se traduit par un taux de profit uniforme (en prix). Autrement dit, en prix, une branche très capitalistique pourra avoir le même taux de profit qu'une branche de faible composition organique, même si en valeur c'est cette dernière branche qui génère proportionnellement le plus de plus-value. On notera aussi que la solution pour le couple (k_1, k_2) est unique. Autrement dit, il n'y a qu'une seule manière de répartir les capitaux entre branches, ce qui fait du cas à deux dimensions un cas particulier contrairement à l'infinité de solutions qui apparaîtront pour les dimensions supérieures.

e) *Exemple*

On part de la configuration de l'exemple à deux branches utilisé par V. Laure van Bambeke (7) avec K_T = 715 et n = 5 cycles :

VALEURS INIT	F	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 C	125	200	90	60	375	415
BRANCH 2 V	100	80	120	80	300	300
TOTAL	225	280	210	140	675	715

Tableau 2A

On calcule avec notre algorithme la seule répartition solution du système de prix et qui respecte les égalités fondamentales de Marx

VALEURS	F	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 C	129.6884522	207.5015236	93.37568562	62.25045708	389.0653567	430.565661462
BRANCH 2 V	94.81144618	75.84915694	113.7737354	75.84915694	284.4343385	284.434338538
TOTAL	224.4998984	283.3506805	207.149421	138.099614	673.4996953	715

Tableau 2B

PRIX	F	C	V	S	W	Kp
BRANCH 1 C	129.6884522	222.2667889	84.28714183	84.25860798	416.7502291	436.242382948
BRANCH 2 V	94.81144618	81.24638441	102.6997865	53.84100604	256.7494662	278.757617052
TOTAL	224.4998984	303.5131733	186.9869283	138.099614	673.4996953	715

Tableau 2C

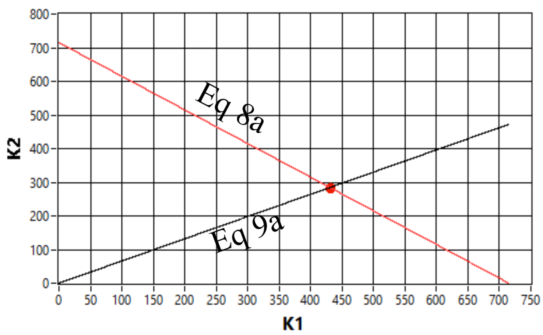
La différence entre la somme totale des profits S_T et la somme totale des plus-values PL_T ainsi que la différence entre la valeur totale de la production W_T et son prix Wp_T sont telles que :

$$\boldsymbol{|S_T - PL_T| < 10^{-14}\,;\ \ |W_T - Wp_T| < 10^{-14}}$$

	x_i	r_i
BRANCH 1 C	1.071157382	0.193146313
BRANCH 2 V	0.902666912	0.193146313

Cette répartition donne un taux de profit uniforme r* de **0.1931463133178**

Figure 1



2. Condition physique de la satisfaction des besoins

La satisfaction des besoins est définie comme la condition physique qui oblige la production de la marchandise i à couvrir la consommation de cette même marchandise i dans les deux branches. Cette notion ne pose pas de difficulté quand toutes les marchandises du système sont produites par ce même système (système fermé). Dès lors que le capital fixe est introduit dans le modèle (7-10), le système doit être considéré comme ouvert : le capital fixe est investi dans des marchandises (par exemple des machines) qui ne sont pas produites dans le système mais importées.

Dans un système fermé, les différents temps de travail qui constituent les marchandises peuvent s'additionner. Dans un système ouvert tel que celui comportant un capital fixe, même si les marchandises importées (constituant D) ont un coefficient de transformation fixé à 1, leur valeur correspond à du temps travail effectué dans un autre référentiel économique. Cette marchandise importée ne correspond pas à du temps de travail dans le système considéré, c'est une valeur jointe. Pour étudier les besoins en valeur des marchandises produites à l'intérieur du système, il faut comme dans le cas d'un changement de repère en cinématique, soustraire à la valeur totale W, la valeur D apportée par l'autre système. En d'autres termes, afin de satisfaire les besoins tout en assurant l'équilibre de leur balance des paiements, les capitalistes de chaque branche doivent produire un surplus de production duquel a été déduit le capital fixe investi. Cette inégalité s'écrit :

$$k_1(x_1 w_1 - d_1) \geq x_1(k_1 c_1 + k_2 c_2)$$

$$k_2(x_2 w_2 - d_2) \geq x_2(k_1 v_1 + k_2 v_2)$$

3. Cas simplifié (sans capital fixe et sans plus-value) et sens des égalités fondamentales

Le cas simplifié du modèle à deux branches sans capital fixe et sans profit est utile pour bien voir le lien entre les égalités fondamentales et la satisfaction du besoin social solvable.

Le système d'équations des branches en prix devient :

$[c_1 - w_1]x_1 + v_1 x_2 = 0$

$c_2 x_1 + [v_2 - w_2]x_2 = 0$

On a $w_1 = c_1 + v_1$ et $w_2 = c_2 + v_2$, on en déduit $x_1 = x_2$

L'égalité fondamentale II devient :

$k_1 w_1 + k_2 w_2 = k_1 x_1 w_1 + k_2 x_2 w_2$

Puisque $x_1 = x_2$, on a $x_1 = x_2 = 1$

La satisfaction des besoins à chaque cycle impose :

$k_1 w_1 \geq k_1 c_1 + k_2 c_2$

$k_2 w_2 \geq k_1 v_1 + k_2 v_2$

L'égalité fondamentale I (7a) devient :

$k_1(x_1(w_1 - c_1) - x_2 v_1) + k_2(x_2(w_2 - v_2) - x_1 c_2) = 0$

Qui peut encore s'écrire $[k_1 w_1 - (k_1 c_1 + k_2 c_2)]x_1 + [k_2 w_2 - (k_1 v_1 + k_2 v_2)]x_2 = 0$

Cette formulation de l'égalité fondamentale I montre qu'elle n'est respectée qu'à condition que :

$$k_1 w_1 = k_1 c_1 + k_2 c_2$$

$$k_2 w_2 = k_1 v_1 + k_2 v_2$$

Autrement dit, les besoins sont satisfaits exactement à chaque cycle.

Ainsi, le modèle sans capital fixe et sans plus-value met en évidence le lien entre l'égalité fondamentale I et l'adéquation entre la production et les besoins.

Ce système d'équations peut encore s'écrire :

$$k_1(w_1 - c_1) - k_2 c_2 = 0$$

$$-k_1 v_1 + k_2(w_2 - v_2) = 0$$

Ce système admet une infinité de solutions (déterminant nul puisque $w_1 = c_1 + v_1$ et $w_2 = c_2 + v_2$), ce qui signifie que ces deux équations sont redondantes. Nous n'en garderons qu'une, et en tenant compte de l'égalité $K_1 + K_2 = K_T$, il existe alors une solution unique pour (k_1, k_2) :

$$k_1 = \frac{c_2}{v_1 + c_2}$$

$$k_2 = \frac{v_1}{v_1 + c_2}$$

Exemple

Valeurs de départ avec répartition des capitaux (50/50)

VALEURS INIT	F	C	V	PL	W=K
BRANCH 1 C	0	131.9788674	59.39049034	0	191.36935774
BRANCH 2 V	0	76.54774311	114.8216146	0	191.36935774
TOTAL	0	208.52661051	174.21210494	0	382.73871545

Valeurs pour une répartition conforme des capitaux

VALEURS	F	C	V	PL	W=K
BRANCH 1 C	0	148.6363944	66.88637748	0	215.52277188
BRANCH 2 V	0	66.88637748	100.3295662	0	167.21594368
TOTAL	0	215.52277188	167.21594368	0	382.7387154

Tableaux 2D

$K_1 = 215.523 \quad K_2 = 167.216$

4. Remarque sur la répartition des capitaux en l'absence de plus-value

En absence de plus-value $x_1 = x_2 = 1$

La satisfaction des besoins s'écrit :

$$k_1(w_1 - d_1) \geq k_1 c_1 + k_2 c_2$$

$$k_2(w_2 - d_2) \geq k_1 v_1 + k_2 v_2$$

L'égalité fondamentale I peut s'écrire

$$[k_1(w_1 - d_1) - (k_1 c_1 + k_2 c_2)] + [k_2(w_2 - d_2) - (k_1 v_1 + k_2 v_2)] = 0$$

Elle n'est donc respectée qu'à condition que :

$$k_1(w_1 - d_1) = k_1 c_1 + k_2 c_2$$

$$k_2(w_2 - d_2) = k_1 v_1 + k_2 v_2$$

En posant $w'_i = (w_i - d_i)$, nous retrouvons le même système d'équations que dans le cas précédent.

En tenant compte de l'égalité $k_1 + k_2 = 1$, on retrouve la même solution unique :

$$k_1 = \frac{c_2}{v_1+c_2} \qquad \text{Et} \qquad k_2 = \frac{v_1}{v_1+c_2}$$

Exemple

n = 5 cycles

VALEURS INIT	F	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 C	125	200	90	0	315	415
BRANCH 2 V	100	80	120	0	220	300
TOTAL	125	280	210	0	535	715

Tableau 2E

VALEURS	F	C	V	PL	W	K	W-F/n
BRANCH 1 C	118.7707641	190.0332226	85.51495017	0	299.3023256	394.318937	275.5481728
BRANCH 2 V	106.8936877	85.51495017	128.2724252	0	235.166113	320.681063	213.7873754
TOTAL	225.6644518	275.5481728	213.7873754	0	534.4684385	715	

Tableau 2F

$$k_1 = 0.55149501678321 \; k_2 = \; 0.44850498321678$$

Comme l'illustre la comparaison des Tableaux 2E et 2F, les capitaux fixes apparaissent comme un produit joint et quels que soient leurs montants, puisque les besoins internes ne changent pas.

5. Conclusion

Le système à deux branches montre que le respect des égalités fondamentales contraint à une répartition unique des capitaux entre les deux branches. Quand il y a exploitation et par conséquent un profit réalisé, cette répartition des capitaux conduit à un taux de profit spécifique r*. Le cas particulier du système sans capital fixe et sans plus-value est utile pour mettre en évidence le sens général des égalités fondamentales de Marx : elles expriment l'adéquation entre la production et les besoins solvables, c'est-à-dire qui peuvent être achetés. La prise en compte de ces équations dans le système avec capital fixe et plus-value non nuls, fait que la valeur de r* est à la fois déterminée par le degré d'exploitation du travail humain et par la quantité de marchandises pouvant être absorbée par le marché.

Remarquons qu'il est possible de fixer une différence Δr de taux de profit entre les branches 1 et 2, la valeur r* (et par conséquent r*+ Δr) sera alors trouvée par la même méthode d'interpolation.

De façon générale, la répartition des capitaux entre branches est contrainte par l'adéquation entre la production et les besoins solvables. <u>La répartition des capitaux entre branches est donc indissociable de la question de la transformation des valeurs en prix de production de marché</u>.

B- Problème de la transformation pour un modèle d'économie à trois branches

La démarche est identique à celle du cas précédent à deux branches. Dans le modèle à trois branches, une inconnue supplémentaire apparait pour le système linéaire en K qui devient sous-déterminé avec une infinité de solution.

1. Modèle à trois branches avec capital fixe

a) *Définitions*

Dans ce modèle, la production se divise en trois branches. La première branche produit l'énergie (**E**), la deuxième, les matières premières (**C**), et la troisième, les biens qui sont consommés par les travailleurs des trois branches (**V**).

Dans chaque branche, le capital investi se subdivise en quatre sous types de capitaux.

Nous notons que pour la branche i, le capital investi K_i se subdivise en F_i, E_i C_i et V_i :

$\boldsymbol{K_i = F_i + E_i + C_i + V_i}$

Pour chaque branche indicée i :

F_i est le capital fixe, c'est à dire le capital investit dans l'achat de l'infrastructure et des machines. Ce capital est amorti sur un nombre n de cycles. On définit $D_i = {F_i}/{n}$ la quantité de valeur transmise par le capital fixe à chaque cycle.

E_i est le capital nécessaire à chaque cycle pour l'énergie.

C_i est le capital nécessaire à chaque cycle pour l'achat de matières premières.

V_i est le capital variable, défini comme le capital nécessaire à chaque cycle pour reproduire la force de travail des salariés.

La proportion de capital non variable dans la branche i est définie comme **composition organique** de la branche i : $CO_i = \frac{F_i+E_i+C_i}{V_i}$

La production totale de la branche i produit une plus-value notée PL_i dépendant du taux d'exploitation du travail. Ce taux d'exploitation dépend des rapports de force entre travailleurs et employeurs. Notre hypothèse initiale est que ce rapport de force s'équilibre entre les branches et que le travail est exploité en moyenne par un même taux d'exploitation noté e. (L'hypothèse d'un taux d'exploitation différent entre branches ne change pas les conclusions générales de la transformation.)

Ainsi, pour la branche i, $\boldsymbol{PL_i = eV_i}$

La production totale de la branche i à chaque cycle est notée W_i :

$\boldsymbol{W_i = D_i + E_i + C_i + V_i + PL_i = D_i + E_i + C_i + (1+e)V_i}$

Dans Le Capital, livre III, Marx postule que les marchandises sont échangées selon un prix de production de marché qui diffère de la valeur. La transformation de la valeur en prix se résout par un coefficient de transformation propre au type de marchandise. Ce coefficient est noté x_i pour la branche i. Autrement dit, pour la branche i, le prix de la production totale est $\boldsymbol{x_i W_i}$.

Dans le modèle à trois branches, le coefficient x_1 s'applique pour les matières premières, le coefficient x_2 pour l'énergie et x_3 pour les marchandises produites par la branche 3. Le coefficient x_3 s'applique au salaire des travailleurs qui reproduisent leur force de travail avec les biens de consommations courants.

Ainsi, le capital total en prix investi dans la branche i, noté K_{pi}, s'écrit :

$$\boldsymbol{K_{pi}} = \boldsymbol{F_i} + x_1\boldsymbol{C_i} + x_2\boldsymbol{E_i} + x_3\boldsymbol{V_i}$$

On notera que le capital fixe n'a pas de coefficient de transformation car le capitaliste se procure ce capital fixe au prix de marché, ce capital est amorti ensuite au cours de n cycles de production. Nous suivons ici la manière de procéder de V. Laure van Bambeke (8).

Le profit en prix de la branche i est noté $\boldsymbol{S_i}$ et défini par l'équation suivante qui donne la production totale en prix de la branche i, à chaque cycle :

$$\boldsymbol{x_i W_i} = \boldsymbol{D_i} + \boldsymbol{x_1 C_i} + \boldsymbol{x_2 E_i} + \boldsymbol{x_3 V_i} + \boldsymbol{S_i}$$

Les égalités fondamentales de Marx I et II telles qu'elles ont été définies au paragraphe A-1-b sont généralisables à autant de branches que l'on veut.

b) *Résolution du problème de la transformation*

Dans ce qui suit, nous déterminons les coefficients x_i, tout en respectant les deux égalités fondamentales. Le cas le plus simple mais nullement obligatoire est de considérer un même taux de profit pour chaque branche. Ce taux de profit, noté r est tel que, pour chaque branche $\boldsymbol{S_i} = \boldsymbol{rK_{pi}}$.

Le capital total K_T se distribue en K_1 , K_2 et K_3 dans les branches 1, 2 et 3 respectivement. Cette répartition n'est pas une donnée fixe, elle dépend de la transformation. En revanche, la composition organique des branches se définissant par les quantités $\boldsymbol{CO_i} = \frac{(\boldsymbol{F_i}+\boldsymbol{E_i}+\boldsymbol{C_i})}{\boldsymbol{V_i}}$ ainsi que les **coefficients sociotechniques** $\boldsymbol{f_i} = \boldsymbol{F_i}/\boldsymbol{K_i}$, $\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{E_i}/\boldsymbol{K_i}$, $\boldsymbol{c_i} = \boldsymbol{C_i}/\boldsymbol{K_i}$ et $\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{V_i}/\boldsymbol{K_i}$ sont fixés par les moyens de la technique, la nature des marchandises considérées, leurs compositions et le degré de qualification de la main-d'œuvre.

.

Pour chaque branche, $\boldsymbol{f_i} + \boldsymbol{e_i} + \boldsymbol{c_i} + \boldsymbol{v_i} = 1$ (1b)

Pour la démonstration qui suit, nous généralisons cette écriture en normalisant les différents termes intervenant par rapport à K_i.

$$\boldsymbol{w_i} = \boldsymbol{W_i}/\boldsymbol{K_i}, \; \boldsymbol{d_i} = \boldsymbol{D_i}/\boldsymbol{K_i}, \; \boldsymbol{pl_i} = \boldsymbol{PL_i}/\boldsymbol{K_i}, \; \boldsymbol{s_i} = \boldsymbol{S_i}/\boldsymbol{K_i}$$

Ainsi, les relations définies dans le paragraphe précédent peuvent s'écrire :

$$pl_i = \boldsymbol{e}v_i \quad (2b)$$

$$d_i = f_i/\boldsymbol{n} \quad (3b)$$

$$w_i = d_i + e_i + c_i + v_i + pl_i = d_i + e_i + c_i + (1 + e)v_i \tag{4b}$$

$$x_i w_i = d_i + x_1 c_i + x_2 e_i + x_3 v_i + s_i \tag{5b}$$

$$s_i = r(nd_i + x_1 c_i + x_2 e_i + x_3 v_i) \tag{6b}$$

Ayant posé $k_1 = {K_1}/{K_T}$, $k_2 = {K_2}/{K_T}$ et $k_3 = {K_3}/{K_T}$

L'égalité fondamentale I peut s'écrire :

$$k_1[x_1 w_1 - x_1 e_1 - x_2 c_1 - x_3 v_1 - d_1] + k_2[x_2 w_2 - x_1 e_2 - x_2 c_2 - x_3 v_2 - d_2] + k_3[x_3 w_3 - x_1 e_3 - x_2 c_3 - x_3 v_3 - d_3] - [k_1 pl_1 + k_2 pl_2 + k_3 pl_3] = 0$$

Ou encore :

$$k_1[x_1(w_1 - e_1) - x_2 c_1 - x_3 v_1 - (d_1 + pl_1)] + k_2[x_2(w_2 - c_2) - x_1 e_2 - x_3 v_2 - (d_2 + pl_2)] + k_3[x_3(w_3 - v_3) - x_1 e_3 - x_2 v_3 - (d_{23} + pl_3)] = 0$$

Pour la résolution du problème de la transformation, il sera utile de noter :

$$z = k_1[x_1(w_1 - e_1) - x_2 c_1 - x_3 v_1 - (d_1 + pl_1)] + k_2[x_2(w_2 - c_2) - x_1 e_2 - x_3 v_2 - (d_2 + pl_2)] + k_3[x_3(w_3 - v_3) - x_1 e_3 - x_2 v_3 - (d_3 + pl_3)] \tag{7b}$$

Les équations (5b) et (6b) amènent au **système d'équations des branches en prix** :

$$\left.\begin{aligned}
(e_1 t - w_1)x_1 + c_1 t x_2 + v_1 t x_3 &= -d_1(1 + nr) \\
e_2 t x_1 + (c_2 t - w_2)x_2 + v_2 t x_3 &= -d_2(1 + nr) \\
e_3 t x_1 + c_3 t x_2 + (v_3 t - w_3)x_3 &= -d_3(1 + nr)
\end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

On a posé :

$$t = 1 + r$$

Ce système d'équations, quand son déterminant est non nul, permet de déterminer un triplet unique x_1, x_2, x_3 en fonction de r

L'égalité fondamentale **II** peut s'écrire :

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 = k_1 x_1 w_1 + k_2 x_2 w_2 + k_3 x_3 w_3$$

Comme pour le modèle à deux branches, un système d'équations similaire permet de déterminer les k_i en fonction des x_i. Mais ce système d'équations possède un degré de liberté supplémentaire. Il y a donc, contrairement au cas à deux branches, une infinité de solutions. En fixant un k_i, par exemple $k_3 = {k_3}^{fixed}$, on a :

$$k_1 + k_2 = 1 - {k_3}^{fixed}$$

et $$k_1 w_1(1 - x_1) + k_2 w_2(1 - x_2) = -{k_3}^{fixed} w_3(1 - x_3)$$

(déduit de l'égalité fondamentale II)

Le déterminant de ce système est :

$$Det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}$$

Premier cas $Det \neq 0$:

Le coefficient k_3 est fixé et nous supposons ici différentes compositions organiques de la branche 1 et 2 (à taux d'exploitation identiques).

Les solutions de ce système d'équations sont :

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-k_3{}^{fixed} & 1 \\ -k_3{}^{fixed} w_3(1-x_3) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-k_3{}^{fixed} 1 \\ w_1(1-x_1) & -k_3{}^{fixed} w_3(1-x_3) 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}$$

Si au moins l'un des coefficients k_i (pour i=1 ou i=2) est trouvé négatif pour toutes les valeurs de r envisagées cela signifie que la valeur fixée $k_3{}^{fixed}$n'est pas acceptable et il est nécessaire d'en choisir une autre. Parmi les solutions que nous considérons acceptables, figurent celles pour lesquelles la production d'une branche au cours d'un cycle serait insuffisante à la consommation du type de marchandise produite par cette branche au cours de ce même cycle. La possibilité de stocks constitués au cours des cycles précédents est permise.

Deuxième cas $Det = 0$:

Pour des taux d'exploitation et de compositions organiques identiques des branches 1 et 2, pour éviter l'annulation du déterminant, il suffit de choisir l'une parmi ces deux branches dont on fixe le montant de capital pour se ramener au cas $Det \neq 0$. Si les trois branches sont de compositions organiques égales, dans ce cas les prix sont identiques aux valeurs, et les coefficients de transformation sont égaux à 1 :

Nous notons r^*la valeur correspondant à première annulation de z pour z décroissante (voir chapitre i).

L'**égalité fondamentale I** est vérifiée pour $r = r^*$.

L'**égalité fondamentale II** est vérifiée puisque nous l'avons utilisée pour déterminer k_1 et k_2 en fonction de x_1 et x_2.

La valeur r^* peut être approchée aussi précisément que voulu au moyen de l'algorithme décrit en Annexe.

Les coefficients de transformations sont déterminés en fonction de r^* de façon unique.

Le Tableau 3A correspond à la répartition d'un capital de 1000 unités monétaires (um) entre les trois branches E, C, V. Cette répartition est une répartition quelconque de ce capital à partir des coefficients socio-techniques utilisés par V. Laure van Bambeke ((8), page 176). Les Tableaux 3B en valeur et 3C en prix correspondent à la résolution de la transformation. Le capital de la branche 3 a été fixé à 300 um[1], déterminant de la sorte la seule répartition restante possible pour les capitaux des deux premières branches. En employant les mêmes valeurs que Laure Van Bambeke pour le capital de la branche 3, nous obtenons des résultats qui diffèrent légèrement de la « moins mauvaise solution [2] » qu'il détermine par la méthode de Moore-Penrose (3E).

c) *Exemple*

VALEURS INIT	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 E	8.315044	19.401807	38.803467	24.94517	24.94517	116.410658	166.300884
BRANCH 2 C	1.196996	19.949964	39.899885	47.879993	47.879993	156.806831	119.699802
BRANCH 3 V	15.073325	116.355582	232.711164	214.2	214.2	792.540071	713.999996
TOTAL	24.585365	155.707353	311.414516	287.025163	287.025163	1065.75756	1000

Tableau 3A

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 E	16.63376468	38.81219294	77.62409181	49.90137006	49.90137006	232.8727896	332.67530
BRANCH 2 C	3.673247605	61.22088752	122.4416431	146.9303737	146.9303737	481.1965256	367.32538
BRANCH 3 V	6.333329867	48.88890027	97.77780055	90.0000005	90.0000005	333.0000317	300
TOTAL	26.64034215	148.9219807	297.8435355	286.8317443	286.8317443	1047.069347	1000

Tableau 3B

PRIX	F/n	E	C	V	S	W	K
BRANCH 1 E	16.63376468	46.46117676	70.84793374	49.31873652	95.50500825	278.76662	332.96549
BRANCH 2 C	3.673247605	73.28610577	111.7531583	145.2148584	105.2633344	439.1907044	366.9866
BRANCH 3 V	6.333329867	58.5237696	89.24233408	88.9491873	86.06340165	329.1120225	300.049
TOTAL	26.64034215	178.2710521	271.8434261	283.4827823	286.8317443	1047.069347	1000

Tableau 3C

	K	Kp	x_i	r
BRANCH 1 E	332.67530	332.96549	1.197076827	0.286831548657402
BRANCH 2 C	367.32538	366.9866	0.912705477	0.286831548657402
BRANCH 3 V	300	300.049	0.988324298	0.286831548657402

Tableau 3D Pour une répartition avec K3=300

	K	Kp	x_i	r
BRANCH 1 M	305.5184211	305.7797645	1.19704086	0.286828108
BRANCH 2 E	326.5559609	326.2448384	0.912672947	0.286828108
BRANCH 3 C	367.9263	367.9760791	0.98829028	0.286828108

Tableau 3E Pour une répartition correspondant à K3=367.9263

---

[1] En cherchant une « moins mauvaise solution » V. Laure Van Bambeke se cale sur la valeur de 367.9263 pour le capital engagé de la branche 3. Les solutions trouvées par notre méthode ne sont limitées en précision que par le nombre de chiffres significatifs employés (14 dans le cas présent)

[2] « Moins mauvaise solution » est l'expression employée par l'auteur lui-même qui utilise la technique de résolution approchée de Moore-Penrose.

d) *Interprétation géométrique*

Les deux plans qui correspondent dans l'espace des K à l'égalité fondamentale II et à la conservation du capital total sont donnés rappelons-le par les deux équations suivantes :

$$\boldsymbol{K_1 w_1(1-x_1)+K_2 w_2(1-x_1)+K_3 w_3(1-x_3)=0}$$

$$\boldsymbol{K_1+K_2+K_3=K_T}$$

L'intersection de ces deux plans est une droite dans un espace à 3 dimensions. La solution (K1, K2, K3) se trouve sur cette droite (Figure 2A). Si l'on choisit une valeur de K3 différente, r le taux de profit sera lui aussi différent ainsi que x1, x2, x3 les coefficients de la transformation. Or les quantités petit w1, petit w2, petit w3 étant des constantes il s'ensuit que la première équation ci-dessus est modifiée et correspond maintenant à un plan légèrement différent. La seconde équation exprimant la constance du capital total engagé ne change pas. Nous pouvons en déduire que la droite d'intersection des deux plans change pour chaque valeur de K3 choisie. L'ensemble des solutions se positionne donc selon une ligne incurvée dans l'espace à 3 dimensions K1, K2, K3. (Figure 2B) et non pas sur une droite comme l'affirme V. Laure van Bambeke ((8) page 181). Sur la Figure 2A les limites de l'ensemble des solutions indiquées par les points sphériques bleu et vert ne peuvent être qu'approximatives du fait de cette courbure.

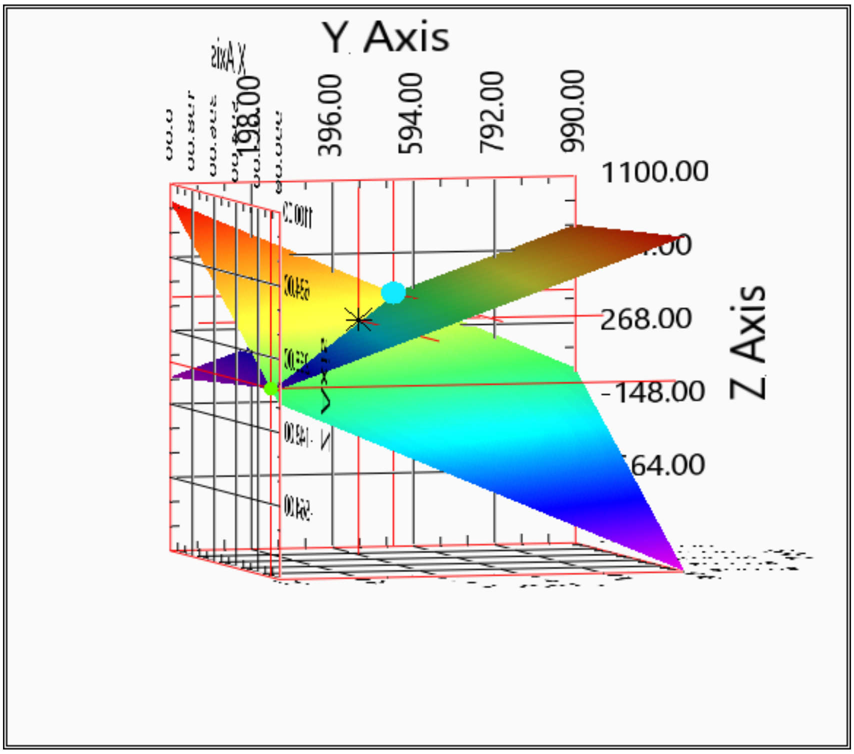


Figure 2 A : L'astérisque désigne une des solutions qui se trouve sur l'intersection des deux plans. Les points verts et bleus désignent les limites approximatives de l'ensemble des solutions.

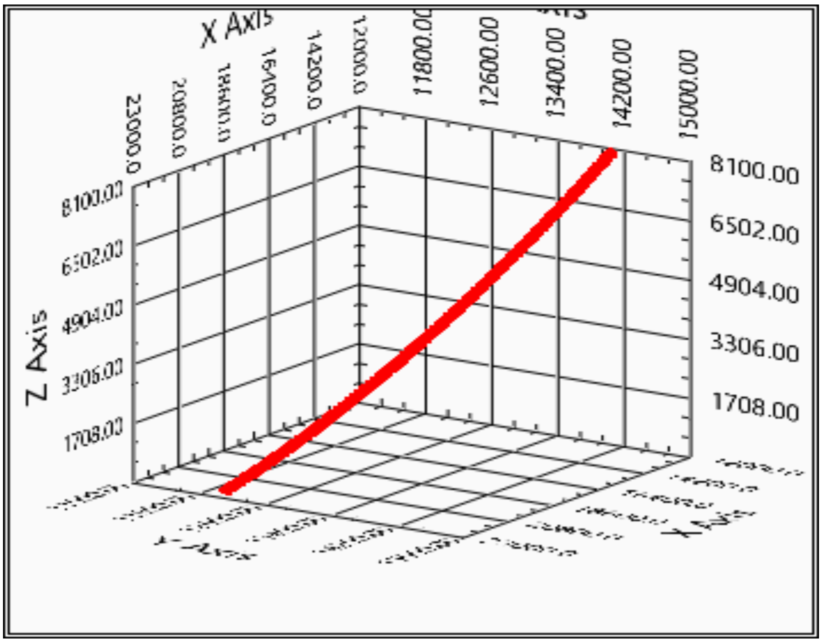


Figure 2B : L'ensemble des solutions ne se situe pas sur un segment rectiligne mais sur un segment courbé (tracé rouge).

Cet exemple utilise des paramètres choisis pour obtenir une courbure prononcée.

Nous pouvons établir un raisonnement tout à fait analogue pour quatre branches. L'ensemble des solutions dans l'espace K1, K2, K3, K4 se répartirait dans ce cas sur une portion de surface légèrement incurvée.

e) *Conclusion*

Quels que soient les coefficients socio-techniques des trois branches, une valeur r^* du taux de profit existe, telle que les deux égalités fondamentales sont respectées. La plus-value étant, dans ce modèle, le seul mécanisme créateur de profit, à taux d'exploitation identiques, le taux de profit en interne (calculé en valeur) est plus important pour la branche la moins capitalistique (composition organique faible). Mais en prix, il est observé un taux de profit comparable entre branches (disons uniforme). Marx avait décrit ce processus en exprimant que les capitalistes « frères » se partagent la plus-value totale, et ce partage se traduit par un taux de profit uniforme (en prix) (3). Autrement dit, en prix, une branche très capitalistique pourra avoir le même taux de profit qu'une branche de faible composition organique, même si en valeur c'est cette dernière branche qui génère proportionnellement le plus de plus-value. Il est notable que contrairement au cas le plus simple comportant deux branches, la répartition contient ici une infinité de solutions.

Le surplus en valeur d'une branche i est défini par la différence positive entre la production en valeur de la marchandise i et les consommations totales de cette marchandise par toutes les branches. Il n'y a pas de profit possible sans surplus en valeur (11). Celui-ci peut être accaparé en actions, en produits de luxe ou en argent par les propriétaires des moyens de production. Les ouvriers produisant plus que ce qu'ils consomment ne peuvent pas absorber toute la surproduction. Mais ils peuvent orienter leurs dépenses vers un produit plutôt qu'un autre. Ce choix va alimenter la compétition entre producteurs capitalistes pour faire désirer leurs marchandises plutôt que d'autres. Si par exemple une envie accrue pour les téléphones portables est suscitée, elle nécessitera une augmentation de l'extraction de certains minerais, modifiant le schéma de la production globale. Une telle compétition entre capitalistes, tout en satisfaisant un taux de profit uniforme dans toutes les branche, n'est possible qu'à condition qu'il n'y ait pas qu'une répartition des capitaux comme solution de la transformation. Nous montrons qu'il y en a une infinité dès lors que la plus-value est non nulle (donc le surplus en valeur et le profit non nuls également). On peut dire que l'existence du surplus amène, dans les deux sens du mot, du jeu dans l'économie.

Dans le « vrai » monde, si l'on se place à un moment précis, il semble qu'une seule répartition des capitaux parmi une infinité possible s'établit. Cet équilibre est déterminé par la réalité du monde, l'attrait de certains produits plutôt que d'autre, le succès relatif des branches de production, ou d'autres paramètres qui ne font pas partie du problème de la transformation (par exemple, la démographie). La transformation se borne à trouver les répartitions possibles, c'est à dire compatible avec les lois de conservation (égalités fondamentales) et l'établissement d'un taux de profit uniforme. Cette répartition change d'ailleurs tout le temps sous les effets de la technique, de la publicité c'est à dire finalement de la compétition entre les différentes marchandises. Si la transformation était rigide au point de ne permettre qu'une seule solution alors elle serait manifestement en contradiction avec la réalité d'un monde où les capitalistes sont en concurrence.

2. Modèle à trois branches avec capital fixe et profit nuls

a) *Résolution*

Les équations (5) et (6) pour le système d'équations des branches en prix deviennent :

$$(e_1 - w_1)x_1 + c_1x_2 + v_1x_3 = 0$$

$$e_2x_1 + (c_2 - w_2)x_2 + v_2x_3 = 0$$

$$e_3x_1 + c_3x_2 + (v_3 - w_3)x_3 = 0$$

$$w_1x_1 = e_1x_1 + c_1x_2 + v_1x_3$$

$$w_2x_2 = e_2x_1 + c_2x_2 + v_2x_3$$

$$w_3x_3 = e_3x_1 + c_3x_2 + v_3x_3$$

Le système d'équations des branches en prix devient :

$[e_1 - w_1]x_1 + c_1x_2 + v_1x_3 = 0$

$e_2x_1 + [e_2 - w_2]x_2 + v_2x_3 = 0$

$e_3x_1 + c_3x_2 + [v_3 - w_3]x_3 = 0$

On a $w_i = c_i + e_i + v_i \quad i = 1,2,3$

On en déduit $x_i = x_j \ \forall i, j$

Le respect de chacune des égalités fondamentales n'est possible que pour $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

En effet, l'égalité fondamentale II est

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 = k_1 x_1 w_1 + k_2 x_2 w_2 + k_3 x_3 w_3$$

Si $x_1 = x_2 = x_3$, alors $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

L'égalité fondamentale **I** devient

$$k_1(x_1(w_1 - e_1) - x_2 c_1 - x_3 v_1) + k_2(x_2(w_2 - c_2) - x_1 e_2 - x_3 v_2) + k_3(x_3(w_3 - v_3) - x_1 e_1 - x_2 c_2) = 0$$

ET peut encore s'écrire :

$$[k_1 w_1 - (k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_1)]x_1 + [k_2 w_2 - (k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3)]x_2 + [k_3 w_3 - (k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3)]x_3 = 0$$

Contrainte physique :

Or, la quantité des marchandises produites dans chacune des trois branches doit être supérieure ou égale à la quantité totale de cette marchandise consommée dans les trois branches. Cette inégalité s'applique pour leur prix.

Autrement dit :

$$k_1 w_1 x_1 \geq (k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3)x_1$$

$$k_2 w_2 x_2 \geq (k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3)x_2$$

$$k_3 w_3 x_3 \geq (k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3)x_3$$

Donc, l'égalité fondamentale **I** n'est possible que lorsque les trois égalités suivantes sont respectées simultanément :

$$k_1 w_1 = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3$$

$$k_2 w_2 = k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3$$

$$k_3 w_3 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

Ce modèle sans capital fixe, ni plus-value, met en exergue l'implication des égalités fondamentales : **elles sont ici l'expression de l'adéquation entre la production et les besoins solvables.**

Ces égalités peuvent également s'écrire :

$$k_1(w_1 - e_1) - k_2 e_2 - k_3 e_3 = 0$$

$$-k_1 c_1 + k_2(w_2 - c_2) - k_3 c_3 = 0$$

$$-k_1 c_1 + k_2(w_2 - c_2) - k_3 c_3 = 0$$

Ce système a son déterminant nul, nous ne garderons donc que deux équations indépendantes.

En tenant compte de l'égalité $k_1 + k_2 + k_3 = 1$, comme troisième équation indépendante du système.

$$k_1[(w_1 - e_1)] - k_2 e_2 - k_3 e_3 = 0$$

$$-k_1[(c_1)] + k_2(w_2 - c_2) - k_3 c_3 = 0$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} (w_1 - e_1) & -e_2 & -e_3 \\ -c_1 & (w_2 - c_2) & -c_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

D ≠0, il existe alors <u>une solution unique</u> pour (k_1, k_2, k_3) :

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -e_2 & -e_3 \\ 0 & (w_2 - c_2) & -c_3 \\ K_T & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} (w_1 - e_1) & 0 & -e_3 \\ -c_1 & 0 & -c_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

$$k_3 = \frac{\begin{vmatrix} (w_1 - e_1) & -e_2 & 0 \\ -c_1 & (w_2 - c_2) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

Avec : $K_i = k_i \, K_T$

b) *Exemples*

Le Tableau 4A reprend l'exemple des Tableaux 3, mais avec une absence de plus-value et de capital fixe. La transformation ne donne alors qu'une seule répartition possible (Tableau 4B).

VALEURS INIT	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 E	0	19.401807	38.803467	24.94517	0	83.150444	83.150444
BRANCH 2 C	0	19.949964	39.899885	47.879993	0	107.729842	107.729842
BRANCH 3 V	0	116.355582	232.711164	214.2	0	563.266746	563.266746
TOTAL	0	155.707353	311.414516	287.025163	0	754.147032	754.147032

Tableaux 4A

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 E	0	35.77724779	71.55422451	45.99929935	0	153.3307716	153.33077165
BRANCH 2 C	0	56.78908263	113.5780429	136.2940243	0	306.6611498	306.66114982
BRANCH 3 V	0	60.76444123	121.5288825	111.8617868	0	294.1551105	294.15511053
TOTAL	0	153.3307716	306.6611498	294.1551105	0	754.147032	754.147032

Tableaux 4B

Le Tableau 4C reprend l'exemple des Tableaux 3, mais avec une absence de plus-value seulement. La transformation ne donne alors qu'une seule répartition possible (Tableau 4D).

VALEURS INIT	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 E	8.315044	19.401807	38.803467	24.94517	0	91.465488	166.300884
BRANCH 2 C	1.196996	19.949964	39.899885	47.879993	0	108.926838	119.699802
BRANCH 3 V	15.073325	116.355582	232.711164	214.2	0	578.340071	713.999996
TOTAL	24.585365	155.707353	311.414516	287.025163	0	778.732397	1000

Tableau 4C

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W – F/n	K
BRANCH 1 E	15.0284791	35.0665193	70.13277292	45.08550597	0	150.284798	300.5695891
BRANCH 2 C	3.339651635	55.66094614	111.3217723	133.5864923	0	300.569211	333.9657271
BRANCH 3 V	7.715375723	59.55733274	119.1146655	109.6396104	0	288.311609	365.4653658
TOTAL	26.08350645	150.2847982	300.5692107	288.3116086	0	739.165617	1000

Tableaux 4D

3. Conclusion

Le système à trois branches avec capital fixe et plus-value nuls met en exergue le sens des égalités fondamentales. Elles expriment l'adéquation entre la production et les besoins solvables. Dans ce modèle simplifié, les égalités fondamentales contraignent à une répartition unique des capitaux entre les trois branches qui assure cette adéquation.

Par généralisation, quel que soit le nombre de branches, le modèle économique sans capital fixe (ou celui dans lequel sa production est endogène –paragraphe F), ni plus-value, conduit à une répartition unique des capitaux telle que les marchandises sont produites dans des quantités correspondant exactement à leur consommation (besoin social solvable).

C- Particularité des cas pour lesquels le capital fixe est nul

1. Capital fixe nul et profit uniforme non nul

Nous traitons ce cas particulier parce qu'il permet de de répondre aux critiques qui ont été formulées à l'égard du rôle du capital fixe dans l'approche de V. Laure van Bambeke (12). Nous montrons que le problème de la transformation se résout de la même manière qu'il y ait ou non du capital fixe. Dans le cas d'un capital fixe nul et d'un profit uniforme nous faisons apparaitre une propriété particulière : bien qu'il y ait une infinité de répartitions possibles des capitaux (si le nombre de branches > 2), pour un capital engagé donné, la plus-value totale produite est identique pour toutes les répartitions respectant les deux égalités fondamentales et le taux de profit est invariable.

a) *Le taux de profit déduit de la valeur propre de la matrice des coefficients socio-techniques*

Ce système sans capital fixe est fermé, c'est à dire que chaque marchandise est produite à partir de marchandises également produites par le système. Le système d'équations des prix (8b) s'écrit :

$$w_1x_1 = (1+r)e_1x_1 + (1+r)c_1x_2 + (1+r)v_1x_3$$
$$w_2x_2 = (1+r)e_2x_1 + (1+r)c_2x_2 + (1+r)v_2x_3$$
$$w_3x_3 = (1+r)e_3x_1 + (1+r)c_3x_2 + (1+r)v_3x_3$$

Quand son déterminant est nul, ce système d'équations homogènes admet une infinité de solutions.

On distinguera la solution particulière $\boldsymbol{x_u}(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*)$, le vecteur unitaire (ayant pour module l'unité) colinéaire à tous les vecteurs $q.\boldsymbol{x_u}(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*)$ (q réel > 0), qui sont également des solutions. Puisque tous les vecteurs $q.\boldsymbol{x_u}(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*)$, $\forall q > 0$, sont des solutions, nous avons à ce stade établi un système cohérent de prix relatifs, avec pour coefficients de transformation :

$$x_i = q \times x_i{}^*, \qquad \forall i$$

Du système d'équations, nous déduisons que :

$$(1+r) = \frac{w_i x_i{}^*}{e_i x_1{}^* + c_i x_2{}^* + v_i x_3{}^*}, \forall i = 1,2,3 \qquad \textbf{(9)}$$

La valeur de r est donc déterminée de manière univoque et trouvée en même temps que le vecteur unitaire $\boldsymbol{x_u}$. En employant le langage des mathématiques, on dit que $\frac{1}{(1+r)}$ est une valeur propre de l'équation aux valeurs propres et $\boldsymbol{x_u}$ le vecteur propre unitaire.

Le taux de profit r envisagé ci-dessus se calcule donc indépendamment des capitaux engagés. Autrement dit r ne varie pas et $dr = 0$.

b) *Invariance du profit total et déplacement des capitaux*

Remarque préliminaire :

On a trois quantités distinctes :

$$r_i = \frac{S_i}{K_{pi}} \qquad pl_i = \frac{PL_i}{K_i} \qquad s_i = \frac{S_i}{K_i}$$

La première formule r_i représente le taux de profit réel, celui apprécié en pratique par le capitaliste. L'expression du centre pl_i est le taux de profit en interne, inaccessible mais qui joue un rôle primordial « derrière le rideau ». La troisième expression s_i est un autre taux de profit qui est le profit par unité de capital en valeur. Alors que r_i et pl_i sont des rapports de quantités « homogènes » (en prix et en valeurs, respectivement), s_i est le rapport du profit en prix sur le capital engagé en valeur.

Le profit total S peut s'écrire sous la forme du produit scalaire :

$$S = \boldsymbol{r}.\mathbf{K_p} = \sum_i r_i.K_{pi} \qquad \textbf{(10)}$$

Nous utilisons les caractères gras pour la notation vectorielle.

La variation de la masse de profit peut s'écrire :

$$dS = \boldsymbol{r}.\mathbf{dK_p} + \mathbf{K_p}.\boldsymbol{dr} \qquad (11)$$

Dans l'espace des capitaux $\mathrm{K_p}$, le vecteur $\mathbf{dK_p}$ appartient au plan défini par l'équation $\sum_i . K_{pi} = \mathrm{K_T}$ ($\mathrm{K_T}$ désignant le capital total engagé). Le profit $\boldsymbol{r}$ étant uniforme, ses composantes sont identiques et son vecteur est perpendiculaire au plan des $\mathrm{K_p}$. Le produit scalaire du premier membre ci-dessus est donc nul. Donc :

$$dS = \mathbf{K_p}.\boldsymbol{dr}$$

Nous en déduisons, puisque $dr = \mathbf{0}$, que le profit total est invariant dans le cas uniforme.

Selon notre hypothèse initiale, la somme des profits est égale à la somme des plus-values donc l'invariabilité de l'une entraine l'invariabilité de l'autre et la plus-value totale PL reste constante.

$$dPL = \boldsymbol{pl}\,.\boldsymbol{dK} = \sum_i pl_i\; dK_i = 0$$

On en déduit que les seuls déplacements de capitaux autorisés se situent dans le plan défini par l'égalité de la somme des capitaux et perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{pl}$ (pl_1, pl_2, pl_3) de l'espace des K.

c) *Détermination des taux de profit à partir des montants de capitaux engagé*

De façon générale, le taux de profit moyen est calculé à partir des capitaux engagés dans chaque branche.

Taux de profit en interne (en valeur) :

$$r_v = \frac{\sum_i K_i[w_i - (e_i + c_i + v_i)]}{K_T} = \frac{\sum_i K_i[w_i - 1]}{K_T}$$

Le taux de profit (en prix) est :

$$r = \frac{q^* \sum_i K_i [w_i x_i^* - (e_i x_1^* + c_i x_2^* + v_i x_3^*)]}{K_T}$$

Avec des répartitions aléatoires des capitaux, non seulement ces deux taux de profit moyens (en valeur et en prix) ne coïncident pas mais ils varient généralement d'une répartition à l'autre.

VALEURS INIT	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 E	0	19.401807	38.803467	24.94517	24.94517	108.095614	83.150444
BRANCH 2 C	0	19.949964	39.899885	47.879993	47.879993	155.609835	107.729842
BRANCH 3 V	0	116.355582	232.711164	214.2	214.2	777.466746	563.266746
TOTAL	0	155.707353	311.414516	287.025163	287.025163	1041.172195	754.14703200000

Tableau 5 Si le capital total $\boldsymbol{K_T}$ est distribué de manière quelconque entre les branches sans respecter les égalités fondamentales, comme dans ce tableau qui contient les valeurs brutes à partir desquelles sont tirées les valeurs par unité de valeur de capitaux, alors le taux de profit en interne (calculé comme le rapport de la plus-value totale sur le capital) ainsi que la production totale changent d'une distribution à l'autre, même pour le système sans capital fixe.

La satisfaction de l'égalité fondamentale II fixe la valeur de q* :

$$q^* = \frac{\sum_i K_i w_i}{\sum_i K_i w_i x_i^*}$$

Or, pour ces valeurs de q^*, correspondant à des distributions de capitaux satisfaisant les égalités fondamentales, comme $K_T = q^* \sum_i K_i \ (e_i x_1^* + c_i x_2^* + v_i x_3^*)$, il peut être vérifié que :

$$r_v = r.$$

Le respect des égalités fondamentales implique l'égalité des taux de profit globaux en valeur et en prix et leur concordance avec celui obtenu à partir de l'équation 9 indépendante des montants de capitaux.

d) *Répartitions possibles des capitaux qui respectent les deux égalités fondamentales*

Pour rappel, l'égalité fondamentale II pour la solution $q\, \boldsymbol{x_u}$:

$$K_1\, w_1(1 - qx_1^*) + K_2\, w_1(1 - qx_2^*) + K_3\, w_1(1 - qx_3^*) = 0$$

Par approximation linéaire et encadrement successifs (pour K_3 fixé), le couple (K_1, K_2) est solution du système à d'équations :

$$K_1\, w_1(1 - qx_1^*) + K_2\, w_1(1 - qx_2^*) + K_3\, w_1(1 - qx_3^*) = 0$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = K_T$$

Comme dans la situation avec capital fixe, la solution doit vérifier également l'égalité fondamentale I qui correspond à l'annulation de la variable z :

$$z = K_1[qx_1^*(w_1 - e_1) - qx_2^* c_1 - qx_3^* v_1 - pl_1] + K_2[qx_2^*(w_2 - c_2) - qx_1^* e_2 - qx_3^* v_2 - pl_2] + K_3[qx_3^*(w_3 - v_3) - qx_1^* e_3 - qx_2^* v_3 - pl_3]$$

Après encadrement avec l'obtention d'un couple de valeurs (z1, z2) tel que z1<0 et z2>0, on calcule par interpolation la valeur particulière q^* qui annule la variable z Une méthode somme toute très semblable à celle utilisée avec capital fixe si ce n'est qu'ici seul le module q^* du vecteur de transformation des prix est à chercher.

Pour toutes les répartitions possibles (une infinité dès qu'il y a trois branches ou plus) qui respectent les deux égalités fondamentales, les taux de profit moyen en valeur (en interne) et en prix sont égaux et ne varient pas. Leur valeur est celle calculée à partir de l'équation 9, c'est-à-dire à partir de la valeur propre de la matrice des coefficients socio-techniques (voir ci-après).

Les Tableaux 6A (valeur) 6B (prix) ainsi que 7A (valeur) 7B (prix) sont construits en partant de la répartition quelconque du Tableau 5 et correspondent à un choix respectif du capital de la branche 3 de 230 et 300 unités monétaires.

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 E	0	44.98323645	89.96613207	57.83556554	57.83556554	250.6204996	192.7849340
BRANCH 2 C	0	61.36333074	122.7265292	147.272238	147.272238	478.6343359	331.3620979
BRANCH 3 V	0	47.5117412	95.02348239	87.46477641	87.46477641	317.4647764	230
TOTAL	0	153.8583084	307.7161437	292.5725799	292.5725799	1046.719612	754.147032

Tableau 6A

PRIX	F/n	E	C	V	S	W	K
BRANCH 1 E	0	47.98869505	86.4912726	58.15294787	74.73225603	267.3651716	192.63292
BRANCH 2 C	0	65.46319026	117.9863294	148.080419	128.6175843	460.147523	331.52994
BRANCH 3 V	0	50.68613643	91.3532874	87.94475398	89.22273959	319.2069174	229.98418
TOTAL	0	164.1380218	295.8308894	294.1781208	292.5725799	1046.719612	754.147032

Tableau 6B

	r	x_i
BRANCH 1 E	0.38795164275602	1.066812858
BRANCH 2 C	0.387951642756018	0.961375916
BRANCH 3 V	0.387951642756019	1.005487667

Tableau 6C

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 E	0	37.72783071	75.45537557	48.50719063	48.50719063	210.1975875	161.6903969
BRANCH 2 C	0	54.15861783	108.3171189	129.9808983	129.9808983	422.4375334	292.4566350
BRANCH 3 V	0	61.97183634	123.9436727	114.084491	114.084491	414.084491	300
TOTAL	0	153.8582849	307.7161672	292.5725799	292.5725799	1046.719612	754.147032

Tableau 7A

PRIX	F/n	E	C	V	S	W	K
BRANCH 1 E	0	40.24853505	72.54098102	48.7733821	62.67859176	224.2414899	161.5629
BRANCH 2 C	0	57.77711008	104.1334697	130.6941907	113.5165014	406.1212719	292.60477
BRANCH 3 V	0	66.11235209	119.1564622	114.7105491	116.3774868	416.3568502	299.97936
TOTAL	0	164.1379972	295.830913	294.1781218	292.5725799	1046.719612	754.147032

Tableau 7B

	r	x_i
BRANCH 1 M	0.38795164275602029	1.066812862
BRANCH 2 E	0.38795164275601918	0.961375919
BRANCH 3 C	0.3879516427560194	1.00548767

Tableau 7C

e) *Matrice des coefficients sociotechniques*

Les coefficients sociotechniques de chaque branche i sont tels que:

$$\mathbf{e_i} + \mathbf{c_i} + \mathbf{v_i} + \mathbf{pl_i} = \mathbf{1} + \mathbf{pl_i} = \mathbf{w_i}$$

Le degré d'exploitation de la branche i, $\frac{\mathbf{pl_i}}{\mathbf{v_i}}$ est contenu dans $\mathbf{w_i}$, la production par unité de capital engagé en valeur de la branche i. En prix nous avons :

$$(\mathbf{e_i}x_1 + \mathbf{c_i}x_2 + \mathbf{v_i}x_3)(\mathbf{1} + \boldsymbol{r}) = \mathbf{w_i}x_i$$

Ce qui se traduit (pour 3 branches) par l'équation aux valeurs propres :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e_1}/w_1 & \mathbf{c_1}/w_1 & \mathbf{v_1}/w_1 \\ \mathbf{e_2}/w_2 & \mathbf{c_2}/w_2 & \mathbf{v_2}/w_2 \\ \mathbf{e_3}/w_3 & \mathbf{c_3}/w_3 & \mathbf{v_3}/w_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+r)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matrice ci-dessus (que nous appellerons matrice des coefficients socio-techniques) tient compte des besoins en constituants de chaque marchandise qui rentre dans la composition d'une marchandise donnée. Elle ignore les conditions de la satisfaction du besoin social mais elle nous dit quel profit sera réalisé pour chaque unité produite et vendue, c'est un profit par unité de capital, donc un taux de profit potentiel. Nous avons montré que toutes les configurations de capitaux respectant les égalités de Marx et seules ces répartitions conduisaient au même taux de profit. Ce fait prouve d'une autre façon le caractère fondamental de ces égalités. Si cela n'avait été le cas il y aurait eu effectivement une incohérence. Pour cette raison l'invariabilité de la masse de profit quand il n'y a pas de capital fixe est un résultat important (cas uniforme).

Seul le respect des deux égalités fondamentales permettra de connaître la répartition adéquate des capitaux rendant ce taux de profit effectif.

Cette matrice ne contient aucune information sur le montant des capitaux engagés. L'exposé ci-avant a démontré l'équivalence, quand les égalités fondamentales sont respectées, entre ce taux de profit avec celui calculé par le rapport du profit sur le capital total ; on ne s'étonnera donc pas que la valeur propre de la matrice soit indépendante des capitaux engagés.

Cette matrice contient des proportions c'est-à-dire des quantités par unité de valeurs produites de chaque marchandise utilisée dans la fabrication d'une autre marchandise. Le taux de profit calculé à partir de la matrice est donc un profit par unité de valeur produite. C'est donc le profit authentique réalisé à chaque fois qu'une unité de valeur est produite et achetée. Elle ne nous dit pas combien de valeur sera effectivement produite et réalisée. Pour un capital égal à K_T le profit est le produit $\boldsymbol{r}.\boldsymbol{K_T}$ mais la matrice ne connait rien sur K_T et sur sa distribution dans les différentes branches. La matrice contient toute l'information sur les quantités potentielles de valeurs par unité de valeur produite des marchandises entrant dans la composition des marchandises. Le taux de profit inhérent à la matrice suppose implicitement qu'aucune valeur n'est perdue en cours de route dans le cas où par exemple une marchandise aurait été produite en excès par rapport aux besoins. La matrice ne nous dit rien sur ces besoins mais suppose implicitement qu'ils sont remplis et elle nous procure par conséquent le taux de profit optimal qui est aussi le seul possible dans un système à profit uniforme sans capital fixe et pour un taux d'exploitation uniforme.

f) *Valeurs permises des transferts de capitaux entre les branches dans le cas d'un système fermé (sans capital fixe) et à taux de profit uniforme, un exemple :*

Nous avons vu que le profit total et donc la plus-value totale (l'égalité fondamentale I) sont constants pour toutes les répartitions permises des capitaux. Cela se traduit par:

$$\Delta PL = \boldsymbol{pl} \, . \Delta \boldsymbol{K} = \sum_i pl_i \, \Delta K_i = 0$$

Les vecteurs déplacement $\Delta \boldsymbol{K}$ possibles appartiennent au plan $\sum_i K_i = K_T$ et sont orthogonaux au vecteur $\boldsymbol{pl}$.

Considérons le cas pour lequel seule la branche 1 produit de la plus-value. Pour que PL ne change pas, il faut que K_1 aussi reste inchangé. Seuls les déplacements $\Delta \boldsymbol{K}$ orthogonaux à l'axe des K_1 sont donc autorisés. Autrement dit, dans ce cas, seuls les transferts entre les branches 2 et 3 sont possibles et il n'y a qu'une solution pour K_1. Ce cas est illustré par les Tableaux 8.

Remarquons que la valeur du montant de capital de la branche 1 (121.90 um ; Tableau 8B) est inférieure à celle trouvée quand il n'y avait pas de plus-value du tout (153.33 um ; Tableau 4B). Cet exemple illustre qu'avec une plus-value produite, la branche 1 permet de satisfaire les besoins sociaux solvables avec un capital engagé moindre.

	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 E	0	28.66090532	57.32159349	36.84972001	36.84972001	159.6819388	122.8322188
BRANCH 2 C	0	61.3545743	122.7090164	147.2512225	0	331.3148132	331.3148132
BRANCH 3 V	0	61.97183634	123.9436727	114.084491	0	300	300
TOTAL	0	151.987316	303.9742825	298.1854335	36.84972001	790.996752	754.147032

Tableau 8A

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
BRANCH 1 E	0	22.95038931	60.35473264	38.60430098	5.956833231	127.8662562	121.90942
BRANCH 2 C	0	49.13003795	129.2020934	154.2625158	16.25149885	348.846146	332.59465
BRANCH 3 V	0	49.62431418	130.5020808	119.5165669	14.64138793	314.2843499	299.64296
TOTAL	0	121.7047414	320.0589069	312.3833837	36.84972001	790.996752	754.147032

Tableau 8B

	r	x_i
BRANCH 1 E	0.048862779328106044	0.80075591
BRANCH 2 E	0.048862779328107064	1.052914425
BRANCH 3 C	0.048862779328106419	1.0476145

Tableau 8C

Tableaux 8 A, B, C. La seule valeur permise pour le capital de la branche 1 est : 122.832218811826 quels que soient les valeurs possibles pour les branches 2 et 3.

2. Capital fixe nul et taux de profit différents selon les branches

Au contraire de la situation précédente, quand les taux de profit ne sont plus identiques dans toutes les branches, le profit total ainsi que la production totale changent avec la répartition. Considérons l'égalité suivante :

$$\boldsymbol{PL} = \sum_i K_i\, pl_i = K_1\, pl_1 + K_2\, pl_2 + K_3\, pl_3 = K_T . r$$

Dans cette équation, nous ne pouvons pas simplement remplacer r par sa valeur moyenne $< r >$ quand les montants de capitaux qui permettent de calculer cette valeur moyenne de r ne sont pas connus. Le taux de profit moyen $< r >$ qui va dépendre de la répartition des capitaux ne peut plus alors être obtenu au moyen de la valeur propre d'une matrice et ceci bien que nous ayons affaire à une équation sans second membre[3].

Il est à noter que dans cette configuration des taux de profits différents, la valeur particulière q^* qui annule la variable z, change avec les répartitions, donc le module du vecteur des prix est également modifié et l'ensemble des solutions est un segment incurvé quand il y a trois branches comme dans le cas avec capital fixe.

L'idée de taux de profits différents selon les branches se conçoit très bien, en imaginant par exemple une situation de monopole pour l'une des branches, même si cette situation présente un caractère artificiel sans capital fixe, sa considération revêt toutefois un intérêt théorique qui permet d'examiner la cohérence des concepts. Une situation de monopole conduit, y compris quand le taux d'exploitation reste semblable dans toutes les branches, à une répartition inégale entre les capitalistes. Dans ce cas les différents taux de profits r_i sont, en l'absence de capitaux fixes, toujours déterminés indépendamment des capitaux engagés (l'équation 3 s'applique toujours à condition d'ajouter l'indice petit i au taux de profit concernant la branche i) tandis que le taux de profit moyen $< r >$ varie bien évidemment selon la répartition des capitaux selon les **N** branches.

$$< r > = \frac{1}{\mathrm{K_T}} \sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}} \mathrm{K_i\, r_i}$$

Quand les taux de profits diffèrent selon les branches alors le vecteur **r** n'est plus perpendiculaire au déplacement des capitaux $\boldsymbol{dK}_{pi}$, le produit scalaire, premier membre de **l'équation 2** ne s'annule plus, d'autre part le module r ne peut plus être mis en facteur dans la somme de **l'équation 1)** et la masse totale de la plus-value n'est par conséquent plus une quantité conservée avec la répartition des capitaux et ceci même quand il n'y a pas de capital fixe.

3. Différence avec le cas où il y a amortissement d'un capital fixe

Nous avons donc démontré que dans un système sans capital fixe, si l'on impose la condition d'égalité des taux de profit, la somme de profit ou de plus-value est constante (quels que soient les

[3] Laure Van Bambeke semble croire qu'en l'absence de second membre le taux de profit est forcément déterminé par la valeur propre.

déplacements des capitaux qui maintiennent les égalités fondamentales de Marx). Dans un système avec capital fixe, il en va tout autrement.

Dans ce cas l'expression du profit de la branche i contient un terme d_i d'amortissement de ce capital fixe.

$$S_i = K_{ip}r_i = K_i s_i = K_i(w_i x_i - e_i x_1 - c_i x_2 - v_i x_3 - d_i)$$

Le changement de prix, fonction de la répartition, n'affectant pas le coefficient supplémentaire, la production et les coûts d'une branche ne varient plus proportionnellement l'une à l'autre. Le changement avec la répartition du vecteur des prix **x** n'est plus un changement du module seul, le rapport des prix des marchandises change et la production totale ainsi que le taux de profit peuvent varier avec la répartition des capitaux. Le taux de profit ne peut plus dans ce cas être extrait du calcul de la valeur propre d'une matrice.

Plusieurs remarques :

* Dans le cas général même quand les taux de profit r_i des branches sont identiques, les taux s_i ne le sont pas car :

$$r_i = \frac{S_i}{K_{pi}} \neq s_i = \frac{S_i}{K_i}$$

Dans une situation de monopole une branche peut effectivement bénéficier d'un taux de profit supérieur à celui des autres branches. Mais une opération « marketing » avisée peut aussi conférer à une marchandise un caractère unique qui met l'entreprise qui l'a produite en situation de monopole pour cet article. Ainsi la société qui fabrique les chaussures de sports **Nike peut réaliser un surprofit car elle est seule à pouvoir faire, non pas des chaussures de sport mais des chaussures de sport avec le logo Nike recherché[4].

L'argument qu'une marchandise puisse être vendue à un prix ayant plus à voir au désir exprimé pour elle qu'à la quantité de travail qu'elle contient ou bien au montant de capital investi par le capitaliste, a souvent été employé pour contester la pertinence du concept de valeur objective dans la théorie marxiste. Le désir subjectif rencontre la réalité objective des moyens de la production.

Ce surprofit n'est cependant en dernière analyse réalisable que parce que s'effectue un transfert de la plus-value réellement produite par l'ensemble des salariés de tous les secteurs. Ce surprofit bénéficie également à l'ensemble de la branche en tirant les prix vers le haut.

Dans le cadre de la théorie marxiste une marchandise non désirable n'a pas de valeur quelle que soit le temps passé à la fabriquer. Si la marchandise est désirée, sa valeur n'est non plus simplement une substance contenue en elle. La valeur, tout objective qu'elle soit, nait d'interactions complexes qui font intervenir l'ensemble du champ social de la production à la consommation. Le nombre d'heures socialement nécessaires et les efforts qui sont mis en œuvre pour produire la marchandise demeurent incontournables pour comprendre la dynamique du capitalisme mais ils résultent de rapports de force qui fluctuent sans arrêt selon l'époque et le lieu. Si la valeur se déplace avec la marchandise elle n'est cependant pas une substance contenue en elle[5]. Ces considérations qui confèrent à la marchandise un

---

[4] Réponse à Fréderic Lordon 13. F. Lordon, *La condition anarchique, affects et institutions de la valeur* (Le Seuil, Paris, 2018)..

[5] On sait aujourd'hui que la masse des particules élémentaires nait aussi d'une interaction avec un champ scalaire que l'on appelle Champ de Higgs 14. B. Pire (Champ de Higgs et masse des particules. (https://www.universalis.fr/encyclopedie/boson-de-higgs/3-champ-de-higgs-et-masse-des-particules/)..

rapport social et relationnel, différencient nettement le concept de valeur dans le Marxisme d'avec sa vision ricardienne classique et étaient assez justement énoncées par Marx et d'autres auteurs (15).

4. Conclusion

La considération du cas sans capital fixe à taux de profit uniforme, pour lequel le calcul exact du taux de profit est possible sans avoir à se préoccuper des montants de capitaux alloués aux différents secteurs a pu induire en erreur des théories économique sur le fait que la répartition des capitaux entre branches ne serait pas fondamentale (9, 10, 16). Mais cela n'empêche pas de traiter ce cas pour le problème de la transformation.

Nous avons montré qu'avec une répartition aléatoire (Tableau 5) le taux de profit en valeur ne correspondait pas avec celui obtenu à partir de la valeur propre de la matrice. La coïncidence de ces deux taux survient quand les égalités fondamentales sont respectées, et donc quand le besoin social solvable est satisfait. Dans ce cas, nous avons démontré une invariance du profit total. Cette invariance est un point important qui explique pourquoi il est possible de déterminer le taux de profit par la méthode matricielle (indépendante de l'allocation des capitaux) (10). Quand le taux de profit n'est pas uniforme alors les taux de profits de chaque branche, invariables pour toutes les répartitions conformes, peuvent toujours être déterminés par l'équation 9 mais les montants de capitaux deviennent indispensables au calcul du taux de profit moyen.

D- Critère de convergence dans un processus « réel »

Dans ce qui précède, nous avons développé une méthode permettant la détermination directe de la distribution des capitaux correspondant à l'état d'équilibre final du système. Du fait que le point d'arrivée du processus est connu (taux de profit uniforme ou taux différents d'un écart donné) et que la distribution des capitaux, entrée initialement, fixe les coefficients de transformation de chaque branche, notre méthode permet de déduire les transferts de capitaux effectués. Dans ce que nous appellerons ici (par abus de langage) un « processus réel », les taux de profits des différentes branches atteignent progressivement leurs valeurs d'équilibre par le biais d'échanges successifs de capitaux qui se transfèrent systématiquement vers les branches les plus profitables. Dans une simulation, on pourrait atteindre la convergence vers un taux de profit uniforme par un processus de transferts successifs ajustés en fonction d'un gradient du taux de profit entre branches.

Afin de simuler ce « processus réel » de convergence, nous avons imposé des taux de profit différents entre branches et nous avons suivi les mouvements de capitaux amenant, pas à pas, à un taux de profit intermédiaire. Pour un modèle à trois branches sans capital fixe, le taux de profit de la branche 2 servant de référence, les taux de profit de départ r1 et r3 sont tels que r1=r2+dr et r3=r2-dr. La simulation consiste à décrémenter progressivement le différentiel dr jusqu'à zéro (puis négatif) au cours d'itérations successives (voir Annexe 2). Les montants de capitaux en valeur K1 et K3 sont déterminés par le programme à chaque itération pour respecter les deux égalités fondamentales.

La Figure 3 représente un exemple d'une telle convergence où la branche à taux de profit le plus élevé attire les capitaux de la branche à taux de profit le plus bas.

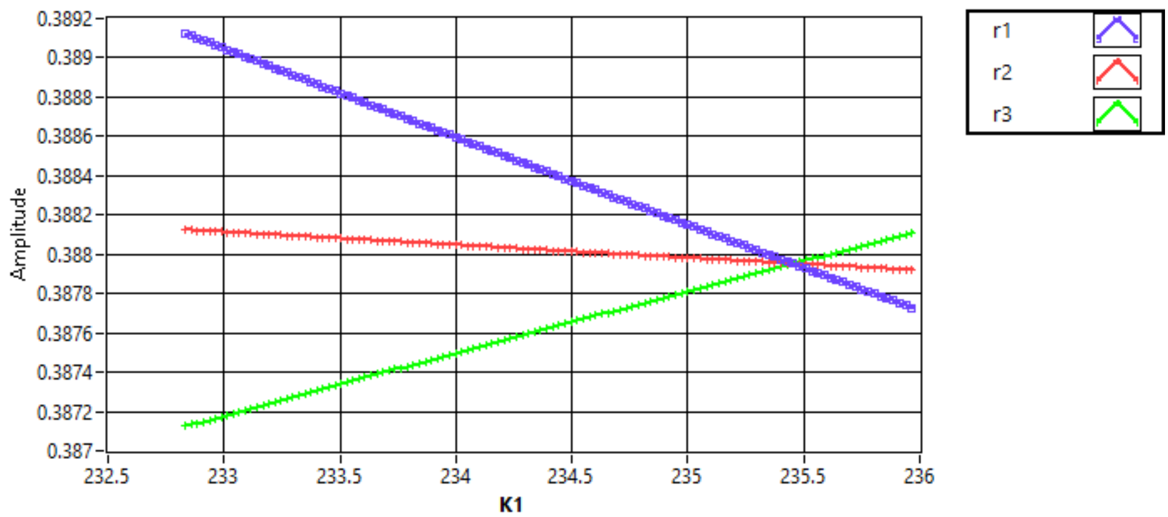


Figure 3. Les taux de profit (ordonnée) des trois branches sont représentés en fonction du capital K1 engagé (en valeur) dans la branche 1. Le capital K2 est maintenu fixe et les transferts n'ont lieu qu'entre 1 et 3 dans un sens ou dans l'autre. Pour chaque valeur de r1, r2, r3 la répartition des capitaux à l'équilibre est calculée selon notre algorithme de manière à ce que les deux égalités fondamentales (en plus des 3 égalités de branches) soient respectées.

Dans d'autres cas, comme celui illustré par la Figure 4, la convergence nécessite à un transfert vers la branche la moins profitable. En effet, que l'on soit d'un côté ou de l'autre du point d'intersection, le transfert vers la branche la plus rentable conduit alors à un éloignement du point d'intersection qui n'est donc pas un point d'équilibre.

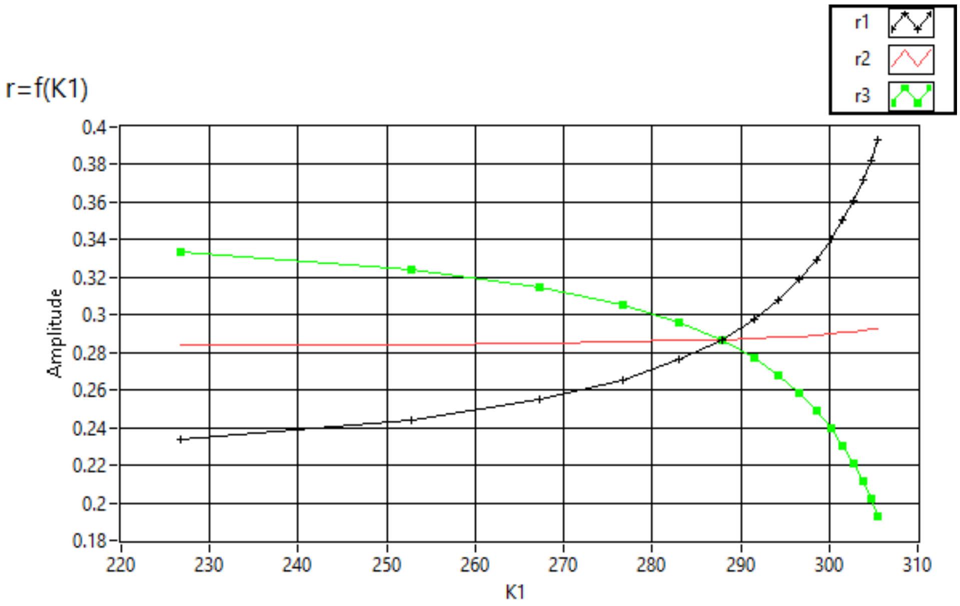


Figure 4. Trajectoire divergente d'égalisation des taux de profit. On voit ici que la convergence ne peut se produire que si le transfert de capital se fait vers la branche la moins rentable.

Les exemples des Figures 3 et 4 illustre cette évidence : si l'indice i désigne la branche la plus rentable, et Ki le montant du capital engagé dans cette branche, la convergence n'est possible qu'à condition que :

$$\frac{dr_i}{dK_i} < 0$$

Le signe de la variation de r étant identique à celui de s, nous pouvons rechercher la condition :

$$\frac{ds_i}{dK_i} < 0$$

Rappelons que S_i est le profit réalisé dans cette branche et que

$$s_i = \frac{S_i}{K_i} = \boldsymbol{w_i x_i - d_i - (e_i x_1 + c_i x_2 + v_i x_3)}$$

On en déduit :

$$\frac{ds_i}{dK_i} = \frac{dS_i}{dK_i}\frac{K_i}{K_i{}^2} - \frac{S_i}{K_i^2} = \frac{1}{K_i}\frac{dS_i}{dK_i} - \frac{S_i}{K_i^2}$$

La condition s'écrit alors :

$$\frac{1}{K_i}\frac{dS_i}{dK_i} < \frac{S_i}{K_i^2}$$

Soit

$$\boldsymbol{\frac{dS_i}{dK_i} < \frac{S_i}{K_i}}$$

Conclusion

Une convergence vers un taux de profit uniforme n'est possible que si, pour la branche économique la plus rentable, le taux d'accroissement du profit associé à l'augmentation de capital (en valeur) est inférieur au rapport du profit sur le capital engagé (en valeur). Autrement dit, dans la branche la plus rentable, plus le capital engagé est important plus il doit être difficile d'augmenter le profit de cette branche. Il faut des apports de capitaux de plus en plus grands pour augmenter le profit dans les mêmes proportions qu'auparavant.

Cette condition de convergence semble une condition « naturellement » respectée conforme aux limites généralement imposées par la nature. On y voit un rapport direct avec la loi générale des rendements décroissants mais il ne s'agit pas ici d'une limite physique essentielle toujours respectée dans le monde réel. Il semblerait que le non-respect de la condition établie ci-dessus, par exemple dans le secteur informationnel doive conduire à un phénomène de bulle spéculative.

E- Invalidité des conséquences attribuées au théorème d'Okishio

Le théorème d'Okishio (17) énonce que l'augmentation des profits d'un capitaliste par une réduction de ses coûts augmente le taux de profit général dans la société. Ce théorème a été employé comme argument invalidant la baisse tendancielle du taux de profit moyen (BTTPM) prédite par Marx (18-20). Nous montrons ici que cette interprétation du théorème est une erreur. Au contraire, non seulement le théorème d'Okishio n'est pas un obstacle à la BTTPM, mais il en est l'un des mécanismes, dès lors que la mobilité des capitaux et les répartitions possibles qui en résultent sont prises en compte.

1. Le théorème d'Okishio n'empêche pas la BTTPM

Dans ce paragraphe, partant d'un modèle à trois branches avec des taux de profits différents pour chaque branche, nous présentons des simulations sur le mode du chapitre précédent montrant une convergence vers un taux de profit uniforme qui s'accompagne d'une BTTPM.

Nous notons la composition organique globale CO, calculée comme suit : $CO = \frac{F+E+C}{V}$

F, E, C, V, désignent $\sum_i F_i$, $\sum_i E_i$, $\sum_i C_i$, $\sum_i V_i$, respectivement.

La composition organique en prix est : $CO_p = \frac{F+x_1E+x_2C}{x_3V}$

Les coûts sont : $D + x_1E + x_2C + x_3V$

avec $D = F/n$
n étant le nombre de cycles pour l'amortissement du capital fixe (égale à 10 dans les exemples qui suivent).

a) *Cas sans capital fixe (F = 0)*

Les paramètres de cette simulation sont détaillés dans l'Annexe

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 E	0	54.32456192	108.6487122	69.84583613	69.84583613	302.6649464
BRANCH 2 C	0	71.29627221	142.5923907	171.1113371	171.1113371	556.1113371
BRANCH 3 V	0	28.16163884	56.32327769	51.84300518	51.84300518	188.1709269
TOTAL	0	153.782473	307.5643807	292.8001784	292.8001784	1046.94721

PRIX	F/n	E	C	V	S	W	Taux de profit
BRANCH 1 E	0	58.00818831	104.4593118	70.18737752	90.53309824	323.1879759	0.389130454
BRANCH 2 C	0	76.13071211	137.0941514	171.9480599	149.4952412	534.6681645	0.388125001
BRANCH 3 V	0	30.07121625	54.15150078	52.09651396	52.77183896	189.0910699	0.387119547
TOTAL	0	164.2101167	295.704964	294.2319513	292.8001784	1046.94721	

Tableaux 9 A, B (valeurs et prix au départ de la simulation)

Nous prenons pour point de départ la répartition les tableaux 9 A-B (en valeur et prix) ci-dessus et en imposant un taux de profit supérieur pour la branche 1 (E), intermédiaire pour la branche 2 (C) et inférieur pour la branche 3 (V), nous appliquons le processus de transfert de capitaux décrit au chapitre V pour aboutir à l'égalisation des taux de profits. Pour ces simulations, le montant du capital K2, fixé par le programme à chaque itération, est aussi diminué progressivement (voir Annexe 2).

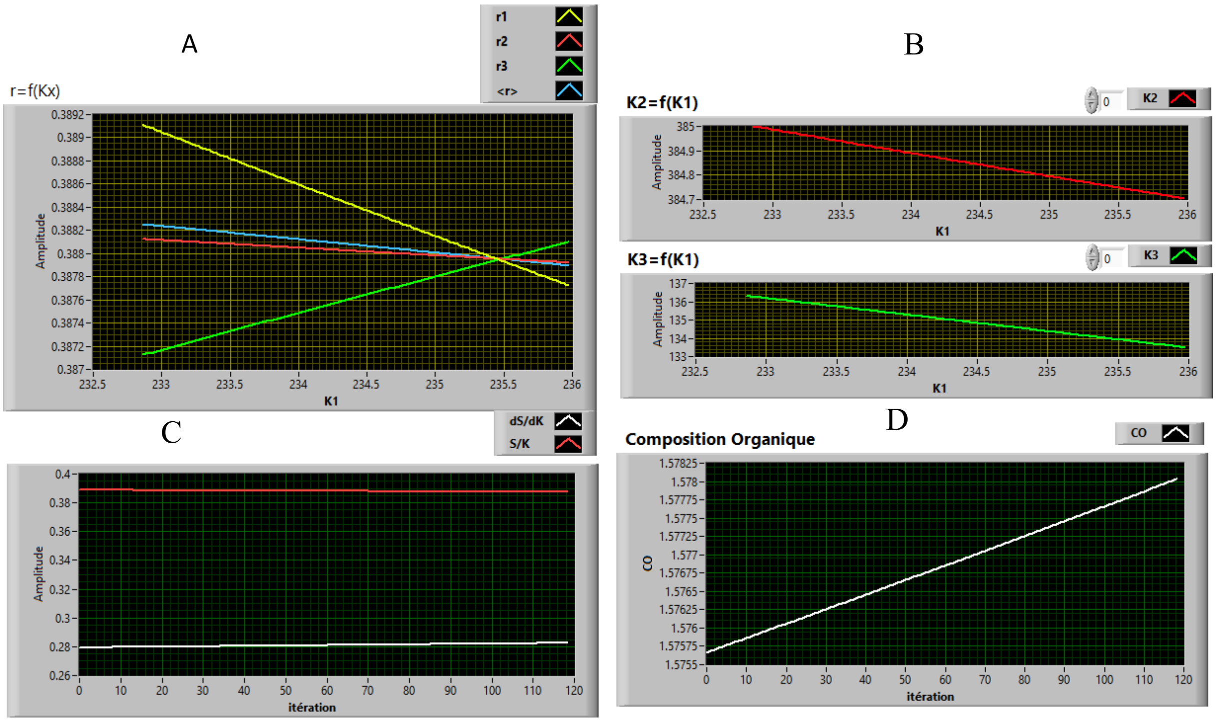


Figure 4. A. La convergence vers l'égalité des taux de profit se produit ici quand le transfert des capitaux s'effectue vers la branche la plus rentable. Le taux de profit moyen général (tracé bleu) baisse au fur et à mesure que la convergence se réalise. **B.** Evolution des capitaux en fonction de K1 le capital de la branche E. **C.** dS1/dK1 (tracé blanc) et S/K (tracé rouge) montrant le respect du critère de convergence $\frac{dS_1}{dK_1} < \frac{S_1}{K_1}$ (voir chapitre D). **D.** Evolution de la composition organique du capital total.

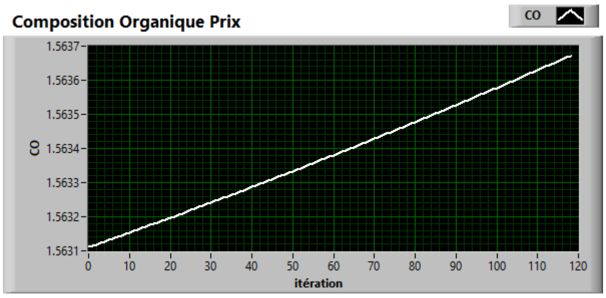


Figure 4E Pour cet exemple, la composition organique calculée en prix évolue dans le même sens que la composition organique en valeur.

Il faut noter (Figure 5) que la composition organique en prix n'est pas obligatoirement une fonction monotone du taux de profit. Par exemple, la simulation précédente reprise à partir d'un différentiel plus important des taux de profit, bien que faisant apparaitre une décroissance monotone du taux de profit moyen (courbe bleue), ne fait pas apparaître une variation monotone de la composition organique en prix (courbe blanche) mais présente une forme approximativement parabolique.

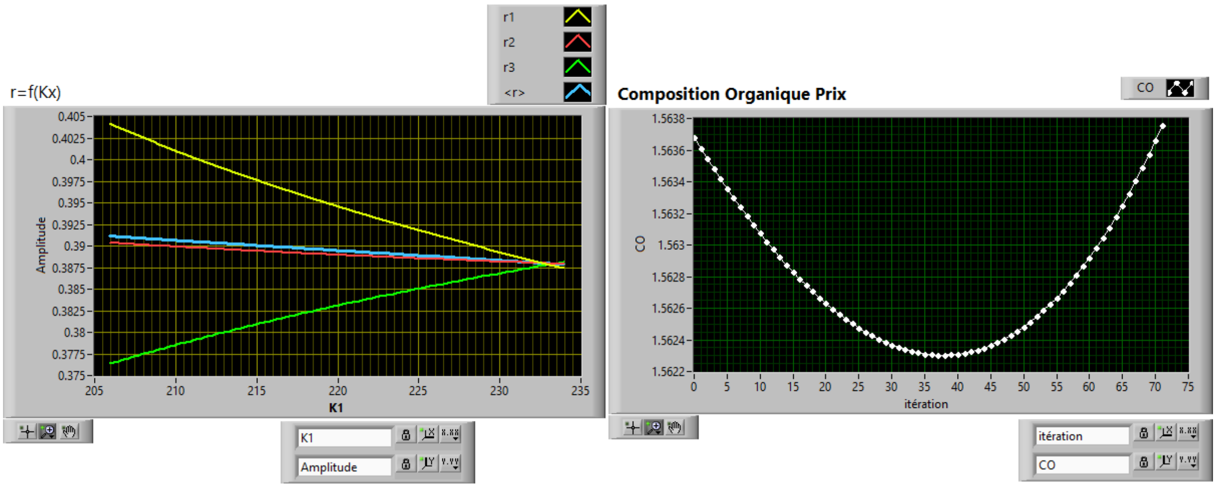


Figure 5. La composition organique en prix n'est pas une fonction monotone du taux de profit

Le total des coûts en l'absence de capital fixe étant constant et égal au capital engagé, il n'est pas représenté sur la Figure 4.

Cet exemple illustre que sans capital fixe, on observe une BTTPM.

b) *Cas avec Capital fixe non nul*

Les Tableaux 10 et 11 (en valeurs A et en prix B) correspondent respectivement au début et à la fin de la simulation (itération 101).

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 E	32.036068	33.93699782	67.87373852	43.63326468	43.63326468	221.1133337
BRANCH 2 C	3.849993503	64.16665702	128.3331757	154.0002322	154.0002322	504.3502907
BRANCH 3 V	5.260801586	40.60972813	81.21945627	74.75880071	74.75880071	276.6075874
TOTAL	41.14686309	138.713383	277.4263705	272.3922976	272.3922976	1002.071212

Tableau 10A Valeurs au départ de la simulation

PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 E	32.036068	45.20922369	59.7470034	41.5738036	115.9903679	294.5564666
BRANCH 2 C	3.849993503	85.47971055	112.967443	146.7315237	94.93418134	443.962852
BRANCH 3 V	5.260801586	54.09831161	71.49479659	71.23023502	61.46774839	263.5518932
TOTAL	41.14686309	184.7872458	244.209243	259.5355623	272.3922976	1002.071212

Tableau 10B Prix au départ de la simulation

	K	Kp	x_i	r
BRANCH 1 E	465.804681	466.8907107	1.332151533	0.248431518
BRANCH 2 C	385	383.6786122	0.880266871	0.247431518
BRANCH 3 V	249.196001	249.4313591	0.952800665	0.246431518
TOTAL	1100	1100		

Tableau 10C Capitaux, coefficients et taux de profit au départ de la simulation

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 E	32.07991603	33.98344767	67.96663786	43.69298588	43.69298588	221.4159733
BRANCH 2 C	3.848993505	64.14999035	128.2998424	153.9602322	153.9602322	504.2192906
BRANCH 3 V	5.249453301	40.52212727	81.04425453	74.59753551	74.59753551	276.0109061
TOTAL	41.17836283	138.6555653	277.3107348	272.2507536	272.2507536	1001.64617

Tableau 11A Valeurs à la fin de la simulation

PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 E	32.07991603	45.20008407	59.83667647	41.67182581	115.7084158	294.4969182
BRANCH 2 C	3.848993505	85.3234488	112.9530076	146.8383048	94.94236624	443.9061209
BRANCH 3 V	5.249453301	53.89693174	71.34998863	71.14678577	61.5999715	263.2431309
TOTAL	41.17836283	184.4204646	244.1396727	259.6569164	272.2507536	1001.64617

Tableau 11B Prix à la fin de la simulation

	K	Kp	x_i	r
BRANCH 1 E	466.4422317	467.5077466	1.330061756	0.247500532
BRANCH 2 C	384.9	383.6046962	0.880383058	0.247500532
BRANCH 3 V	248.6584503	248.8882391	0.953741773	0.247500532
TOTAL	1100	1100		

Tableau 11C Capitaux, coefficients et taux de profit à la fin de la simulation

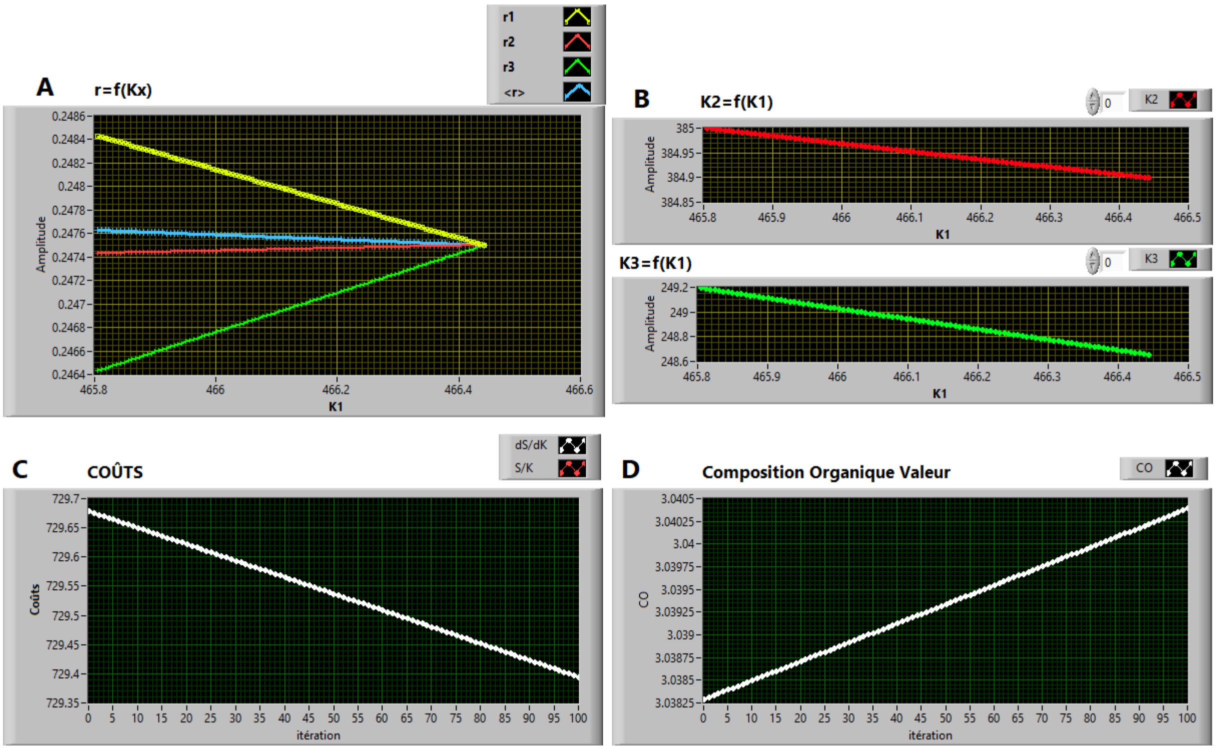


Figure 6 A, B, C, D. convergence vers le même taux de profit quand le transfert des capitaux se fait vers la branche la plus rentable. Le taux de profit moyen général (tracé bleu) baisse au fur et à mesure que la convergence se réalise. **B.** Evolution des capitaux en fonction de K1 (le capital de la branche E). **C.** Evolution des coûts de production (en prix) : on observe une diminution. **D.** Evolution de la composition organique du capital total, qui augmente.

Conclusion

Cet exemple est une illustration de notre observation qu'une BTTPM peut se produire quand les capitaux se dirigent vers la branche la plus rentable (et aussi à composition organique plus grande) amenant ainsi à une égalisation des taux de profits. Cette baisse du taux de profit qui se produit, bien que les coûts de production diminuent (en cas de capital fixe), est due à l'augmentation de la composition organique en valeur. Mais la composition organique peut augmenter également s'il n'y a pas de capital fixe et la baisse du taux de profit moyen est aussi observée dans ce cas. Il est intéressant de noter que dans ce dernier exemple avec un capital fixe non nul, la composition organique calculée en prix diminue (Figure 6E). Dans cet exemple c'est la composition organique en valeur qui gouverne de fait la baisse du taux de profit.

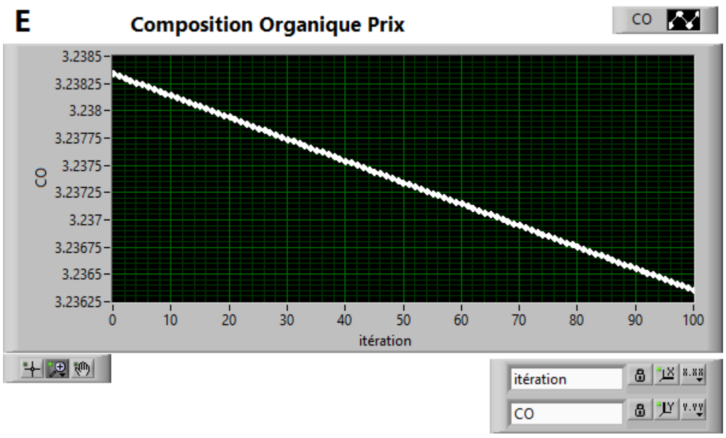


Figure 6E. La composition organique apparente, c'est-à-dire exprimée en prix, diminue tandis que, pour le même exemple, la composition organique en valeur augmente (Figure 6D). Cet exemple illustre que même dans le cas d'une composition organique en prix qui baisse, la BTTPM est associée à une composition organique en valeur qui augmente.

2. Le théorème d'Okishio favorise la BTTPM

Dans le paragraphe précédent nous partions directement d'une situation avec des taux de profit différents pour chaque branche. Nous nous intéressons ici à la genèse d'un taux de profit supérieur susceptible d'apparaitre dans un secteur. Nous partons de la répartition quelconque suivante qui sert à définir des coefficients sociaux-techniques (exemple avec cinq branches M, E, C, V et L) :

Durée amortissement : n=10 cycles

	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 M	10	30	60	40	40	180	230
BRANCH 2 E	15	20	50	30	30	145	250
BRANCH 3 C	5	35	65	80	80	265	230
BRANCH 4 V	3	32	70	60	60	225	192
BRANCH 5 L	2	0.5	1	20	20	33.5	31.5
TOTAL	35	117.5	246	220	230	844.7	933.5

Tableau 12

Nous nous intéressons (par exemple) à la branche E de l'énergie. Son capital est de (150 + 20 + 50 + 30) =250 um. Nous en déduisons que pour cette branche : f/n = 15/250 = 0,06 et que v= 30/150 = 0.2.

Imaginons que des capitalistes de cette branche (E) se mettent à utiliser une amélioration technique qui permette d'économiser les coûts de production, notamment la main-d'œuvre au prix d'une augmentation de la proportion du capital fixe en valeur qui passe de 150 um à 152 um (pour K_2 = 250 um) au détriment de la force de travail qui passe de 30 à 28 um (pour K_2 = 250). On suppose le capital investit dans cette branche constant. Les nouveaux coefficients socio-techniques deviennent : f'/n=152/250 = 0,0608 et v'=28/250=0,112.

Durée amortissement : n=10 cycles

	F/n	E	C	V	PL	W	K
BRANCH 1 M	10	30	60	40	40	180	230
BRANCH 2 E	15.2	20	50	28	30	145	250
BRANCH 3 C	5	35	65	80	80	265	230
BRANCH 4 V	3	32	70	60	60	225	192
BRANCH 5 L	2	0.5	1	20	20	33.5	31.5
TOTAL	35.2	117.5	246	218	230	848.5	933.5

Tableau 13

A partir de ces coefficients socio-techniques nous pouvons construire une répartition régulière[6], c'est à dire qui respecte les deux égalités de Marx. Nous choisissons de fixer le montant des capitaux des trois dernières branches à 242, 358 et 5 um, respectivement. Ce choix correspond à une répartition arbitraire (mais régulière) parmi celles qui respectent les besoins de chaque branche sans recourir à l'utilisation de stocks. En partant des coefficients socio-techniques du Tableau 12 nous obtenons le résultat des Tableaux 14. Le taux de profit est de r = 0,2614634020. Cet équilibre est celui duquel nous partons. La valeur ainsi produite par la branche E est :

$$W_E = D_E + E_E + C_E + V_E + PL_E \quad \textbf{(E1)}$$

Maintenant, nous nous situons juste après que l'amélioration technique ait eu lieu, ce sont maintenant les coefficients socio-techniques du Tableau 2 qui s'appliquent, les lettres primées indiquent les nouvelles valeurs, nous avons maintenant :

$$W'_E = D'_E + E_E + C_E + V'_E + PL'_E \ \textbf{(E2)}$$

Le travail socialement nécessaire (correspondant à la moyenne de la branche considérée) pour produire la marchandise E n'a pas encore changée et les deux quantités W_E et W'_E sont égales. Si $V'_E + D'_E < V_E + D_E$, une plus-value extra est réalisée grâce à la nouvelle technique.

Plaçons-nous à l'instant <u>immédiatement après</u> ce changement technique, quand les montants de capitaux alloués aux différentes branches n'ont pas eu le temps de changer. Nous pouvons calculer :

$$D'_E = \frac{f'_E}{n} K_E = 0{,}0608 * 227{,}734 = 13{,}846$$

$$V'_E = v'_E K_E = 0{,}112 * 227{,}734 = 25{,}506$$

$$D_E = 13{,}664 < D'_E = \ et \ V_E = 27{,}328 > V'_E \ \textbf{(I1)}$$

Les productions en prix avant et après sont :

$$x_E W_E = D_E + x_E E_E + x_C C_E + x_v V_E + S_E$$

[6] Répartition telle que les deux égalités fondamentales sont respectées.

$$x'_E W_E = D'_E + x_E E_E + x_C C_E + x_v V'_E + S'_E$$

Si l'on convient que les prix pour cette quantité n'ont pas changés :

$$x'_E W_E = x_E W_E$$

L'économie réalisée sur les coûts relativement au procédé de production standard encore en cours est la source du surprofit $(S'_E - S_E)$ réalisé par les capitalistes modernisateurs. Son expression est :

$$S'_E - S_E = x_v(V_E - V'_E) - (D'_E - D_E)$$

Durée amortissement : n=10 cycles

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 M	4.381104518	13.14331355	26.28662711	17.52441807	17.52441807	78.85988132
BRANCH 2 E	13.66407577	18.21876769	45.54691922	27.32815153	27.32815153	132.0860657
BRANCH 3 C	5.260869565	36.82608696	68.39130435	84.17391304	84.17391304	278.826087
BRANCH 4 V	5.59375	59.66666667	130.5208333	111.875	111.875	419.53125
BRANCH 5 L	0.317460317	0.079365079	0.158730159	1.587301587	3.174603175	5.317460317
TOTAL	29.21726017	127.9341999	270.9044142	242.4887842	244.0760858	914.6207443

PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 M	4.38110452	16.32383	24.3255872	16.7476419	26.4622152	88.2403788
BRANCH 2 E	13.6640758	22.6274801	42.1490194	26.1168213	59.4918342	164.049231
BRANCH 3 C	5.26086957	45.7375364	63.2891634	80.4428737	63.2946078	258.025051
BRANCH 4 V	5.59375	74.1052488	120.783694	106.9161	93.5365822	400.935374
BRANCH 5 L	0.31746032	0.09857043	0.14688854	1.51694387	1.29084639	3.37070954
TOTAL	29.2172602	158.892666	250.694352	231.74038	244.076086	914.620744

Tableaux 14 A et 14 B

	K (Valeur)	Kp	x_i	r
BRANCH 1 M	100.7654039	101.2081042	1.118951453	0.261463402
BRANCH 2 E	227.7345961	227.5340784	1.24198741	0.261463402
BRANCH 3 C	242	242.0782691	0.925397812	0.261463402
BRANCH 4 V	358	357.7425423	0.955674636	0.261463402
BRANCH 5 L	5	4.937006012	0.63389463	0.261463402
TOTAL	933.5	933.5		

Tableau 14 C

$$r'_E = \frac{S'_E}{F'_E + x_E E_E + x_C C_E + x_v V'_E}$$

Du Tableau 14 des prix nous lisons :

$$S_E = 59.49183422278 \ \ V_E = 26.1168212538384878 \ \ D_E = 13.6640757654306455$$

$$x_v = 0,9556746355$$

Nous avons calculé plus haut D'_E et V'_E, nous en déduisons :

$S'_E = 61.0508 \ et \ r'_E = 0.26822$

$r'_E = 0.26822 \quad > r_E = 0.26146340205694413$

Le taux de profit transitoire de la branche E étant devenu supérieur à celui des autres secteurs (si tous les capitalistes de ce secteur n'ont pas encore modernisé leur production ce taux de profit est inférieur à r'_E), les capitaux vont affluer jusqu'à produire la péréquation des taux de profit. Le nouvel état d'équilibre en valeur et en prix est alors donné par les Tableaux 15, il a été obtenu en maintenant fixes les capitaux des trois dernières branches. Le transfert de la branche 1 vers la branche 2 qui est aussi la plus capitalistique est la solution indiquée par l'algorithme pour le respect des deux égalités fondamentales de Marx. Les nouveaux montants de capitaux, les taux de profit ainsi que les coefficients de transformation sont dans le Tableau 16.

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 M	3.828900457	11.48670137	22.97340274	15.31560183	15.31560183	68.92020823
BRANCH 2 E	14.6184656	19.23482316	48.0870579	26.92875242	28.85223474	137.7213338
BRANCH 3 C	5.260869565	36.82608696	68.39130435	84.17391304	84.17391304	278.826087
BRANCH 4 V	5.59375	59.66666667	130.5208333	111.875	111.875	419.53125
BRANCH 5 L	0.317460317	0.079365079	0.158730159	1.587301587	3.174603175	5.317460317
TOTAL	29.61944594	127.2936432	270.1313285	239.8805689	243.3913528	910.3163393

Tableau 15 A

PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 M	3.828900457	14.29538511	21.24403114	14.62665421	23.06288203	77.05785294
BRANCH 2 E	14.6184656	23.93804763	44.46720264	25.71740597	62.65529921	171.396421
BRANCH 3 C	5.260869565	45.83065913	63.24300388	80.38748545	63.11484395	257.836862
BRANCH 4 V	5.59375	74.25612895	120.6956008	106.8424837	93.27135049	400.659314
BRANCH 5 L	0.317460317	0.098771121	0.146781409	1.515899388	1.286977104	3.36588934
TOTAL	29.61944594	158.4189919	249.7966199	229.0899287	243.3913528	910.3163393

Tableaux 15 B

	K (Valeur)	Kp	x_i	r
BRANCH 1 M	88.06471052	88.45507503	1.11807342	0.260729891
BRANCH 2 E	240.4352895	240.3073122	1.244516128	0.260729891
BRANCH 3 C	242	242.0698441	0.924722879	0.260729891
BRANCH 4 V	358	357.7317135	0.955016614	0.260729891
BRANCH 5 L	5	4.936055093	0.632988145	0.260729891
TOTAL	933.5	933.5		

Tableau 16

3. Conclusion

Le transfert des capitaux vers la branche la plus profitable (et aussi la plus capitalistique dans notre exemple) amène à un nouvel équilibre pour lequel le taux de profit a diminué par rapport à sa valeur initiale r_E :

$$r »_E = 0.2607298905038033$$

$$r'_E > r_E > r »_E$$

Le phénomène de la baisse tendancielle du taux de profit moyen énoncé par Marx est donc vérifié pour le modèle décrit ici du fait que les mouvements de capitaux ne sont pas instantanés[7]. Il n'y aurait pas d'intérêt à l'innovation si le résultat final arrivait immédiatement. Le théorème d'Okishio rend compte d'un phénomène transitoire. Il décrit l'effet transitoire de l'augmentation initiale du taux de profit dans un secteur. Cet effet, suivi de déplacements de capitaux jusqu'à la péréquation des taux de profit, est un processus qui réalise la BTTPM. Notons que la BTTPM peut survenir, y compris en absence de capital fixe. C'est l'augmentation de la composition organique en valeur, quand bien même elle baisserait quand exprimée en prix (Figure 7), qui gouverne la baisse du taux profit moyen. On pourrait penser que l'innovation technique permanente, survenant avant qu'un nouvel état d'équilibre ne soit atteint est à même de contrecarrer cette BTTPM. Il est indéniable que l'innovation est un facteur (parmi d'autres) qui change la trajectoire du taux de profit moyen en lui donnant plus ou moins régulièrement des impulsions positives. Ce n'est pas un hasard si le mot « tendancielle » a été choisi par Marx. Mais il facile de se persuader que même si le système est entraîné dans un déséquilibre permanent, ponctué de changements des conditions de production associés à des hausses passagères du taux de profit, à partir du moment où la masse de plus-value à partager, elle, tend à diminuer au cours du temps (toute chose étant égale par ailleurs) alors la BTTM se produit inexorablement.

[7] On voit ici que l'argument de M. Husson (2017) contre le schéma de V. Laure van Bambeke, objectant du temps pris par les transferts de capitaux, ne tient pas.

F- L'ajout d'une branche de luxe

L'ajout d'une branche de luxe répond à cette question : Pouvons-nous ajouter une branche de Luxe correspondant à la consommation des capitalistes de façon à construire un système cohérent, qui respecte les égalités fondamentales et qui soit un système de reproduction simple, c'est-à-dire pour lequel, quel que soit i, le prix de la production totale de marchandise de la branche i soit exactement égal au prix de la consommation de cette marchandise par toutes les branches ?

1. Cas sans capital fixe

Nous avons vu au chapitre C que lorsqu'il n'y a pas de capital fixe, toutes les répartitions des capitaux qui respectent les égalités fondamentales conduisent nécessairement aux mêmes bilans en valeurs et en prix pour les productions totales ainsi qu'aux mêmes profits totaux et plus-values totales. Si nous partons d'un système de capital total $K_{1,2,3}$ à trois branches 1-E (Energie), 2-C (Matières premières), 3-V (biens de consommation courante) en gardant les notations S pour profit et PL pour plus-value, cela se traduit par :

$$\sum_{i=1}^{3} K_i pl_i = PL_{1,2,3} = constante \;\; \forall\, K_i \; tels\ que \sum_{i=1}^{3} K_i = K_{1,2,3}$$

En vertu de l'équivalence du profit total avec la plus-value totale de ces trois branches :

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = S_{1,2,3} = PL_{1,2,3}$$

Soit, $E_{1,2,3}, C_{1,2,3}, V_{1,2,3}$ les consommations totales pour ces trois branches en marchandise du type désigné, et $E_L, C_L, V_L = E_4, C_4, V_4$ celles de la branche de luxe. Nous voulons que la somme des prix d'une marchandise donnée soit égale au prix de sa production totale.

La condition de reproduction totale s'écrit donc :

$$\cancel{x_1}\sum_{i=1}^{4} E_i = \cancel{x_1} W_1 \quad ; \quad \cancel{x_2}\sum_{i=1}^{4} C_i = \cancel{x_2} W_2 \quad ; \quad \cancel{x_3}\sum_{i=1}^{4} V_i = \cancel{x_3} W_3$$

On note :

$E_{1,2,3} = (E_1 + E_2 + E_3),\; C_{1,2,3} = (C_1 + C_2 + C_3),\; V_{1,2,3} = (V_1 + V_2 + V_3)$

Nous alimentons la branche de luxe par les surplus E_L, C_L, V_L générés dans les trois premières branches de telle manière que :

$$\left.\begin{aligned} E_L &= W_1 - (E_1 + E_2 + E_3) \\ C_L &= W_2 - (C_1 + C_2 + C_3) \\ V_L &= W_3 - (V_1 + V_2 + V_3) \end{aligned}\right\}$$

(EQ VI-1)

$$E_L + C_L + V_L = PL_1 + PL_2 + PL_3$$

$$S_L = x_L W_L - (x_1 E_L + x_2 C_L + x_3 V_L)$$

La plus-value totale et le profit total incluant la branche L sont :

$$PL_T = PL_{1,2,3} + PL_L = S_T = S_{1,2,3} + SL_L$$

Nous rappelons ici que si les quantités E_i, C_i, V_i sont devenues E'_i, C'_i, V'_i après réallocation des capitaux suite à l'ajout de la branche de luxe, par contre les sommes $PL_{1,2,3}$ ainsi que $S_{1,2,3}$ sont demeurées constantes et égales entre elles, ce qui implique :

$PL_L = S_L = rK_{pL}$

Donc

$$x_L = 1$$

Nous posons que le taux d'exploitation e_L pour la branche de luxe L soit identique aux autres branches ($e_L = 1$), alors la plus-value de la branche de luxe est : $PL_L = V_L$

Nous pouvons aussi déduire, le capital engagé $K_L = E_L + C_L + V_L$ de la branche L, ce dernier étant égal au surplus (invariable) $PL_{1,2,3}$ des trois premières branches, que :

$rK_L = r(E_L + C_L + V_L) = r.PL_{1,2,3} = V_L$ (EQ VI-2)

La condition de reproduction totale qui se traduit par les équations EQ VI-1 impose :

$$\cancel{x_3}W_3 - \cancel{x_3}(V_1 + V_2 + V_3) = \cancel{x_3}PL_L = \cancel{x_3}V_L$$

0r la somme des V_i ci-dessus n'est autre que la plus-value $PL_{1,2,3}$ (invariable) des branches 1, 2, 3 car on suppose les taux d'exploitation tous égaux à l'unité.

$$W_3 = V_L + PL_{1,2,3}$$

En vertu de (EQ VI-2) et en introduisant la production par unité de capital $w_3 = W_3/K_3$, l'égalité ci-dessus devient :

$$K_3 w_3 = r.PL_{1,2,3} + PL_{1,2,3} = PL_{1,2,3}(1 + r)$$

$$K_3 = \frac{PL_{1,2,3}(1 + r)}{w_3}$$

On voit donc que le capital de la branche 3 doit être une quantité spécifique, mais une valeur particulière de K_3 implique des valeurs bien déterminées pour $K_{1,}$ K_2 et par conséquent pour E_L, C_L, V_L .

Cependant ce capital de la branche 3 peut être déterminé directement étant donné que les quantités qui servent à le calculer sont ici indépendantes de la répartition. On rappelle qu'il est question ici de toutes les répartitions qui obéissent aux égalités fondamentales. On sait déjà que, pour un système à trois branches, lorsque le capital d'une branche (en l'occurrence ici la branche 3) est fixée alors il ne reste plus qu'une seule solution possible et le système de reproduction totale à quatre branches incluant la branche de luxe possède donc une et une seule répartition possible des capitaux. Le coefficient K_3 est donc fixé dans l'algorithme principal pour trois branches qui en déduit donc les valeurs obligées pour K_1 et K_2 .

Un exemple ci-dessous après normalisation du capital à 1000 unités monétaires (um).

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 E	0	36.6183671	73.2364567	47.0807379	47.0807379	204.0163
BRANCH 2 C	0	52.3117634	104.623414	125.54844	125.54844	408.032057
BRANCH 3 V	0	58.0607973	116.121595	106.884625	106.884625	387.951642
BRANCH 4 L	0	57.0253718	114.050592	108.437839	108.437839	387.951642
TOTAL	0	204.0163	408.032057	387.951642	387.951642	1387.95164

PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 E	0	39.0649449	70.4077658	47.3391015	60.8354001	217.647212
BRANCH 2 C	0	55.806862	100.582431	126.237409	109.645493	392.272194
BRANCH 3 V	0	61.9400053	111.636505	107.471173	109.03291	390.080592
BRANCH 4 L	0	60.8354001	109.645493	109.03291	108.437839	387.951642
TOTAL	0	217.647212	392.272194	390.080592	387.951642	1387.95164

	K	Kp	xi	r
BRANCH 1 E	156.9355618	156.8118124	1.066812861	0.387951642
BRANCH 2 C	282.4836177	282.6267015	0.961375919	0.387951642
BRANCH 3 V	281.0670172	281.0476828	1.00548767	0.387951642
BRANCH 4 L	279.5138033	279.5138033	1	0.387951642
TOTAL	1000	1000		

Tableaux 17 A, B, C

2. Cas avec capital fixe

Les équations (EQ VI-1) s'appliquent encore. Mais cette fois leurs sommes verticales imposent :

$$E_L + C_L + V_L = PL_1 + PL_2 + PL_3 + d_1 + d_2 + d_3$$

Ou encore, le taux d'exploitation étant égal à un :

$$E_L + C_L + V_L = d_1 + d_2 + d_3 + V_1 + V_2 + V_3$$

Et :

$$W_i = D_i + V_i + E_i + C_i + PL_i \quad i = 1,2,3$$

$$W_i - (V_i + E_i + C_i) = D_i + PL_i = D_i + V_i$$

Or la plus-value de la branche L, $S_L = V_L$ étant encore égale à son profit ($x_L = 1$) :

$$V_L = rK_L = r[n.D_L + E_L + C_L + V_L] = r[n.D_L + D_1 + D_2 + D_3 + V_1 + V_2 + V_3]$$

Et :

$$W_3 = V_L + PL_{1,2,3} = r[n.D_L + dD_1 + D_2 + D_3] + (r+1)PL_{1,2,3}$$

Finalement :

$$K_3 = \frac{PL_{1,2,3}(1+r) + r[n.d_L + d_1 + d_2 + d_3]}{w_3}$$

Le capital fixe $n.d_L$ de la branche de luxe peut être choisi arbitrairement.

On notera que contrairement au cas précédant la plus-value et le profit sont ici fonction de la répartition. A chaque répartition correspond une quantité de plus-value totale différente. En réinjectant plusieurs fois la valeur obtenue de K_3 à l'entrée de l'algorithme principal pour actualiser $PL_{1,2,3}$, nous produisons une boucle de convergence rapide et asymptotique vers K_3.

3. Conclusion

On peut donc artificiellement construire un système à quatre branches de reproduction totale avec ou sans Capital fixe et avec des taux de profit identiques dans toutes les branches, ce système respectant les égalités fondamentales. L'ajout la branche de luxe interagit avec les trois premières branches et modifie la répartition des capitaux. Quand il n'y a pas de capital fixe le taux de profit n'est pas modifié. Cette branche de luxe possède un coefficient de transformation égal à l'unité et possède de fait une composition organique de son capital égale à la moyenne des compositions organiques de toutes les branches. Cette branche de luxe pourrait servir à fabriquer un étalon monétaire (5).

Après normalisation du capital total à 1000 (um) :

Durée amortissement : n=10 cycles

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 E	11.68238094	27.25894178	54.51767702	35.0471962	35.0471962	163.5533921
BRANCH 2 C	2.524161581	42.06942435	84.13875802	100.9667859	100.9667859	330.6659157
BRANCH 3 V	5.455205741	42.11039296	84.22078591	77.5213876	77.5213876	286.8291598
BRANCH 4 L	2.233404974	52.11463306	107.7886947	73.29379013	73.29379013	308.724313
TOTAL	21.89515323	163.5533921	330.6659157	286.8291598	286.8291598	1089.772781

PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 E	11.68238094	32.63036677	49.757351	34.63716777	67.07462469	195.7818912
BRANCH 2 C	2.524161581	50.35928238	76.7920048	99.78554292	72.33213176	301.7931234
BRANCH 3 V	5.455205741	50.40832393	76.86687025	76.61443991	74.12861323	283.4734531
BRANCH 4 L	2.233404974	62.38391809	98.37689739	72.43630246	73.29379013	308.724313
TOTAL	21.89515323	195.7818912	301.7931234	283.4734531	286.8291598	1089.772781

Tableaux 18 A, B

	K	Kp	xi	r
BRANCH 1 E	233.6476244	233.8486949	1.197051853	0.286813354
BRANCH 2 C	252.4165841	252.1784459	0.91268289	0.286813354
BRANCH 3 V	258.4046239	258.4416915	0.988300678	0.286813354
BRANCH 4 L	255.5311677	255.5311677	1	0.286813354
TOTAL	1000	1000		

Tableau 19

Remarque :

Si nous partons d'une branche de luxe avec des coefficients socio-techniques quelconques, le coefficient de transformation xL n'a plus aucune raison d'être égal à un. Un exemple avec un capital total de mille unités monétaires où xL vaut 0.9029742142335 .

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 E	16.25105639	40.8813405	77.31916682	46.53165992	46.53165992	227.5148835
BRANCH 2 C	2.871510536	45.45965176	83.72240806	114.8607886	114.8607886	361.7751475
BRANCH 3 V	6.118836912	50.58938706	101.1787662	87.0434776	87.0434776	331.9739454
BRANCH 4 L	4.081632657	4.081632657	18.36734695	36.73469383	36.73469383	99.99999992
TOTAL	29.3230365	141.012012	280.587688	285.1706199	285.1706199	1021.263976

PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 E	16.25105639	49.41898169	69.55260122	46.32534963	93.48100295	275.0289919
BRANCH 2 C	2.871510536	54.95342547	75.31264887	114.3515232	77.94640294	325.435511
BRANCH 3 V	6.118836912	61.15445243	91.01554852	86.65754757	85.55566662	330.5020521
BRANCH 4 L	4.081632657	4.934039028	16.52238132	36.57182096	28.18754739	90.29742135
TOTAL	29.3230365	170.4608986	252.4031799	283.9062414	285.1706199	1021.263976

	K	Kp	xi	r
BRANCH 1 E	327.2427311	327.8074964	1.208839561	0.285170425
BRANCH 2 C	272.7579537	273.3327029	0.899551872	0.285170425
BRANCH 3 V	300	300.0159176	0.995566238	0.285170425
BRANCH 4 L	100	98.84456787	0.902974214	0.285170425
TOTAL	1000	1000		

Tableaux 20 A, B, C

Si nous prenons une situation sans plus-value, nous obtenons la solution unique :

PRIX=VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 E	13.54259217	34.06789741	64.43285399	38.77651264	0	150.8198562
BRANCH 2 C	3.414165106	54.05056148	99.54416694	136.5670407	0	293.5759342
BRANCH 3 V	7.380786296	61.02294604	122.0458825	104.9953309	0	295.4449458
BRANCH 4 L	1.678451284	1.678451284	7.553030773	15.10606152	0	26.01599486
TOTAL	26.01599486	149.1414049	286.0229035	280.3388843	0	765.8567311

	K
BRANCH 1 E	272.7031858
BRANCH 2 C	324.3034202
BRANCH 3 V	361.8720225
BRANCH 4 L	41.12205641
TOTAL	1000

Le cas où les machines ne sont plus importées mais sont fabriqués dans le système considéré est intéressant (Tableaux 21 A, B) :

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 M	0.859573858	4.014439445	8.023463034	5.157958943	5.157958943	23.21339422
BRANCH 2 E	10.9135	25.4655609	50.9289391	32.7405	32.7405	152.789
BRANCH 3 C	2.3323067	38.87255577	77.74277923	93.292268	93.292268	305.5321777
BRANCH 4 V	10.93390257	84.42568071	168.7995665	155.3846884	155.3846884	574.9285266
BRANCH 5 L	0.449418107	0.00904166	0.017607444	0.23793843	0.23793843	0.951944073
TOTAL	25.48870124	152.7872785	305.5123553	286.8133538	286.8133538	1057.415043
PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 M	0.859573858	4.80503501	7.322080722	5.097123319	7.405514379	25.48932729
BRANCH 2 E	10.9135	30.48069683	46.47691422	32.35434168	62.65350314	182.8789559
BRANCH 3 C	2.3323067	46.52803809	70.94678478	92.19193095	66.82459191	278.8236524
BRANCH 4 V	10.93390257	101.0523031	154.0437149	153.5520014	148.5656016	568.1475236
BRANCH 5 L	0.449418107	0.010822307	0.016068264	0.235132062	1.364142737	2.075583477
TOTAL	25.48870124	182.8768953	278.8055629	283.4305294	286.8133538	1057.415043

Tableau 21 A

	K (Valeur)	Kp	x(i)	Taux de profit
BRANCH 1 M	25.7916	25.81997763	1.098043959	0.286813354
BRANCH 2 E	218.27	218.4469527	1.196937972	0.286813354
BRANCH 3 C	233.23067	232.9898208	0.912583593	0.286813354
BRANCH 4 V	517.9489614	517.9870451	0.988205485	0.286813354
BRANCH 5 L	4.758768609	4.756203708	2.180362835	0.286813354
TOTAL	1000	1000		

Tableau 21 B

Dans ce cas (voir Tableau 22), si l'on supprime la plus-value, il y a réorganisation des capitaux qui abandonnent la branche de luxe pour se reporter dans les branches fondamentales.

PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 M	1.228824113	5.738936736	11.47013111	7.373682046	0	25.811574
BRANCH 2 E	13.74645109	32.07596898	64.14918867	41.23935328	0	151.210962
BRANCH 3 C	3.322774916	55.38068952	110.7580563	132.9109966	0	302.3725173
BRANCH 4 V	7.513523881	58.01536678	115.9951413	106.7767487	0	288.3007806
BRANCH 5 L	0	0	0	0	0	0
TOTAL	25.811574	151.210962	302.3725173	288.3007806	5.68E-14	767.695834

Tableau 22

Comme nous le démontrons dans le **chapitre G** suivant, dans ce système qui produit tout ce qu'il consomme, il ne peut y avoir de branche de luxe sans profit.

G- L'ajout d'une branche produisant le capital fixe

1. Cas général

On considère les quatre branches fondamentales suivantes :

$\boldsymbol{K_i = F_i + E_i + C_i + V_i}$

F_i: Capital en machines-outils, bâtiments…

La fraction de cette sorte de marchandise consommée par une branche i à chaque cycle est égale à l'amortissement d_i.

E_i : Capital nécessaire à chaque cycle pour l'énergie.

C_i : Capital nécessaire à chaque cycle pour l'achat de matières premières.

V_i : Capital variable, défini comme le capital nécessaire à chaque cycle pour reproduire la force de travail des salariés.

$\boldsymbol{e}$: Taux d'exploitation.

$$w_i = d_i + e_i + c_i + v_i + pl_i = d_i + e_i + c_i + (1 + e)v_i \quad (4b)$$

$$x_i w_i = d_i + x_2 e_i + x_3 c_i + x_4 v_i + s_i \quad (5b)$$

$$s_i = r(nd_i + x_2 e_i + x_3 c_i + x_4 v_i)$$

L'égalité fondamentale **II** s'écrit :

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 + k_4 w_4 = k_1 x_1 w_1 + k_2 x_2 w_2 + k_3 x_3 w_3 + k_4 x_4 w_4$$

La fonction z :

$$\begin{aligned} z = k_1[x_1 w_1 - x_2 e_1 - x_3 c_1 - x_4 v_1 - (d_1 + pl_1)] \\ + k_2[x_2(w_2 - e_2) - x_3 c_2 - x_4 v_2 - (d_2 + pl_2)] \\ + k_3[x_3(w_3 - c_3) - x_2 e_3 - x_4 v_3 - (d_3 + pl_3)] \\ + k_4[x_4(w_4 - v_4) - x_2 e_4 - x_3 c_3 - (d_4 + pl_4)] \end{aligned}$$

ou :

$$z = k_1 w_1 x_1 - (k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + k_4 d_4) - [k_2 w_2 - (k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4)]x_2 + [k_3 w_3 - (k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 + k_4 c_4)]x_3 + [k_4 w_4 - (k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4)]x_4 - \textstyle\sum_1^4 k_i pl_i$$

Les égalités de Marx impliquent $z = 0$

Condition physique de la satisfaction des besoins

A chaque cycle, les besoins sont satisfaits à condition que :

$$k_1 w_1 x_1 \geq k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + k_4 d_4$$

$$k_2 w_2 \geq k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4$$

$$k_3 w_3 \geq k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 + k_4 c_4$$

$$k_4 w_4 \geq k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4$$

Dans le cas général avec plus-value nous avons le système de prix :

$$(-w_1)x_1 + e_1tx_2 + c_1t_1x_3 + v_1tx_4 = -d_1(1+nr)$$

$$0x_1 + (e_2t - w_2)x_2 + c_2tx_3 + v_3tx_4 = -d_2(1+nr)$$

$$0x_1 + e_3tx_2 + (c_3t - w_3)x_3 + v_3tx_4 = -d_3(1+nr)$$

$$0x_1 + e_4tx_2 + c_4tx_3 + (v_4t - w_4)x_4 = -d_4(1+nr)$$

Un quadruplet de coefficients de transformation (x_1, x_2, x_3, x_4) peut être trouvé pour une valeur de r donné (déterminant du système non nul). Comme précédemment, il existe une valeur r* qui annule la variable z dont la dérivée par rapport à r est négative pour r*. On remarquera que l'on doit se fixer deux valeurs parmi les fractions de capitaux ki pour connaître de manière univoque les deux autres fractions. Ces deux capitaux choisis peuvent aboutir à un ensemble vide des solutions et même quand l'ensemble des solutions n'est pas vide, celles-ci peuvent ne pas respecter la satisfaction des besoins sociaux (la production d'une branche de marchandise est inférieure à la consommation de cette marchandise). Nous permettons néanmoins ces solutions qui font sens si l'on suppose l'existence de stocks résultants des surplus des cycles précédents. Nous serons guidés dans le choix des coefficients ki en partant de leurs valeurs quand la plus-value est nulle (e=0) que nous traitons dans paragraphe suivant. Nous n'avons alors qu'une et une seule solution possible qui nous donne un point de départ appartenant à l'espace des solutions. Il suffit ensuite d'augmenter progressivement le taux d'exploitation e jusqu'à la valeur désirée en ajustant les coefficients si nécessaire.

Si une nouvelle série de n cycles a lieu, Le capital fixe qui était nd_i pour la branche i va devenir nd_ix_1.

Si $x_1 > 1$, la branche qui produit le capital fixe a, au cours de la série précédente de n cycles, « aspiré » de la valeur provenant de la plus-value des autres branches. Si $x_1 < 1$, au contraire une partie de la plus-value de la branche « Capital fixe » a été cédée aux autres branches. Ainsi, à l'interface entre deux périodes de n cycles, ce qui est prix à la fin de la période devient valeur au commencement de la période suivante. Si $x_1 = 1$, les valeurs d_i restent identiques au cours des périodes successives. Ce processus nous paraît une illustration probante de la dialectique marxiste.

2. Cas sans plus-value

Les coefficients de transformation sont tous égaux à l'unité, l'expression de z devient :

$$z = k_1w_1 - (k_1d_1 + k_2d_2 + k_3d_3 + k_4d_4) - [k_2w_2 - (k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + k_4e_4)] \\ + [k_3w_3 - (k_1c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 + k_4c_4)] + [k_4w_4 - (k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4)]$$

En tenant compte des inégalités imposés par la satisfaction des besoins, l'expression de z ne peut s'annuler que si :

:

$$k_1w_1 = k_1d_1 + k_2d_2 + k_3d_3 + k_4d_4$$

$$k_2w_2 = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + k_4e_4$$

$$k_3w_3 = k_1c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 + k_4c_4$$

$$k_4 w_4 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4$$

Ces quatre équations sont dépendantes (si déterminant nul).

D'autre part nous avons la conservation du capital total :

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1$$

Associée à trois parmi les quatre premières équations, nous obtenons un système qui admet une solution unique (déterminant non nul). Dans le cas d'un système fermé s'il n'y a pas de plus-value, chaque branche produit strictement selon les besoins.

3. Ajout d'une branche de luxe

$$k_L w_L = k_L (d_L + e_L + c_L + v_L)$$

Système en prix :

$$(-w_1)x_1 + e_1 t x_2 + c_1 t_1 x_3 + v_1 t x_4 = -d_1(1 + nr)$$

$$0x_1 + (e_2 t - w_2)x_2 + c_2 t x_3 + v_3 t x_4 = -d_2(1 + nr)$$

$$0x_1 + e_3 t x_2 + (c_3 t - w_3)x_3 + v_3 t x_4 = -d_3(1 + nr)$$

$$0x_1 + e_4 t x_2 + c_4 t x_3 + (v_4 t - w_4)x_4 = -d_4(1 + nr)$$

$$(-w_L)x_L + e_L t x_2 + c_L t x_3 + v_L t x_4 = -d_L(1 + nr)$$

En suivant un raisonnement similaire au cas précédant, la condition de satisfaction des besoins se traduit par le système d'égalités suivant :

$$k_1 w_1 = k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + k_4 d_4 + k_L d_L$$

$$k_2 w_2 = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4 + k_L e_L$$

$$k_3 w_3 = k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 + k_4 c_4 + k_L c_L$$

$$k_4 w_4 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4 + k_L v_L$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_L = 1$$

Quand son déterminant n'est pas nul alors ce système de cinq équations indépendantes à cinq inconnues a <u>une et une seule solution</u>. Or puisque la branche L ne produit aucunes marchandises fondamentales, une solution avec $k_L = 0$ est possible et c'est par conséquent <u>la seule</u> possible.

Si le capital fixe est produit à l'intérieur du système on peut en déduire que **sans profit il ne peut y avoir non plus de branche de luxe**.

H- Élément neutre de la transformation

Prenons de nouveau notre exemple à Cinq branches (Cycles d'amortissement n=10).

VALEURS INIT	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 M	6.665533413	31.12982091	62.21764476	39.9972002	39.9972002	180.0073995
BRANCH 2 E	10	23.334	46.666	30	30	140
BRANCH 3 C	2	33.334	66.666	80	80	262
BRANCH 4 V	4.222	32.6	65.18	60	60	222.002
BRANCH 5 L	18.888	0.38	0.74	10	10	40.008
TOTAL	41.77553341	120.7778209	241.4696448	219.9972002	219.9972002	844.0173995

Nous avons généralement considéré un taux d'exploitation identique de 100% pour tous les secteurs. Pour cette raison les valeurs de PL et de V sont choisis identiques dans la configuration initiale. Une répartition qui respecte les deux égalités fondamentales préserve ce taux d'exploitation.

VALEURS	F/n	E	C	V	PL	W
BRANCH 1 M	0.859573858	4.014439445	8.023463034	5.157958943	5.157958943	23.21339422
BRANCH 2 E	10.9135	25.4655609	50.9289391	32.7405	32.7405	152.789
BRANCH 3 C	2.3323067	38.87255577	77.74277923	93.292268	93.292268	305.5321777
BRANCH 4 V	10.93390257	84.42568071	168.7995665	155.3846884	155.3846884	574.9285266
BRANCH 5 L	0.449418107	0.00904166	0.017607444	0.23793843	0.23793843	0.951944073
TOTAL	25.48870124	152.7872785	305.5123553	286.8133538	286.8133538	1057.415043

Le tableau en prix suivant fait ressortir un taux de profit identique pour tous les secteurs ($r^* =$ 0.28681335379052497).

PRIX	F/n	E	C	V	S	W
BRANCH 1 M	0.859573858	4.80503501	7.322080722	5.097123319	7.405514379	25.48932729
BRANCH 2 E	10.9135	30.48069683	46.47691422	32.35434168	62.65350314	182.8789559
BRANCH 3 C	2.3323067	46.52803809	70.94678478	92.19193095	66.82459191	278.8236524
BRANCH 4 V	10.93390257	101.0523031	154.0437149	153.5520014	148.5656016	568.1475236
BRANCH 5 L	0.449418107	0.010822307	0.016068264	0.235132062	1.364142737	2.075583477
TOTAL	25.48870124	182.8768953	278.8055629	283.4305294	286.8133538	1057.415043

Le tableau en prix nous montre comme attendu, pour une branche i donnée, un taux de profit différent de celui en interne (sauf si le coefficient de transformation égal à l'unité). Au passage nous remarquons que si la production en valeur de la branche M est légèrement inférieure à la consommation totale en valeur de cette marchandise, le prix total à payer sera comme si la quantité produite avait été suffisante.

Mais ce tableau en prix pourrait très bien être interprété comme un tableau en valeurs pour lequel les taux d'exploitation seraient différents d'une branche à l'autre. Ce tableau est alors un élément neutre de la transformation.

Le temps de l'ouvrier est « mieux » exploité quand il est associé à une machine perfectionnée et qu'il conduit à une plus grande quantité de marchandises produites dans le même temps, c'est-à-dire une productivité accrue.

Alors avec la notion de productivité peut-on se passer de la différence entre valeurs et prix ?

Le tableau en prix pourrait s'interpréter comme une économie avec des taux d'exploitation spécifiques pour chaque secteur rendant inutile la transformation des valeurs des prix et la coexistence d'un système en valeur et d'un système en prix. Mais une grande différence (d'ordre mathématique) subsiste entre ces deux interprétations. Dans l'interprétation sans transformation, il n'y a qu'une seule solution possible à la répartition des capitaux lorsque les taux d'exploitation sont ajustés de façon à ce que les taux de profit soient égaux. L'interprétation marxiste initiale qui permet une infinité de solutions est bien plus compatible avec la richesse des possibilités que la réalité offre. Cette dernière interprétation, basée sur l'hypothèse retenue par Marx d'un taux d'exploitation identique et d'un partage de la plus-value au prorata du capital investi impliquant une différence entre valeurs et prix, nous semble donc beaucoup plus robuste. Dans le système capitaliste, c'est toujours le temps de travail nécessaire, le temps sacrifié de l'ouvrier qui va être un déterminant principal du coût des marchandises et l'unique source de plus-value. C'est bien l'ensemble des prolétaires qui est exploité par l'ensemble de la classe possédante.

I- Variations de la fonction z et détermination de r*

Si l'on considère les expressions (7a ou 7b) de z en fonction des coefficients k_i et x_i, on voit que celles-ci peuvent s'exprimer en fonction de r sous la forme d'un rapport de deux polynômes dont les degrés augmentent avec le nombre de branches considéré. Cette forme polynomiale implique qu'il peut exister plusieurs valeurs de r qui annulent z, donc pour lesquelles **l'égalité fondamentale I** est vérifiée. Cependant les valeurs de r inférieurs ou supérieurs à r* (que nous définissons rigoureusement ci-dessous) conduisent à des valeurs de capitaux ou des coefficients de transformation négatifs, ne vérifient pas **l'égalité fondamentale II** et généralement n'ont pas de sens économique. Notons que pour certaines configurations des paramètres, en particulier pour certains choix des montants de capitaux engagés que l'on fixe, il n'existe pas de solutions et la fonction z ne « redescend » jamais croiser l'axe des ordonnées.

Nous avons défini la fonction z par :

$$z = \sum_i S_i - \sum_i PL_i = \sum_i (S_i - PL_i)$$

Dans sa première étape notre algorithme calcule les deux capitaux non fixés de façon à respecter **l'égalité fondamentale II** de l'égalité de la production totale en prix et en valeur.

$$\sum_{i=1}^{n} (W_i - W_i\, x_i) = 0$$

Soit :

$$\sum_i W_i = \sum_i W_i\, x_i \qquad (EQ\ 8)$$

Nous nous plaçons suffisamment proche de la solution r* de manière à ce que les solutions provisoires pour les k_i soient toutes positives. Nous prenons pour des raisons d'écriture et sans nuire à la généralisation le cas de trois branches.

$$\sum_i W_i\, x_i = \sum_i (d_i + E_i x_1 + C_i x_2 + V_i x_3 + S_i)$$

$$\sum_i W_i = \sum_i (d_i + E_i + C_i + V_i + PL_i)$$

Or quand le taux de profit $r < r^*$ les prix sont globalement inférieurs à ce qu'ils atteignent au moment où $r = r^*$ si bien que :

$$\sum_i (d_i + E_i + C_i + V_i) > \sum_i (d_i + E_i x_1 + C_i x_2 + V_i x_3)$$

La seule manière de vérifier (EQ 8) est que :

$$S_i > PL_i \rightarrow z > 0$$

Nous en déduisons qu'au voisinage de la solution et pour $r < r^*, z > 0$

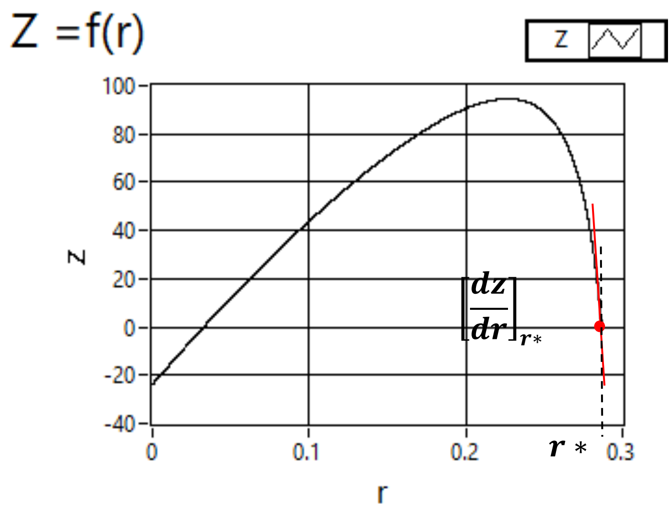


Figure 8

Nous définissons donc r^* comme la première valeur qui à la fois annule z et soit telle que :

$$\left[\frac{dz}{dr}\right]_{r*} < 0$$

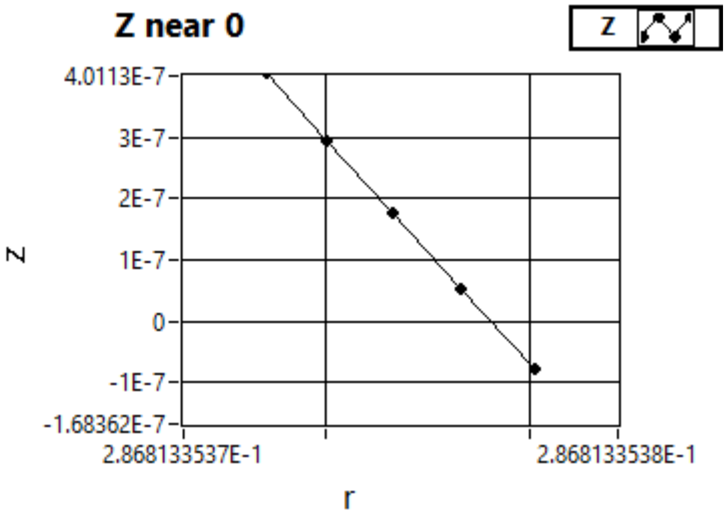


Figure 9

Autrement dit r* est la première valeur trouvée qui annule la fonction z(r) quand son graphe traverse l'axe des abscisses du haut vers le bas.

Au voisinage de r^* la fonction z est continue, il existe donc une solution exacte.

Nous ne ferons pas ici une étude détaillée pour trouver une forme analytique des zéros de la fonction z et la valeur r^* peut être approchée avec la précision voulue au moyen d'une interpolation (voir algorithme décrit ci-après).

Les coefficients de transformations sont déterminés en fonction de r^* de façon unique.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Pour reprendre la formule employée par le philosophe des sciences Étienne Klein, « le monde s'oppose à ce qu'il nous montre[8] », il est courant dans l'histoire des sciences qu'une loi essentielle soit découverte contre l'apparence des faits. Par exemple, c'est en dépit de l'observation courante, que Galilée a postulé que les corps soumis à l'attraction doivent tomber à la même vitesse, quels que soit leur poids. On sait que l'auteur de la célèbre phrase : « Les faits sont têtus » a aussi dans son unique ouvrage de Philosophie : « Empiriocriticisme et Matérialisme dialectique » dressé un réquisitoire sans appel contre le courant positiviste et son empirisme vulgaire trop souvent confondu avec la méthode scientifique. Ainsi, la loi de la valeur employée par Marx peut sembler en contradiction avec les faits. C'est cette contradiction apparente qui lui a valu des attaques, comme l'illustre la critique de Böhm-Bawerk :

> La loi de la valeur soutient que seule la quantité de travail détermine les rapports d'échange ; les faits démontrent que ce n'est pas la quantité de travail, ou des facteurs qui lui sont homogènes, qui détermine les rapports d'échange. Ces deux propositions ont entre elles la même relation que Oui et Non, que l'affirmation et la contradiction. [9]

Ou encore :

> Marx n'a pas déduit des faits les principes fondamentaux de son système, par un empirisme de bon sens ou une solide analyse économico-psychologique ; au contraire, il ne l'établit pas sur un terrain plus solide que celui d'une dialectique formelle.

Marx a écrit le Livre III du Capital avant le livre I. C'est dans le livre III qu'est exposée la méthode de la transformation des valeurs en prix, et il sait, autant que n'importe quel économiste orthodoxe selon Lexis (21), et autant que Galilée dans son énoncé de la chute des corps, que cette loi de la valeur est en contradiction apparente avec les faits. Derrière les apparences, Marx cherche à révéler l'essence des principes et, comme le dit encore Lexis (21), « Ce profit, le capitaliste le rapporte à l'ensemble de son capital ; profit et taux de profit sont ainsi à la surface des phénomènes, alors que la plus-value et son taux constituent l'objet caché, mais essentiel, des investigations ».

Marx n'a jamais fini la rédaction complète du Livre III, seule une orientation générale est donnée pour la transformation des valeurs en prix de production de marché et il ne disposait pas de l'outil mathématique adapté pour démontrer strictement la validité de sa théorie de la valeur. À ce stade, Marx s'est autorisé des approximations. Comme rappelé dans notre introduction, Marx avait lui-même signalé une approximation en utilisant dans le chapitre IX du livre III, les valeurs à la place des prix (Tableau 1) pour calculer le prix de production de marché. Le sens de ce passage du livre a été sujet à controverse. Husson soutient plutôt que Marx, utilisant bien des prix pour calculer le cout de production, met en garde contre le risque de compter deux fois le profit (22). Au contraire, d'autres, comme Bortkiewicz soutiennent que Marx utilise les valeurs en intrants (22). Bien que nous ne partagions pas l'avis de M Husson, nous reconnaissons la difficulté d'interpréter ce passage du livre III.

---

[8] https://www.youtube.com/watch?v=dlDWHIX-c5M

[9] Notons que cette critique ne tient pas compte du sens donné par Marx au « travail socialement nécessaire » qui tient compte des rapports d'échanges.

Cependant cette difficulté ne change pas la teneur de la longue controverse dans laquelle s'inscrit notre travail.

Le principe fondamental qui sous-tend la théorie de la valeur et de l'exploitation est que toute valeur d'une marchandise prend sa source dans le travail humain socialement nécessaire à sa production. Ce principe se décline en deux postulats que l'on peut résumer de manière simplifiée par :

1) Toute valeur vient du travail.
2) Tout profit vient du surtravail.

Marx a proposé que ces postulats s'appliquent à l'économie capitaliste, à condition d'admettre une inadéquation entre valeurs et des prix. Le problème de la transformation est de mettre à jour les règles qui sous-tendent cette inadéquation pour les différentes branches d'une économie globale. Une telle résolution respectant les deux postulats sans prendre en compte le mouvement des capitaux vers une répartition adéquate est, nous semble-t-il une tâche très ardue. Il n'a certainement pas manqué d'ingéniosité et de brillants esprits dont quelques-uns bien équipés mathématiquement pour s'y atteler (Bortkiewicz, Duménil, Foley, Lipietz, Sraffa, Morishima, Okishio, …). Cependant le problème était selon nous mal posé, même si des solutions de compromis furent jugées satisfaisantes par certains.

Laure van Bambeke fut le premier à proposer une résolution du problème de la transformation en y incluant, comme une composante indissociable du problème, la détermination de la distribution des capitaux entre les branches qui satisfait les égalités fondamentales. Dans l'introduction, nous avons fait remarquer que cette manière de voir est en fait très naturelle par une analogie avec l'électrostatique. Cette analogie a cependant des limites, notamment quand il est question des constantes de temps. La répartition des charges électriques à la surface d'un conducteur est presque instantanée tandis que les investissements et la modernisation des outils de production prennent du temps. Justement, même si les déplacements de capitaux vont plus vite que du temps de Marx, ce déphasage temporel permet l'existence d'un régime transitoire durant lequel des capitalistes d'un secteur prennent l'avantage en faisant baisser leurs coûts de production. Cet avantage amène à un taux de profit provisoirement supérieur dans le secteur. Ce différentiel de taux motive ensuite l'afflux des capitaux dans cette branche. La péréquation des taux qui s'en suit, est accompagnée d'une BTTPM (les taux d'exploitation et conditions de production étant inchangés par ailleurs).

Dans le premier schéma de V. Laure van Bambeke (7, 8) *dans les cas de deux ou trois branches, le capital fixe importé n'est pas transformé et possède de ce fait un prix égal à sa valeur*. Or ce capital fixe a lui-même été constitué par du travail socialement nécessaire dans le cadre d'une production de composition organique donnée. Dans son modèle, à quatre branches (8) Bambeke s'occupe de cette question en ajoutant une branche qui produit le capital fixe à l'intérieur du système économique avec un coefficient de transformation qui lui est associé. Afin de montrer la cohérence de la loi de la valeur avec la façon dont le profit se partage, nous sommes allés plus loin en résolvant les cas pour lesquels le capital fixe est nul. Cette expérience de pensée permet de concevoir un système économique dans lequel aucune valeur préalable n'existe. On ne voit d'ailleurs pas, comme le souligne M. Husson dans sa critique du travail de V. Laure van Bambeke, pourquoi ce problème simplifié serait plus difficile à résoudre que celui de toute évidence plus complexe qui incorpore le capital fixe. Surtout, en menant notre expérience de pensée encore plus loin, en considérant des modèles sans capital fixe et sans profit, elle démontre le lien entre les égalités fondamentales de Marx et la satisfaction des besoins sociaux solvables. Cette approche donne toute son évidence au fait que la répartition des capitaux dans chaque branche ne peut être posée comme une donnée exogène et fixe du problème de la transformation mais qu'au contraire elle doit être déterminée en même temps que les coefficients de transformation.

Toujours dans le cadre de modèles sans capital fixe, nous montrons que, pour un taux de profit uniforme, ce dernier est invariant quelles que soient les répartitions de capitaux qui satisfont les égalités fondamentales. Cette propriété permet de comprendre les succès de la théorie classique qui calcule le taux de profit à partir de la valeur propre de la matrice socio-technique, indépendamment des montants de capitaux et de leur répartition. C'est une approche répandue qui pourrait expliquer la difficulté d'admettre que le problème de la transformation inclut dans sa solution la détermination d'une répartition adéquate des capitaux entre branches.

Nous pensons également qu'il est préférable d'utiliser une autre méthode de résolution que celle préconisée par Laure van Bambeke.

Dans son article de 2018, Laure Van Bambeke écrit :

> 2. Mais tenir compte des contraintes de Marx au sein du modèle de détermination des prix à partir des valeurs conduit à un système analytique surdéterminé qui n'a pas de solution au sens classique du terme.
>
> 3. Toutefois un tel système possède toujours <u>une solution approchée au sens de la méthode des moindres carrés</u>. Après avoir présenté succinctement la méthode mathématique de Moore et Penrose, nous l'appliquons à un modèle complet de détermination des prix à partir des valeurs. »
>
> 4. Nous admettons ensuite que les prix ainsi calculés sont les prix effectifs qui peuvent provoquer une situation déséquilibrée caractérisée par des écarts de rentabilité entre les branches et des transferts de capitaux vers les activités les plus rentables. Un point d'équilibre est atteint après de nombreuses itérations lorsque la répartition du capital devient efficiente et que les deux égalités, réputées inconciliables et contradictoires, sont simultanément satisfaites.

Pourtant Laure van Bambeke dans son livre (9) a bien caractérisé le problème général comme étant bilinéaire, en x_i (coefficient de transformation de la valeur en prix pour la marchandise i) et en K_i (montant du capital en valeur attribuée à la branche i). Son détour par la méthode de Moore-Penrose pour obtenir des valeurs approchées est inutile et le système possède en réalité un ensemble de solutions exactes. Les postulats 1) et 2) mentionnés plus haut constituent le socle de la conception fondamentale et doivent agir même quand les taux de profit des branches d'activité sont différents. Ce ne sont pas des approximations. En outre dans la méthode de Moore-Penrose, l'état d'égalité des taux de profit est approché progressivement par des transferts successifs, ce qui est correct, en revanche il n'y a pas de raison théorique pour que les égalités de Marx ne soient pas pleinement vérifiées durant cette « phase d'approche »; or avec cette méthode les écarts (différences des taux entre eux et les deux différences entre plus-values et profits ainsi que prix et valeurs) étant ajustés selon les moindres carrés, les égalités fondamentales ne seront vérifiées qu'une fois l'égalité des taux réalisée.

Dans notre algorithme le taux de profit apparait comme une variable d'ajustement, mais il est également directement lié à l'exploitation puisqu'il dépend en premier lieu du taux de plus-value. Cependant pour que le profit soit effectivement réalisé, la marchandise produite doit aussi être vendue et il est impératif de tenir compte de la capacité d'absorption du marché ; cette contrainte amène nécessairement une valeur particulière pour ce taux de profit. C'est exactement ce que notre algorithme réalise quand il respecte strictement les égalités fondamentales I et II. Notons que dans nos modèles, la plus-value qui peut prendre la forme de marchandises de luxe ou « haut de gamme » n'est pas concernée par l'absorption du marché : nous ne considérons pas la limite d'absorption du marché du luxe. De façon plus générale, nous admettons qu'il n'y a aucune limite au surplus pour les classes non productives.

Nous rejetons catégoriquement la théorie « non stationnaire » de M. Husson (22) qui explique les échecs des théories précédentes à donner une version cohérente du problème de la transformation respectant les égalités fondamentales, par le fait que les intrants et les extrants qui composent les marchandises changent de valeurs durant le processus de production le système capitaliste étant intrinsèquement hors-équilibre. Certes, cette considération cherche à se rapprocher de la situation réelle et permet certainement de retrouver les schémas marxistes mais on pourrait, en augmentant à loisir le nombre de variables, vérifier à peu près n'importe quelle autre hypothèse. Si la conception marxiste a quelque valeur, ce que nous pensons fermement, elle doit fonctionner dans une situation dans laquelle les valeurs des intrants et les valeurs des extrants resteraient stables quand bien même cette situation serait idéalisée. C'est ce que nous montrons par notre développement algorithmique basé sur des équations simultanées appliquées à un système en équilibre transitoire. Comme Isaac Roubine l'a fait remarquer :

> La vie économique est un océan en perpétuel mouvement. Il n'est pas possible d'observer, à un moment donné quelconque, l'état d'équilibre dans la répartition du travail entre les différentes branches de la production. Mais sans une conception théorique de cet état d'équilibre, on ne peut expliquer la nature de ces fluctuations et leur direction. [10]

Dans l'exemple incluant la branche de luxe, cette dernière a été construite sur mesure pour réaliser un système de reproduction simple parfait dont l'intérêt est purement arithmétique. Il est plus réaliste de partir des coefficients socio-techniques caractéristiques pour cette branche et d'obtenir en augmentant progressivement le capital de cette branche la meilleure solution possible. En outre, comme dans le cas illustré par Laure van Bambeke, la branche des biens de consommation doit aussi produire pour les classes moyennes improductives. Considérons aussi que chaque branche de marchandises possède un « haut de gamme » destiné à la classe dominante mais dont les produits peuvent aussi être achetés à l'occasion par les producteurs de plus-value.

L'hypothèse de la loi de la BTTPM liée à la composition organique du capital est confirmée pour les modèles que nous présentons. Nous montrons que le théorème d'Okishio s'applique, mais contrairement à l'interprétation habituelle, non seulement il ne remet pas en question la BTTPM mais il explique son initiation. Dans ce contexte, il est intéressant de noter que la composition organique du capital peut évoluer dans des sens opposés selon qu'elle soit exprimée en prix ou en valeur. Comme

[10] Isaac Roubine Chapitre 9 (page 118) : La valeur régulateur de la production

l'illustre notre exemple avec capital fixe à trois branches du Chapitre D, c'est bien la loi de la valeur qui gouverne la BTTPM. Ces conclusions ont pu être tirées parce que notre approche permet d'étudier le système économique dans sa globalité. Cette approche est fidèle à la proposition évidente et déjà ancienne de Serge Latouche[11] qui remarquait dans son article à propos de la BTTPM :

> D'autre part, si l'évolution de la productivité modifie les valeurs des éléments du capital constant aussi bien que du capital variable, il est nécessaire d'expliciter le système économique tout entier et non plus de raisonner sur ce qui chez Marx pourrait apparaître comme une « branche représentative », car toute modification dans une branche se répercute à travers tout le système économique. Cette nouvelle façon de poser le problème donnerait sans doute plus de clarté à ce « mécanisme » un peu mystérieux qu'est la baisse tendancielle du taux de profit

Il ressort de notre travail que la cohérence de la conception marxiste de la transformation de la valeur en prix de production de marché est évidente en considérant que la répartition des capitaux dans chaque branche se détermine en même temps que les coefficients de transformation des valeurs en prix. L'expérience idéalisée dans laquelle le capital fixe et le profit sont nuls est utile à cette démonstration : la répartition des capitaux ne peut pas être une donnée exogène, elle est déterminée par l'équilibre entre la production de marchandise et la satisfaction des besoins solvables. Une conséquence importante est que si les capitaux engagés dans chaque branche de production doivent être déterminés en même temps que les prix et le taux de profit, alors les contradictions du capitalisme ne sauraient se résumer à un seul problème de partage du surplus. Comme Marx le souligne : « Il faut d'abord créer ce sur quoi on prélèvera ». <u>Le conflit entre classes naît dans la sphère de production et ne vient pas seulement du mode de répartition</u>. Un corolaire est qu'il ne suffit pas de changer la répartition pour sortir du capitalisme.

La conception marxiste qui postule que toute valeur a pour source une quantité de travail et que tout profit vient d'un surtravail (donc de l'exploitation du travail humain) est donc non seulement compatible avec des modèles d'économie classiques à branches multiples mais contient selon nous une puissance explicative inégalée des crises du capitalisme. C'est la composition organique du capital en valeur et non celle qui nous en apparait de prime abord, c'est-à-dire exprimée en prix, qui gouverne la baisse tendancielle du taux de profit à taux d'exploitation constant. Samuelson[12] (23) aurait pu s'en apercevoir s'il n'avait pas effacé le tableau de valeurs.

L'algorithme que nous fournissons pour la résolution du problème de la transformation permet une détermination rapide d'un ensemble de solutions exactes (non pas approchées). Cet algorithme fonctionne également dans le cas de branches comportant des capitaux fixes nuls ou dans le cas de taux de profit ou de plus-value différents selon les branches. Une version de cet algorithme en langage LabVIEW est fournie.

---

[11] Latouche Serge. A propos de la baisse tendancielle du taux de profit. In: Revue économique, volume 24, n°1, 1973. pp. 163-175;

[12] Samuelson (1970) : « En résumé, la "transformation" des valeurs en prix peut être décrite logiquement comme la procédure suivante : (1) écrivez les relations de valeurs, (2) prenez une gomme et effacez-les, (3) finalement écrivez les relations de prix – ainsi vous avez effectué le fameux processus de transformation. »

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Einstein, Pourquoi le socialisme. *Monthly Review* (1949).

2. K. Marx, Le Capital, livre III (1894) Ed Sociales 1977, traduction: C. Cohen-Solal et G. Badia.

3. K. Marx (1862) Lettre à Engels du 2 août 1862 [sur la transformation].

4. L. von Bortkiewicz, Wertrechnung und Preisrechnung im Marxschen System, Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik. **25**, 10-51 (1907).

5. L. von Bortkiewicz, Zur Berichtigung der grundlegenden theorischen Konstruction von Marx im dritten Band des Kaptial. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* **XXXIV**, 319-335 (1907).

6. E. M. Purcell, Cours de Physique Berkeley Tome 2 Electricité et magnétisme (Collection U).

7. V. Laure van Bambeke, Refonder la théorie marxiste de la valeur. (2018).

8. V. Laure van Bambeke, La valeur du travail humain - Essai sur la refondation de l'expression monétaire de la valeur-travail (ed. L'Harmattan, 2021).

9. V. Laure van Bambeke, Les méandres de la transformation des valeurs en prix de production (ed. L'Harmattan, 2013).

10. V. Laure van Bambeke, DES VALEURS AUX PRIX ABSOLUS. ESSAI DE THÉORIE ÉCONOMIQUE RATIONNELLE. *revue-innovation* **2**, 171-198 (2006).

11. K. Marx, Salaires, prix et profits (1862).

12. M. Husson (2017) Théorie de la valeur: dans les méandres de la «transformation». (http://alencontre.org/economie/theorie-de-la-valeur-dans-les-meandres-de-la-transformation.html).

13. F. Lordon, La condition anarchique, affects et institutions de la valeur (Le Seuil, Paris, 2018).

14. B. Pire (Champ de Higgs et masse des particules. (https://www.universalis.fr/encyclopedie/boson-de-higgs/3-champ-de-higgs-et-masse-des-particules/).

15. I. Roubine, Essais sur la théorie de la valeur de Marx (ed. Syllepse, 2009).

16. G. Abraham-Frois, E. Lendjel, Une première application du théorème de Perron-Frobenius à l'économie : l'abbé Potron comme précurseur. *Revue d'économie politique* **111**, 639-665 (2001).

17. N. Okishio, Technical Change and the Rate of Profit. *Kobe University Economic Review* **7**, 85-99 (1961).

18. C. Schmidt, Werttheorie. *Sozialistische Monatshefte* **XIV**, 850-854 (1910).

19. C. Schmidt, Marxistische Orthodoxie. *Sozialistische Monatshefte* **XIX**, 483-488 (1913).

20. C. Schmidt, Cfr Zur Théorie der Handelskrisen und der Ueberproduction. *Sozialistische Monatshefte* **V**, 669-682 (1901).

21. G. Dostaler, *Valeur et prix. Histoire d'un débat* (ed. PRESSES UNIVERSITAIRES DE GRENOBLE LES PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC, 1978).

22. M. Perez, Contre Sraffa. La transformation des valeurs en prix (ed. auto edition, 1982).

23. Samuelson, The Transformation from Marxian 'Values' to competitive 'Prices': A Process of rejection and Replacement. *Proceeding of the National Academy of Sciences* **67**, 423-425 (1970).

ANNEXE

1. Algorithmes de résolution

L'algorithme est décrit pour le cas à trois branches. Il est généralisable à un nombre de branches supérieur. La Figure 10 rappelle les étapes permettant l'obtention du système d'équations en x.

Table initiale de Valeurs (distribution quelconque des capitaux)

K_T: capital total engagé (K1,K2,K3) n: nombre de cycles d'amortissement

IN

	F/n	E	C	V	Pl	W
Branche I E	8.31504400(	19.40180700	38.80346700(	24.9451700	24.945170000	116.41065800
Branche II C	1.19699600(	19.94996400	39.89988500(	47.8799930	47.879993000	156.80683099
Branche III V	15.0733250(	116.3555820	232.7111640(	214.199999	214.19999999	792.54007100
TOTAL	**24.585365(**	**155.707353**	**311.41451!**	**287.02516**	**287.0251630**	**1065.757560**

Par unité de Capital (coefficients socio-techniques)

$$[w, c, v]_i = \frac{[D, E, C, V, W]_i}{K_i}$$

Construction du système d'équations en x

$$\begin{aligned}
(e_1 t - w_1)\, x_1 + (c_1 t)\, x_2 + (v_1 t)\, x_3 &= -(d_1 + n d_1 r) \\
(e_2 t)\, x_1 + (c_2 t - w_2)\, x_2 + (v_2 t)\, x_3 &= -(d_2 + n d_2 r) \\
(e_3 t)\, x_1 + (c_3 t)\, x_2 + (v_3 t - w_3)\, x_3 &= -(d_3 + n d_3 r)
\end{aligned}$$

Figure 10

En initialisant la valeur de r, le système d'équations en x fournit une solution $X^* = (x_1, x_2, x_3)_r$ en fonction de laquelle le système en K peut être résolu. Ce système présentant une infinité de solutions, nous fixons la valeur d'un des K_i par exemple K_3 (K_3 dans le cas où les branches 1 et 2 ont des compositions organiques différentes) pour résoudre le système suivant :

$$K_1 w_1 (1 - x_1) + K_2 w_2 (1 - x_2) = -K_3 w_3 (1 - x_3)$$

$$K_1 + K_2 = K_T - K_3$$

Le déterminant est :

$$D = \begin{vmatrix} \mathrm{w1}\ (1 - \mathrm{x1}) & \mathrm{w2}\ (1 - \mathrm{x2}) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Cas D = 0 :

Si les compositions organiques des branches 1 et 2 sont identiques, il suffit de choisir parmi elles la branche dont on fixe le montant de capital pour se ramener au cas D ≠ 0. Si les trois branches sont de compositions organiques identiques, les prix sont alors identiques aux valeurs et les coefficients de transformation sont égaux à 1. Dans ce cas particulier il n'y a qu'une seule façon de répartir le profit et de répondre aux besoins sociaux et la répartition $(\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \boldsymbol{K_3})$ est solution unique du système des trois équations suivantes:

$$\boldsymbol{K_1[(w_1 - e_1 - d_1)] - K_2 e_2 - K_3 e_3 = 0}$$

$$\boldsymbol{-K_1[(c_1)] - K_2(w_2 - c_2 - d_2) - K_3 c_3 = 0}$$

$$\boldsymbol{K_1 + K_2 + K_3 = K_T}$$

Les deux premières équations indiquent que les productions en Energie de la branche 1 et des matières premières de la branche 2 sont suffisantes, la troisième équation est la conservation du capital total.

Cas D ≠ 0 :

On suppose différentes les compositions organiques de la branche 1 et de la branche 2.

$$\mathbf{K1} = \frac{\begin{vmatrix} -\mathrm{K3\ w3}(1 - \mathrm{x3}) & \mathrm{w2}\ (1 - \mathrm{x2}) \\ KT - \mathrm{K3} & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

$$\mathbf{K2} = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{w1}(1 - \mathrm{x1}) & -\mathrm{K3\ w3}(1 - \mathrm{x3}) \\ 1 & KT - \mathrm{K3} \end{vmatrix}}{D}$$

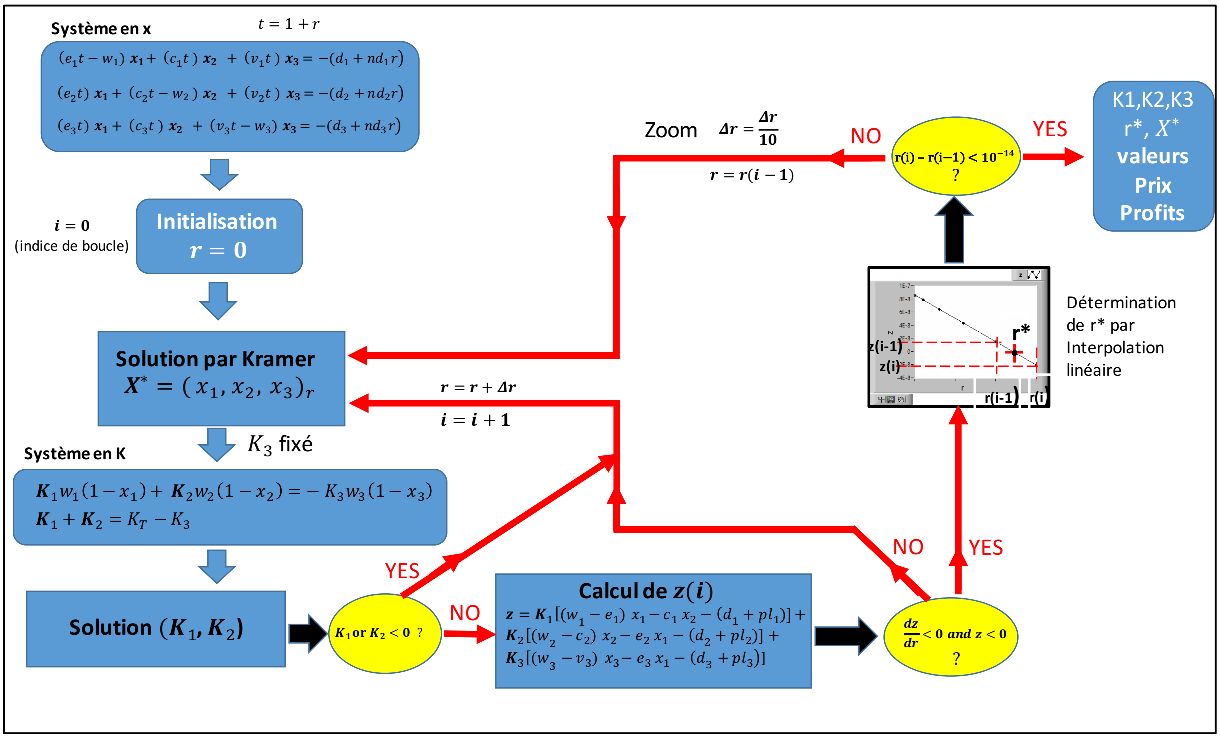


Figure 11. Schéma de l'algorithme dans le cas 3 branches avec capital fixe différent de zéro. La donnée du problème est un tableau de valeurs correspond à une répartition à priori arbitraire des capitaux mais fixant les coefficients socio-techniques.

Remarque : Si les compositions organiques sont identiques pour seulement deux des branches alors la branche dont on fixe le capital pour ne laisser que deux inconnues doit être l'une d'entre elles pour éviter que le déterminant soit nul. Pour cette raison les compositions organiques de la branche 1 et de la branche 2 ci-dessus sont supposées différentes.

Si l'une des valeurs trouvées pour K_1 et K_2 est négative et ceci pour toutes les valeurs de r possibles, alors la valeur choisie pour K_3 est impossible et il faut en choisir une autre.

Si les valeurs trouvées pour K_1 et K_2 sont positives, il reste à déterminer la valeur r* qui annule l'expression de z qui correspond au respect des égalités fondamentales.

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{K_1}[(w_1 - e_1)\, x_1 - c_1\, x_2 - v_1\, x_3 - (d_1 + pl_1)] + \boldsymbol{K_2}[(w_2 - c_2)\, x_2 - e_2\, x_1 - v_2\, x_3 - (d_2 + pl_2)] + \boldsymbol{K_3}[(w_3 - v_3)\, x_3 - c_3\, x_2 - e_3\, x_1 - (d_3 + pl_3)]$$

En partant de valeurs croissantes de r à partir de r = 0, on recherche le premier passage de z d'une valeur positive à une valeur négative (voir chapitre İ sur la fonction z). Ce processus est décrit est schématisé dans la Figure 11. Notons que l'algorithme peut être généralisé à des cas où les taux de profit sont différents entre branches (ri=ri + Δri).

Cas d'un capital fixe nul

Ce cas nécessite un traitement algorithmique différent.

$$w_1 x_1 = (1+r)e_1 x_1 + \ (1+r)c_1 x_2 + (1+r)v_1 x_1$$

$$w_2 x_2 = (1+r)e_2 x_1 + \ (1+r)c_2 x_2 + (1+r)v_2 x_2$$

$$w_1 x_3 = (1+r)e_3 x_1 + \ (1+r)c_3 x_2 + (1+r)v_3 x_3$$

$$(1+r)\ \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{c_1} & \mathbf{v_1} \\ \mathbf{e_2} & \mathbf{c_2} & \mathbf{v_2} \\ \mathbf{e_3} & \mathbf{c_3} & \mathbf{v_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (w_1, w_2, w_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(1+r)\ \begin{bmatrix} \mathbf{e_1}/w_1 & \mathbf{c_1}/w_1 & \mathbf{v_1}/w_1 \\ \mathbf{e_2}/w_2 & \mathbf{c_2}/w_2 & \mathbf{v_2}/w_2 \\ \mathbf{e_3}/w_3 & \mathbf{c_3}/w_3 & \mathbf{v_3}/w_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e_1}/w_1 & \mathbf{c_1}/w_1 & \mathbf{v_1}/w_1 \\ \mathbf{e_2}/w_2 & \mathbf{c_2}/w_2 & \mathbf{v_2}/w_2 \\ \mathbf{e_3}/w_3 & \mathbf{c_3}/w_3 & \mathbf{v_3}/w_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+r)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{e_1}/w_1 & \mathbf{c_1}/w_1 & \mathbf{v_1}/w_1 \\ \mathbf{e_2}/w_2 & \mathbf{c_2}/w_2 & \mathbf{v_2}/w_2 \\ \mathbf{e_3}/w_3 & \mathbf{c_3}/w_3 & \mathbf{v_3}/w_3 \end{bmatrix}$$

La valeur propre de la matrice est donc égale à l'inverse de (1+r) et détermine donc le taux de profit. Le taux de profit dépend des valeurs w_i qui sont supérieures à 1 pour les branches réalisant une plus-value. Le taux de profit dépend donc du taux d'exploitation.

La valeur du taux de profit est aussi :

$$r = \frac{\mathrm{PL}}{(\mathrm{E + C + V})} = \frac{\sum_i Ki\ pli}{\sum_i Ki\ (\mathrm{ei + ci + vi})}$$

Contrairement à la matrice A, le taux de profit calculé de cette manière dépend des valeurs de K1, K2, K3. Mais la matrice ne nous renseigne pas sur la répartition des capitaux.

Il se trouve que lorsque la répartition des capitaux répond au besoin social, les deux calculs mènent au même résultat. Les coefficients sociotechniques contiennent les proportions de chacune des marchandises contenues dans une autre. Ils apportent donc l'information sur le besoin

La norme du vecteur propre doit posséder la valeur adéquate pour que les égalités fondamentales soient respectées. Ainsi la résolution matricielle ne permet pas à elle seule de déterminer complètement le vecteur de transformation. Il existe une norme particulière pour laquelle un ensemble de valeurs (K1, K2, K3) est compatible avec ces égalités. Pour cet ensemble, le calcul du taux de profit coïncide avec la valeur propre de la matrice A.

$$[\boldsymbol{A}] \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+r)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nous devons déterminer les vecteurs propres de la matrice [A] pour trouver un vecteur **X** de transformation des valeurs en prix.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

Cependant le résultat de l'algorithme classique fourni un vecteur propre unitaire.

$$\|\boldsymbol{X}\| = \sqrt{\boldsymbol{x_1}^2 + \boldsymbol{x_2}^2 + \boldsymbol{x_3}^2} = 1$$

Nous connaissons donc le rapport entre les différents prix mais pas encore leurs montants absolus.

Le véritable vecteur de transformation $\boldsymbol{X}^*$ est tel que :

$$\boldsymbol{X}^* = q\ \boldsymbol{X}$$

La valeur recherchée de q est la valeur q* qui assure le respect des égalités fondamentales.

A partir de ce moment l'algorithme de résolution est donc identique à celui employé avec capital fixe à ceci près qu'au lieu de faire varier r, c'est ici la variable q qui est incrémentée jusqu'à ce que l'on détermine par interpolation linéaire la valeur particulière de q, q* qui annule la variable z. A chaque nouvelle valeur de q correspond un nouveau vecteur $\boldsymbol{X}^*$ donc une nouvelle répartition (K_1, K_2, K_3). Ces valeurs de K_i déterminent à leur tour une nouvelle valeur de la variable r utilisée dans l'équation aux valeurs propres.

$$z = W_T - \sum_i K_i q(e_i x_1 + c_i x_2 + v_i x_3)$$

$$\text{avec } W_T = \sum_i K_i \, w_i$$

Les algorithmes des processus avec ou sans capital fixe sont représentés dans les Figures 11 et 12.

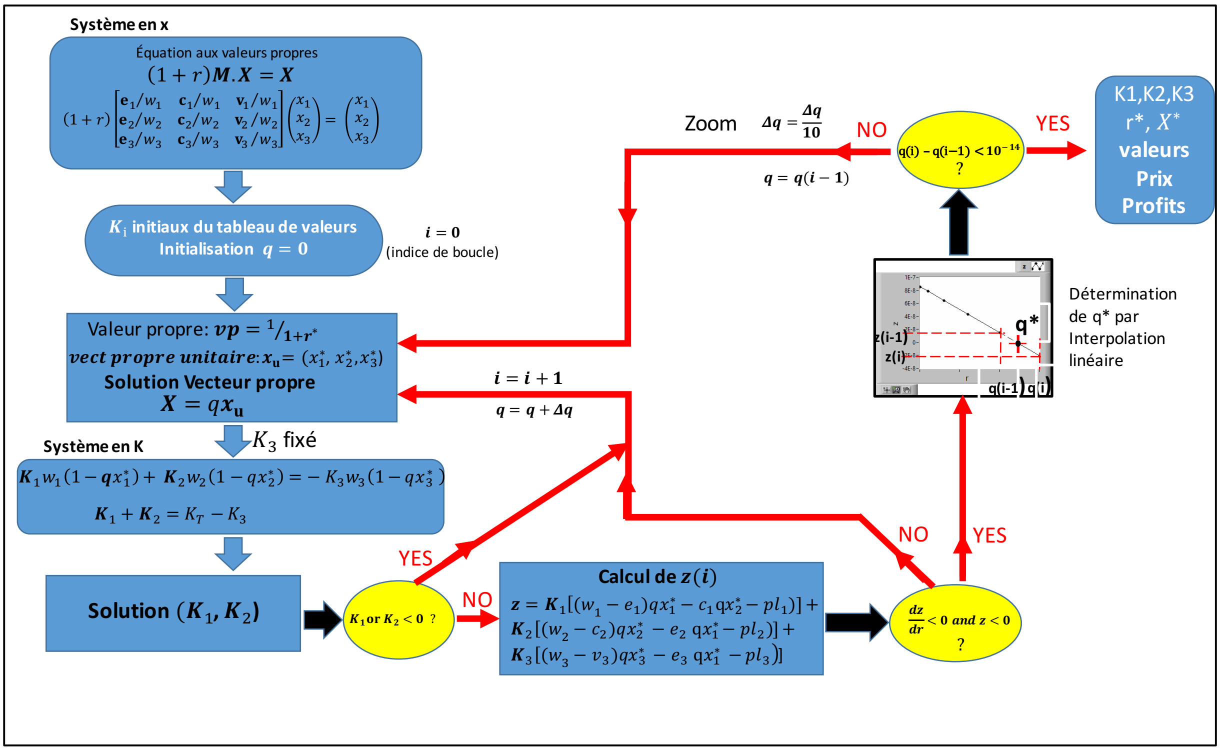


Figure 12. Schéma de l'algorithme dans le cas 3 branches avec capital fixe nul.

2. Paramètres des simulations

Paramètre de la simulation E-1-a :

Pour cette simulation nous reprenons les coefficients socio-techniques de l'exemple des Tableaux 10 avec le capital fixe qui est à zéro. Le capital total engagé, alors de 754.147032 (um) est constant. Le capital de la branche 2 de valeur initiale 385 (um) est décrémenté de 0.0025 (um) à chaque itération les taux de profit r1 et r3 des branches 1 et 3 sont imposés de façon à ce que : r1= r2+Δr1 et r3=r2-Δr1, r2 servant de référence. Les capitaux des branches 1 et 3 ainsi que r2 sont calculés par l'algorithme principal de façon à respectées les égalités fondamentales et la différence imposée des taux de profit. A la première itération le taux de profit r1 est le plus grand avec Δr1=+0.001. Le facteur $\Delta r1$ est ensuite décrémenté à chaque itération de 0.00001. La simulation atteint le point où les trois taux de profit sont égaux entre la 99iem et la 100iem itérations. La simulation se termine à l'itération 120 (sur le graphique la première itération commence à zéro).

La même simulation a été reprise à partir d'un différentiel de taux de profit cette fois au départ de la simulation on a : $\Delta r1 = 0.014$. Le facteur $\Delta r1$ est ensuite décrémenté de 0.00025 et il y a 72 itérations.

Paramètre de la simulation E-1-b :

Par rapport aux coefficients socio-techniques de l'exemple des Tableaux 10, nous gardons la même durée d'amortissement du capital fixe avec n=10 cycles mais nous avons augmenté le capital fixe de la branche 1 de 100 unités monétaires (ce qui permet d'avoir aussi la branche 2 avec un taux de profit croissant, les conclusions de la simulation n'étant pas changées dans le cas contraire). Le capital total engagé est donc de 1100 (um), constant. Le pas d'incrémentation est $\Delta r1 = +0.001$. Le capital de la branche 2 de valeur initiale 385 (um) est décrémenté de 0.0025 (um) à chaque itération les taux de profit r1 et r3 des branches 1 et 3 sont imposés de façon à ce que : $r1 = r2 + \Delta r1$ et $r3 = r2 - \Delta r1$, r2 servant de référence. Les capitaux des branches 1 et 3 ainsi que r2 sont calculés par l'algorithme principal de façon à respecter les égalités fondamentales et la différence imposée des taux de profit. A la première itération le taux de profit r1 est le plus grand avec $\Delta r1 = 0.001$. Le facteur $\Delta r1$ est ensuite décrémenté à chaque itération de 0.00001. Le taux de profit r3 est le plus petit avec $\Delta r3 = -0.001$, ce facteur étant incrémenté de 0.00001 à chaque itération. La simulation atteint le point où les trois taux de profit sont égaux à la 101ième itérations.