



HAL
open science

Des égalités fondamentales de Marx à la résolution du problème de la transformation - Cohérence du modèle

Norbert Ankri, Païkan Marcaggi

► **To cite this version:**

Norbert Ankri, Païkan Marcaggi. Des égalités fondamentales de Marx à la résolution du problème de la transformation - Cohérence du modèle. 2021. hal-03458603v1

HAL Id: hal-03458603

<https://hal.science/hal-03458603v1>

Preprint submitted on 30 Nov 2021 (v1), last revised 4 Oct 2022 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des égalités fondamentales de Marx à la résolution du problème de la transformation

COHÉRENCE DU MODÈLE

Norbert Ancri* & Païkan Marcaggi

Aix Marseille Université

* Correspondance : Norbert Ancri, norbert.ankri@univ-amu.fr

Table des matières

RÉSUMÉ.....	3
INTRODUCTION	4
LES MODÈLES DE CETTE ÉTUDE.....	8
A- Problème de la transformation pour un modèle d'économie à deux branches	10
1. Modèle à deux branches avec capital fixe	10
2. Un cas simplifié qui met en exergue le sens des égalités fondamentales de Marx.....	15
3. Conclusion.....	16
B- Problème de la transformation pour un modèle d'économie à trois branches	17
1. Modèle à trois branches avec capital fixe.....	17
2. Modèle à trois branches avec capital fixe et profit nuls	26
3. Conclusion.....	28
C- Particularité des cas pour lesquels le capital fixe est nul	29
1. Capital fixe nul et profit uniforme non nul	29
2. Capital fixe nul et taux de profit différents selon les branches	35
3. Différence avec le cas où il y a amortissement d'un capital fixe	36
4. Conclusion.....	37
D- Critère de Convergence dans un processus « réel »	38
E- Invalidité des conséquences attribuées au Théorème d'Okishio.....	41
1. Le théorème d'Okishio n'empêche pas la BTPM	41
2. Le théorème d'Okishio favorise la BTPM	44
3. Conclusion.....	48
F- L'ajout d'une branche de luxe	49
1. Cas sans capital fixe	49
2. Cas avec capital fixe	51
3. Conclusion.....	52
G- L'ajout d'une branche produisant le capital fixe	56
1. Cas général.....	56
2. Cas sans plus-value	57
3. Conclusion.....	58
H- Variations de la fonction z et détermination de r^*	59
CONCLUSION GENERALE	61
BIBLIOGRAPHIE.....	66
ANNEXES	67
1. Algorithmes de résolution	67
2. Paramètres des simulations.....	77

RÉSUMÉ

Le profit du capitaliste est réalisé sur la valeur en prix des marchandises produites et il est proportionnel au capital engagé en prix. Conformément à la théorie de la valeur de Karl Marx, nous considérons le travail comme seul mécanisme créateur de valeur et admettons que la valeur des marchandises est proportionnelle à la quantité de travail socialement nécessaire à leur production. La composition organique d'une branche étant définie par le rapport du capital constant (somme du capital fixe comprenant machines, bâtiments, matières premières, etc.) sur le capital variable (coût de la force de travail), la théorie de la valeur semble prédire qu'une branche peu développée (dans laquelle la proportion du capital variable est importante) conduit à un taux de profit plus grand. Cette prédiction intuitive se heurte aux faits qui tendent à montrer le contraire : les taux de profits sont généralement semblables dans toutes les branches et les capitaux ont même tendance à se déplacer vers les branches les plus capitalistiques (à composition organique élevée). Pour résoudre ce paradoxe apparent Marx a supposé que les marchandises sont vendues à un prix de production de marché différent de leur valeur et a proposé une théorie de la valeur et de l'exploitation qui repose sur deux lois de conservation que nous nommerons ici les égalités fondamentales de Marx : la somme totale de tous les prix des marchandises produites est égale à la somme totale de toutes leurs valeurs et la somme des profits exprimés en prix est égale à la somme des profits exprimés en valeurs. (Par commodité, nous désignons respectivement le profit en valeur et le profit en prix par la plus-value et le profit.) La conversion de la valeur en prix de production de marché a fait l'objet d'un long débat rendu célèbre sous le nom du « problème de la transformation » de la valeur en prix de production de marché. Il existe une abondante littérature à ce sujet et les nombreuses solutions proposées ont toutes été assorties de contraintes plus ou moins restrictives ou bien ont dû abandonner l'une ou l'autre des deux égalités fondamentales. Étonnamment, le mouvement des capitaux entre branches, pourtant implicitement considéré par Marx comme une donnée du problème, a souvent été ignoré. Récemment V. Laure van Bambeke (1) s'engageant plus avant dans une voie déjà entrevue par Heimann (2) et Shangoon Lee (3), a montré que la prise en compte de ces mouvements, conformément au besoin social solvable, permet de résoudre le problème de la transformation conforme à l'idée originelle de Marx. Ici, nous explorons cette façon de résoudre le problème de la transformation sur la base d'une approche plus directe et plus facilement généralisable à un nombre de branches quelconque. À la différence des travaux de V. Laure van Bambeke, nous montrons que l'existence d'un capital fixe préalable n'est pas nécessaire à la résolution et que les solutions sont numériquement exactes et peuvent être obtenues sans avoir recours à des méthodes approchées du type Moore-Penrose. Contrairement à la méthode par « essai-erreur » utilisée par V. Laure van Bambeke, fastidieusement et difficilement praticable pour un nombre important de branches, nous détaillons un algorithme rapide quel que soit le nombre de branches considérées. En outre nous montrons pourquoi le respect des deux égalités fondamentales est la condition première et incontournable à une solution cohérente qui tient compte du besoin social solvable. Notre approche respecte strictement ces égalités, y compris quand les taux de profit des différentes branches ne sont pas égaux, soit pour une raison de monopole soit parce que la dynamique a amené le système dans un état de déséquilibre. Nous abordons d'ailleurs les situations où les branches d'activité présentent des taux de profit différents. Enfin, notre modèle rend compte d'une baisse tendancielle du taux de profit moyen (BTTPM) accompagnant une élévation de la composition organique, y compris en absence de capital fixe. En montrant que le problème de la transformation se résout tout aussi bien en absence de capital fixe, cas revêtant un caractère quelque peu artificiel puisqu'un capitalisme sans capital fixe n'est pas celui qu'on observe, nous réalisons une expérience idéale de pensée qui permet d'écarter les objections quant aux diverses façons de traiter du capital fixe.

INTRODUCTION

Pour commencer cette introduction nous citerons le physicien Albert Einstein (4) :

« En se servant des moyens de production, l'ouvrier produit de nouveaux biens qui deviennent la propriété du capitaliste. Le point essentiel dans ce processus est le rapport entre ce que l'ouvrier produit et ce qu'il reçoit comme salaire, les deux choses étant évaluées en termes de valeur réelle. Dans la mesure où le contrat de travail est « libre », ce que l'ouvrier reçoit est déterminé, non pas par la valeur réelle des biens qu'il produit, mais par le minimum de ses besoins et par le rapport entre le nombre d'ouvriers dont le capitaliste a besoin et le nombre d'ouvriers qui sont à la recherche d'un emploi. Il faut comprendre que même en théorie le salaire de l'ouvrier n'est pas déterminé par la valeur de son produit. »

Si l'opinion d'un grand scientifique n'est pas recevable en tant qu'argument infaillible qui peut faire autorité, encore moins dans un domaine qui n'est pas le sien, il nous faut considérer la personnalité d'Albert Einstein que l'on voit mal adopter une logique non préalablement bien comprise par lui. Einstein qui a toujours fait preuve d'une intuition extraordinaire dans des domaines très variés des sciences physiques, parle ici de valeur réelle, une notion qui fait référence à la loi de la valeur au sens marxiste et qui a été jugée superflue par la majorité des économistes contemporains. Ainsi, celui qui a anéanti la notion inutile d'éther luminifère, de mouvement absolu et a fait émerger l'espace-temps en révélant le caractère relatif de l'espace ou du temps considérés séparément, fait sienne la théorie marxiste de la valeur qui fait de la plus-value la provenance cachée du profit, plus-value pourtant bien visible quand on la mesure en termes de sueur et de travail chronométré des salariés sur les chaînes de montages de Toyota, Ford, Renault, Peugeot Citroën, Ford, Volvo ou dans les entrepôts d'Amazon. Si l'avis d'Albert Einstein ne saurait valoir de conclusion définitive quant à la validité de la loi de la valeur marxiste, la clarté d'esprit à laquelle l'homme nous a habitués nous encourage à nous pencher de nouveau sérieusement sur la cohérence interne de cette loi qui a été selon nous injustement dépréciée et remise en question.

Position du problème :

Les deux tableaux ci-dessous sont proposés par Marx dans le Livre III du *Capital* (5).

Capitaux	Taux de la plus-value	Plus-value	Taux de profit	Valeur des marchandises	Coût de production
I. $80 c + 20 v$	100%	20	20%	90	70
II. $70 c + 30 v$	100%	30	30%	111	81
III. $60 c + 40 v$	100%	40	40%	131	91
IV. $85 c + 15 v$	100%	15	15%	70	55
V. $95 c + 5 v$	100%	5	5%	20	15
$390 c + 110 v$		110			Total
$78 c + 22 v$		22	22%		Moyenne

Tableau 1A (Le Capital, livre III chapitre IX (5))

Dans ce premier tableau cinq branches sont représentées, la proportion entre le capital constant **C** (machines et matières premières) et le capital variable **V** (salaires correspondants aux biens de

consommations nécessaires à la reproduction de la force de travail) y est différente pour chacune d'entre elles. Les taux d'exploitation (ou taux de plus-value) sont identiques à 100 %. Le tableau donne, pour chaque branche, le coût de production, c'est à dire la part du capital total consommé en valeur au cours d'un cycle. La valeur des marchandises est la somme du coût de production et de la plus-value. Le taux de profit (aussi nommé « taux de profit en interne », à ne pas confondre avec le taux de profit en prix, voir Tableau 2) est le rapport de la plus-value sur le capital investi (ici égal à 100 pour chacune des branches). Le taux de plus-value étant identique dans chaque branche, les plus-values réalisées amènent à des taux de profits en interne différents selon les branches, le taux de profit moyen étant de 22 %. Pour que ce taux de profit moyen puisse s'appliquer à chaque branche (les capitalistes (6) se partagent la plus-value totale au prorata de leur investissement), Marx a proposé que les prix des marchandises ne soient pas « égaux » à leur valeur. Les prix sont tantôt plus élevés (quand le rapport C/V est au-dessus de la moyenne) tantôt plus faibles (rapport C/V plus faible) que les valeurs. Cela est illustré dans le tableau ci-dessous. La somme des écarts aux valeurs est nulle.

Capitaux	Plus-value	Valeur des marchandises	Coût de production	Prix des marchandises	Taux de profit	Écart du prix par rapport à la valeur
I. $80 c + 20 v$	20	90	70	92	22 %	+2
II. $70 c + 30 v$	30	111	81	103	22 %	-8
III. $60 c + 40 v$	40	131	91	113	22 %	-18
IV. $85 c + 15 v$	15	70	55	77	22 %	+7
V. $95 c + 5 v$	5	20	15	37	22 %	+17

Tableau 1B (Le Capital, livre III chapitre IX (5))

Seulement voilà, les capitalistes n'achètent pas les diverses matières premières à partir desquelles sont composées les marchandises, à leur valeur (comme le suggère le tableau) mais à leur prix de production de marché. Cette difficulté avait été pleinement perçue par Marx comme le montre cet extrait du chapitre IX du livre III du Capital :

« Or, le coût de production et la valeur d'une marchandise peuvent différer l'un de l'autre ; il se peut donc que le prix de revient d'une marchandise, constitué au moyen du coût de production d'autres marchandises soit supérieur ou inférieur à la valeur des moyens de production qui ont concouru à sa formation. Il convient, par conséquent, de ne pas perdre de vue que l'on risque de faire une erreur chaque fois que, dans une branche de production donnée, on égale le prix de revient des marchandises à la valeur des moyens de production consommés pour les obtenir.

Nous jugeons inutile, pour l'étude que nous poursuivons en ce moment, d'insister sur ce point ... »

Marx exprime clairement que cette erreur lui paraît un détail ne justifiant pas l'interruption du fil de son raisonnement. Comme nous allons le montrer ci-après, cette erreur peut être résolue sans remettre en question les conclusions de l'auteur. Cependant, il s'est avéré que les tentatives précédentes de correction de cette « erreur » (7, 8) ont conduit à des remises en cause de deux lois jugées fondamentales par l'auteur du Capital, que nous nommerons égalités fondamentales de Marx :

1) L'égalité entre la somme des valeurs des marchandises de toute l'économie et la somme de leurs

prix. 2) L'égalité entre la somme des plus-values (en valeur) de toutes les branches et la somme des profits (en prix). Ces égalités ne sont pas de simples normalisations mais l'expression de la loi de conservation de la valeur, valeur créée par la seule plus-value dans le cadre du mode de production capitaliste et qui doit satisfaire le besoin social solvable.

De façon surprenante, aucuns des travaux suscités n'a considéré que les mouvements de capitaux entre branches faisaient partie intégrante du problème de la transformation, considérant que ce phénomène avait déjà produit son effet à travers la péréquation du taux de profit. Ce mouvement des capitaux semble pourtant une donnée implicite pour Marx qui explique que c'est la raison qui fait tendre à un taux de profit uniforme entre branches (5) :

« Si dans une sphère les prix des marchandises sont au-dessous ou au-dessus des prix de production (abstraction faite des fluctuations propre à chaque affaire et liées aux différentes phases du cycle industriel), il y a égalisation par élargissement ou réduction de la production, c'est-à-dire par extension ou diminution des masses de marchandises jetées sur le marché par les capitaux industriels ; cette égalisation est donc engendrée par le retrait ou l'apport de capital s'opérant dans les différentes sphères de production »

Les tableaux qu'utilise Marx pour illustrer sa théorie sont à considérer comme des illustrations d'un état d'équilibre hypothétique après transfert des capitaux entre branches. Le fait d'avoir attribué un même capital de 100 pour chaque branche dans le Tableau 1 est une simplification qui ne tient pas compte des besoins sociaux, la satisfaction desquels, comme nous allons le montrer, nécessite des mouvements de capitaux conditionnés au respect des deux égalités fondamentales.

En prenant en compte les mouvements de capitaux entre branches comme mécanisme conduisant à un taux de profit uniforme, V. Laure van Bambeke a montré que le problème de la transformation est solvable et les deux égalités fondamentales peuvent être vérifiées, approximativement. Ici, nous décrivons une résolution plus élémentaire, et qui respecte ces deux égalités, strictement.

Dans le système capitaliste considéré, les capitaux sont libres de circuler. Pour prendre une analogie électrique, il y a un état de grande « conductance » entre les différentes branches. En électrostatique, lorsque l'on calcule le champ électrique en un point de l'espace, on peut certes se baser sur une configuration arbitraire des charges électriques, il est alors sous-entendu que ces charges sont maintenues à leur place par une contrainte quelconque. Mais dès que l'on suppose ces charges libres dans un milieu conducteur, comme par exemple à la surface d'une cage de Faraday, nous n'avons plus le droit de les disposer où bon nous semble. La répartition des charges et le calcul du champ résultant (nul à l'intérieur de la cage) deviennent des problèmes dépendants. En regardant le problème à l'envers les choses peuvent paraître quelquefois surprenantes, voire magiques. C'est ainsi que, dans un livre de physique célèbre (9), on peut lire cette description du champ électrique dans une boîte métallique fermée (cage de Faraday) :

« Sur la surface de la boîte il y a une distribution de charges extrêmement inhomogène. Le champ en tout point de l'espace, y compris à l'intérieur de la boîte est la somme du champ dû à cette distribution de charges et de celui dû aux charges extérieures. IL SEMBLE A PEINE CROYABLE QUE LA CHARGE DE SURFACE PUISSE SE REPARTIR ELLE MÊME SUR LA BOITE DE FACON ASSEZ compliquée POUR QUE SON CHAMP ANNULE EXACTEMENT CELUI créé par les

charges extérieures en tout point situé à l'intérieur de la boîte. ET c'EST
POURTANT CE QU'IL SE PASSE !!! »

Il n'y a pourtant aucune magie dans cet état des choses qui s'explique très bien par une loi physique. C'est avec ce type de raisonnement « à l'envers » que M. Husson (10) perçoit le travail de V. Laure van Bambeke (11) comme une approche fantaisiste où les capitalistes investiraient juste pour respecter les égalités marxistes (10).

Dans le problème qui nous occupe, nous montrons que la libre circulation des capitaux entre branches est indissociable d'une allocation spécifique pour chacune d'entre elles du montant de capital qui tient compte du besoin social solvable. Nous montrons par-là que, contrairement à une vision étonnamment répandue (10), la répartition des capitaux entre les branches ne peut en aucun cas constituer une donnée exogène, elle est imposée par la satisfaction des besoins sociaux solvables.

LES MODÈLES DE CETTE ÉTUDE

Le problème de la transformation a été introduit par Marx dans le but d'expliquer comment les taux de profit de branches de compositions organiques (répartition entre capital fixe C et variable V) différentes tendent à une valeur comparable que nous nommerons taux de profit moyen ou uniforme. Le postulat selon lequel l'unique mécanisme de création de valeur est la plus-value (réalisée sur le travail qui est rétribué moins que la valeur qu'il produit) conduit à cette intuition que les branches dont la répartition du capital penche davantage vers le capital variable (V) et qui donc génèrent plus de plus-value devraient générer plus de profit. Or, ce n'est pas ce qui est observé. Dans le monde réel, chaque branche tend vers le même taux de profit moyen (ou uniforme). Pour expliquer ce paradoxe apparent, Marx a proposé une inadéquation entre valeur et prix de production de marché et donné les clés pour résoudre mathématiquement la transformation des valeurs en prix. Ce problème de la transformation s'est heurté à de nombreuses critiques, et il a fallu attendre le travail de V. Laure van Bambeke (1) pour montrer qu'il se résout dès lors qu'il est admis que capitaux se répartissent entre branches pour satisfaire un équilibre correspondant à la réalisation d'un taux de profit uniforme et des besoins sociaux solvables. L'approche de V. Laure van Bambeke remet en selle le problème de la transformation posé par Marx, mais elle n'est pas entièrement satisfaisante car (i) elle ne résout pas le problème quand le capital fixe est nul ; (ii) elle utilise la méthode d'approximation de Moore-Penrose qui implique un respect des égalités fondamentales qui n'est qu'approximatif quand l'équilibre des taux de profit n'est pas atteint ; (iii) sa méthode de résolution, basée sur des transferts successifs et parcimonieux de capitaux d'une branche à l'autre jusqu'à trouver une erreur « acceptable » pour toutes les équations est fastidieuse et difficilement praticable pour un nombre de branches supérieur à deux.

Ici, en considérant successivement des modèles d'économie à deux branches, trois, quatre et cinq branches, nous détaillons une résolution mathématique directe du problème de la transformation, qui respecte strictement les deux égalités fondamentales, et qui peut être généralisée à un nombre quelconque de branches. Notre approche, appliquée à un cas idéal sans capital fixe et sans profit permet de mettre en exergue le sens des égalités fondamentales de Marx, fondement de la méthode, qui traduisent la loi de conservation de la valeur et l'adéquation entre la production et les besoins sociaux solvables.

Les données initiales des tableaux sont rangées par lignes correspondants à la production d'un type de marchandise. Ces tableaux présentent une répartition quelconque des capitaux entre branches qui ne respecte pas forcément les égalités fondamentales. En divisant les données d'une ligne correspondant à un secteur d'activité par le capital total de ce secteur, on définit les paramètres intangibles du modèle que sont les coefficients socio-techniques. Les coefficients socio-techniques donnent pour une marchandise produite (extrant), les proportions (rapport de valeurs) nécessaires des marchandises qui la constituent (intrans). Les coefficients sociotechniques sont fonction des avancées de la technique et de la nature des marchandises. Le modèle consiste à ajuster la répartition des capitaux entre branches en respectant les égalités fondamentales de Marx jusqu'à obtention d'un taux de profit généralement uniforme. Le différentiel des taux de profit entre les branches donne la direction du déplacement des capitaux et finit par s'annuler quand la juste répartition est atteinte et cela dans le cas d'une concurrence libre et non faussée. Notre modèle prévoit cependant la possibilité de contraintes qui imposeraient une différence donnée entre ces taux de profit (existence de monopoles par exemple). La solution du problème est donnée par des coefficients de transformations (valeur en prix pour chaque type de marchandise) et une répartition des capitaux entre branches qui satisfont les égalités fondamentales et un différentiel imposé (nul dans le cas standard) des taux de profit.

Nous nous situons dans la continuité du travail précurseur de V. Laure van Bambeke (1, 11, 12) et nous avons adopté pour les modèles à deux et trois branches un capital fixe qui est importé, celui-ci est acheté par les capitalistes à son prix et transmet progressivement sa valeur à la marchandise produite sous la forme d'un amortissement annuel égal au rapport prix du capital fixe sur le nombre de cycles de production. Pour ces modèles la valeur totale transmise par ce capital fixe est considérée égale à son prix. Nous envisageons ensuite un modèle comportant une branche produisant les machines ; auquel cas le capital fixe (machines) a un prix indépendamment de sa valeur.

De plus, nous envisageons la situation où ce capital fixe est nul et montrons que cette situation n'empêche pas de résoudre le problème de la transformation. Le modèle à deux branches est particulier dans le sens où il n'admet qu'une seule solution des coefficients de transformations et de la répartition des capitaux.

Les branches des différents modèles sont définies comme suit :

- Modèles à deux branches : C (matières premières), V (Force de travail).
- Modèles à trois branches : E (Energie), C, V.
- Modèles à quatre branches :
 - a) Branches E, C, V, L (Luxe) : Les marchandises produites par la branche de Luxe L ne sont pas utilisées par les trois premières branches fondamentales.
 - b) Branches M(Machines), E, C, V :

Les machines sont produites à l'intérieur du système économique considéré, leur amortissement continue à être effectué selon les mêmes règles comptables que précédemment mais il faut tenir compte cette fois des prix de ces machines qui ne coïncident pas forcément avec leurs valeurs.
- Modèles à cinq branches : M, E, C, V, L. Nous ajoutons une branche de luxe dont les marchandises produites ne sont pas consommées par les quatre premières branches fondamentales.

A- Problème de la transformation pour un modèle d'économie à deux branches

1. Modèle à deux branches avec capital fixe

a) Définitions

Dans ce modèle minimal, la production se divise en deux branches : C et V. La branche C produit des matières premières. La branche V produit des biens consommés par les travailleurs des deux branches.

Dans chaque branche, le capital investi se subdivise en trois sous types de capitaux.

Nous notons que pour la branche i , le capital total investi K_i se subdivise en F_i , C_i et V_i :

$$K_i = F_i + C_i + V_i$$

F_i : Le capital fixe, c'est à dire le capital investit dans l'achat de l'infrastructure et des machines. Ce capital est amorti sur un nombre n de cycles. On définit $D_i = F_i/n$, la quantité de valeur transmise par le capital fixe à chaque cycle.

C_i : Le capital constant, par exemple le capital nécessaire à chaque cycle pour l'achat de matières premières.

V_i : Le capital variable, défini comme le capital nécessaire à chaque cycle pour reproduire la force de travail des salariés.

La proportion de capital non variable dans la branche i est définie comme **composition organique** de la branche i : $CO_i = \frac{F_i + C_i}{V_i}$

La production totale de la branche i a une valeur ajoutée notée PL_i dépendant du taux d'exploitation e_i du travail. Ce taux d'exploitation dépend des rapports de force entre travailleurs et employeurs. Notre hypothèse initiale est que ce rapport de force s'équilibre entre les branches et que le travail est exploité en moyenne par un même taux d'exploitation noté e . (L'hypothèse d'un taux d'exploitation différent entre branches ne change pas les conclusions générales de la transformation.)

Ainsi, pour la branche i , $PL_i = eV_i$

La production totale de la branche i à chaque cycle est notée W_i :

$$W_i = D_i + C_i + V_i + PL_i = D_i + C_i + (1 + e)V_i$$

Dans Le Capital, livre III, Marx postule que les marchandises sont échangées selon un prix de production de marché qui diffère de la valeur. La transformation de la valeur en prix se résout par un coefficient de transformation propre au type de marchandise. Ce coefficient est noté x_i pour la branche i . Autrement dit, pour la branche i , le prix de la production totale est $x_i W_i$.

Dans le modèle à deux branches, le coefficient x_1 s'applique pour les matières premières et le coefficient x_2 s'applique pour les marchandises produites par la branche 2. Dans ce modèle minimal, il est considéré que les salaires ne peuvent être dépensés que pour l'achat de ces marchandises. Par conséquent, le coefficient x_2 s'applique donc également au salaire des travailleurs.

Ainsi, le capital total en prix investi dans la branche i , noté K_{pi} , s'écrit :

$$K_{pi} = F_i + x_1 C_i + x_2 V_i$$

Et la production totale en prix de la branche i est, à chaque cycle :

$$x_i W_i = D_i + x_1 C_i + x_2 V_i + S_i$$

S_i étant le profit en prix de la branche i.

b) Les égalités fondamentales de Marx

Selon Marx, les coefficients de transformation des valeurs en prix sont contraints par un équilibre réel du système économique en valeurs. Marx a proposé deux égalités correspondant à ces contraintes.

La première égalité postule que la somme des profits (prix) est égale à la somme des plus-values (valeurs). Ainsi, globalement, pour l'ensemble du système économique, la création globale de richesses (en prix) est exactement égale à la création de valeur. L'égalité s'écrit :

$\sum S_i = \sum PL_i$	Que nous appellerons égalité fondamentale I
------------------------	--

La deuxième égalité postule que la somme des capitaux engagés en prix est égale à la somme des capitaux engagés en valeur. C'est-à-dire : $\sum K_{pi} = \sum K_i$

Cette égalité peut aussi s'écrire :

$$\sum(x_1 C_i + x_2 V_i) = \sum(C_i + V_i)$$

En tenant compte de l'égalité fondamentale I, nous pouvons écrire :

$$\sum(x_1 C_i + x_2 V_i + S_i) = \sum(C_i + V_i + PL_i)$$

Ou encore :

$$\sum(D_i + x_1 C_i + x_2 V_i + S_i) = \sum(D_i + C_i + V_i + PL_i)$$

Ce qui revient à postuler que la somme de la production en prix est exactement égale à la somme des productions en valeur, et peut encore s'écrire :

$\sum x_i W_i = \sum W_i$	Que nous appellerons égalité fondamentale II
---------------------------	---

c) Le problème de la transformation, en équations

Dans ce qui suit, nous résolvons le problème de la transformation, c'est-à-dire nous déterminons les coefficients x_i , tout en respectant les deux égalités fondamentales. Le cas le plus simple est de considérer un même taux de profit pour chaque branche. Ce taux de profit, noté r est tel que, pour chaque branche $S_i = rK_{pi}$.

Le capital total K_T se distribue en K_1 et K_2 dans les branches 1 et 2 respectivement. Cette répartition n'est pas une donnée fixe, elle dépend de la transformation. Par contre, la composition organique des branches et les **coefficients sociotechniques** $f_i = F_i/K_i$, $c_i = C_i/K_i$ et $v_i = V_i/K_i$ sont fixés par les

moyens de la technique, la nature des marchandises considérées, leurs compositions et le degré de qualification de la main-d'œuvre.

$$\text{Pour chaque branche, } f_i + c_i + v_i = 1 \quad (1a)$$

Pour la démonstration qui suit, il est utile de généraliser cette écriture en normalisant, par rapport à K_i , les différents termes intervenant.

$$w_i = W_i/K_i, \quad d_i = D_i/K_i, \quad pl_i = PL_i/K_i, \quad s_i = S_i/K_i$$

Ainsi, les relations définies dans le paragraphe précédent peuvent s'écrire

$$pl_i = e v_i \quad (2a)$$

$$d_i = f_i/n \quad (3a)$$

$$w_i = d_i + c_i + v_i + pl_i = d_i + c_i + (1 + e)v_i \quad (4a)$$

$$x_i w_i = d_i + x_1 c_i + x_2 v_i + s_i \quad (5a)$$

$$s_i = r(nd_i + x_1 c_i + x_2 v_i) \quad (6a)$$

Ayant posé $k_1 = K_1/K_T$ et $k_2 = K_2/K_T$

L'égalité fondamentale I peut s'écrire :

$$[k_1(x_1 w_1 - x_1 c_1 - x_2 v_1 - d_1) + k_2(x_2 w_2 - x_1 c_2 - x_2 v_2 - d_2)] - [k_1 pl_1 + k_2 pl_2] = 0$$

Ou encore :

$$k_1(x_1(w_1 - c_1) - x_2 v_1 - (d_1 + pl_1)) + k_2(x_2(w_2 - v_2) - x_1 c_2 - (d_2 + pl_2)) = 0$$

Pour la résolution du problème de la transformation, nous définissons la variable z qui exprime la différence entre le profit total et la plus-value totale. Cette fonction s'annule quand l'égalité fondamentale I est vérifiée :

$$z(x_1, x_2) = k_1(x_1(w_1 - c_1) - x_2 v_1 - (d_1 + pl_1)) + k_2(x_2(w_2 - v_2) - x_1 c_2 - (d_2 + pl_2)) \quad (7a)$$

Les équations (5a) et (6a) amènent au **système d'équations des branches en prix** :

$$\left. \begin{aligned} [c_1(1+r) - w_1]x_1 + v_1(1+r)x_2 &= -(1+nr)d_1 \\ c_2(1+r)x_1 + [v_2(1+r) - w_2]x_2 &= -(1+nr)d_2 \end{aligned} \right\}$$

Ce système d'équations permet de déterminer x_1 et x_2 en fonction de r (ou de r_1 et r_2 si on se place dans un cas où les taux de profits sont différents)

L'égalité fondamentale II peut s'écrire :

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 = k_1 x_1 w_1 + k_2 x_2 w_2$$

Le système d'équations suivant permet de déterminer k_1 et k_2 en fonction de x_1 et x_2 .

$$\left. \begin{aligned} \text{On a} \quad k_1 + k_2 &= 1 \\ \text{Et} \quad k_1 w_1(1 - x_1) + k_2 w_2(1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{déduit de l'égalité fondamentale II})$$

La solution (k_1, k_2) de ce système d'équations est unique (on suppose le dénominateur du déterminant différent de zéro) :

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}$$

Interprétation géométrique :

Dans l'espace des K qui est ici le plan K_1, K_2 , cette solution correspond à l'intersection, des deux droites d'équations 8a et 9a ci-dessous. La droite d'équation 7a est confondue à celle d'équation 9a.

$$8a) K_1 + K_2 = K_T$$

$$9a) K_1 w_1(1-x_1) + K_2 w_2(1-x_1) = 0$$

$$7a) K_1[(w_1 - c_1)x_1 - v_1 x_2 - (d_1 + pl_1)] + K_2[(w_2 - v_2)x_2 - c_2 x_1 - (d_2 + pl_2)] = 0$$

x_1 et x_2 pouvant s'exprimer en fonction de r (voir plus haut, le système d'équations des branches en prix), k_1 et k_2 peuvent aussi s'exprimer en fonction de r . Il est important de noter ici que r n'est pas encore connu à ce stade et que les valeurs des coefficients de transformation issus du système d'équations (5a) et (6a) en x sont aussi provisoire. Pour valider ces derniers ainsi que le taux de profit qui leur correspond, il faudra que l'égalité fondamentale I soit réalisée et par conséquent que la fonction $z(x_1, x_2)$ (expression 7a) ou encore $z(r)$ s'annule. Nous montrerons au chapitre G que, quelle que soit le nombre de branches, la solution r^* de l'équation $z(r) = 0$ est la première annulation de la fonction z pour z décroissante.

d) Conclusion

Quels que soient les coefficients sociotechniques des deux branches, une valeur r^* du taux de profit existe, telle que les deux égalités fondamentales sont respectées. La plus-value étant, dans ce modèle, le seul mécanisme créateur de valeur, le taux de profit en interne (calculé en valeur) est plus important pour la branche la moins capitalistique (composition organique faible). Mais en prix, il est observé un taux de profit comparable entre branches (disons uniforme). Marx avait décrit ce processus en exprimant que « les capitalistes sont frères » (6), c'est-à-dire qu'ils se partagent la plus-value totale, et ce partage se traduit par un taux de profit uniforme (en prix). Autrement dit, en prix, une branche très capitalistique pourra avoir le même taux de profit qu'une branche de faible composition organique, même si en valeur c'est cette dernière branche qui génère proportionnellement le plus de plus-value. On notera aussi que la solution pour le couple (k_1, k_2) est unique. Autrement dit, il n'y a qu'une seule

manière de répartir les capitaux entre branches, ce qui fait du cas à deux dimensions un cas particulier contrairement à l'infinité de solutions qui apparaîtront pour les dimensions supérieures.

e) *Exemple*

On part de la configuration de l'exemple à deux branches utilisé par V. Laur van Bambeke (1) avec $K_T = 715$ et $n = 5$ cycles :

	F Total	C	V	PL	W	K
Branche I	125.000000	200.000000	90.000000	60.000000	375.000000	415.000000
Branche II	100.000000	80.000000	120.000000	80.000000	300.000000	300.000000
TOTAL	225.000000	280.000000	210.000000	140.000000	675.000000	715.000000

Tableau 2A

On calcule avec notre algorithme la seule répartition solution du système de prix et qui respecte les égalités fondamentales de Marx.

Valeurs après transfert

	F	C	V	PL	W	K
Branche I	129.688452	207.5015235	93.37568561	62.2504570	389.065356742	430.5656614
Branche II	94.8114461	75.84915694	113.7737354	75.8491569	284.434338537	284.4343385
TOTAL	224.499898	283.3506805	207.1494210	138.09961	673.49969528	715.000000

Prix après transfert

	F	C	V	S	W	Kp
Branche I	129.688452	222.2667888	84.28714183	84.2586079	416.750229129	436.2423829
Branche II	94.8114461	81.24638441	102.6997864	53.8410060	256.749466151	278.7576170
TOTAL	224.499898	303.5131732	186.9869282	138.09961	673.49969528	715.000000

Tableau 2B-C

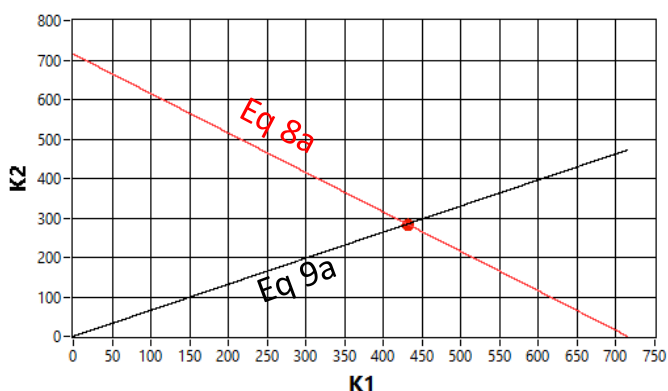
x1,x2

0	1.071157382446
0	0.9026669124112

K1,K2 après transfert

0	430.565661462
0	284.434338538

Cette répartition donne un taux de profit uniforme r^* de **0.1931463133178**



2. Un cas simplifié qui met en exergue le sens des égalités fondamentales de Marx

Le cas simplifié du modèle à deux branches sans capital fixe, ni profit, est utile pour bien voir le lien entre les égalités fondamentales et la satisfaction du besoin social solvable.

Le système d'équations des branches en prix devient :

$$[c_1 - w_1]x_1 + v_1x_2 = 0$$

$$c_2x_1 + [v_2 - w_2]x_2 = 0$$

$$\text{On a } w_1 = c_1 + v_1 \text{ et } w_2 = c_2 + v_2$$

$$\text{On en déduit } x_1 = x_2$$

Le respect de chacune des égalités fondamentales n'est possible que pour $x_1 = x_2 = 1$

En effet, l'égalité fondamentale II est

$$K_1w_1 + K_2w_2 = K_1x_1w_1 + K_2x_2w_2$$

$$\text{Si } x_1 = x_2, \text{ alors } x_1 = x_2 = 1$$

L'égalité fondamentale I devient

$$K_1(x_1(w_1 - c_1) - x_2v_1) + K_2(x_2(w_2 - v_2) - x_1c_2) = 0$$

Et peut encore s'écrire :

$$[K_1w_1 - (K_1c_1 + K_2c_2)]x_1 + [K_2w_2 - (K_1v_1 + K_2v_2)]x_2 = 0 \quad (11a)$$

Or, pour satisfaire les besoins, le prix de toutes les marchandises produites dans chacune des branches doit être supérieur ou égale au prix de ces marchandises consommées dans les deux branches.

Autrement dit :

$$K_1w_1x_1 \geq (K_1c_1 + K_2c_2)x_1$$

$$\text{Et } K_2w_2x_2 \geq (K_1v_1 + K_2v_2)x_2$$

Donc, l'égalité (11a) n'est possible que pour

$$K_1w_1 = K_1c_1 + K_2c_2$$

$$\text{Et } K_2w_2 = K_1v_1 + K_2v_2$$

Ce modèle sans capital fixe ni plus-value montre clairement que **l'égalité fondamentale I exprime l'adéquation entre la production et les besoins solvables.**

Cette égalité peut également s'écrire :

$$K_1(w_1 - c_1) - K_2c_2 = 0$$

$$-K_1v_1 + K_2(w_2 - v_2) = 0$$

Ce système admet une infinité de solutions (déterminant nul puisque $w_1 = c_1 + v_1$ et $w_2 = c_2 + v_2$), ce qui signifie que ces deux équations sont redondantes. Nous n'en garderons qu'une.

En tenant compte de l'égalité $K_1 + K_2 = K_T$, comme seconde équation du système, il existe alors une solution unique pour (K_1, K_2) :

$$K_1 = \frac{K_T c_2}{v_1 + v_2}$$

$$K_2 = \frac{K_T v_1}{v_1 + v_2}$$

Exemple

Valeurs de départ avec répartition des capitaux (50/50)

	F Total	C	V	PL	W	K
Branche I	0.00000000	131.9788674	59.39049034	0.00000000	191.3693577	191.3693577
Branche II	0.00000000	76.54774311	114.8216146	0.00000000	191.3693577	191.3693577
TOTAL	0.00000000	215.5227719	167.2159437	0.00000000	382.7387156	382.7387156

Valeurs apres transfert

	F	C	V	PL	W	K=KP
Branche I	0.00000000	148.6363944	66.88637748	0.00000000	215.52277190	215.5227719
Branche II	0.00000000	66.88637748	100.3295662	0.00000000	167.21594371	167.2159437
TOTAL	0.00000000	215.5227719	167.2159437	0.00000000	382.7387156	382.7387156

Tableaux 2D

$$K_1 = 215.523 \quad K_2 = 167.216$$

3. Conclusion

Le système à deux branches montre que le respect des égalités fondamentales contraint à une répartition unique des capitaux entre les deux branches. Quand il y a exploitation et par conséquent un profit réalisé, cette répartition des capitaux conduit à un taux de profit spécifique r^* . Le cas particulier du système sans capital fixe et sans plus-value est utile pour mettre en évidence le sens général des égalités fondamentales de Marx : elles expriment l'adéquation entre la production et les besoins solvables. La prise en compte de ces équations dans le système avec capital fixe et plus-value non nuls, fait que la valeur de r^* est à la fois déterminée par le degré d'exploitation du travail humain et par la quantité de marchandises pouvant être absorbée par le marché.

Remarquons qu'il est possible de fixer une différence Δr de taux de profit entre les branches 1 et 2, les valeurs r^* et $r^* + \Delta r$ seront alors trouvées par la même méthode d'interpolation.

De façon générale, la répartition des capitaux entre branches est contrainte par l'adéquation entre la production et les besoins solvables. La répartition des capitaux entre branches est donc indissociable de la question de la transformation des valeurs en prix de production de marché.

B- Problème de la transformation pour un modèle d'économie à trois branches

La démarche est identique à celle du cas précédent à deux branches. Dans le modèle à trois branches, une inconnue supplémentaire apparaît pour le système linéaire en K qui devient sous-déterminé avec une infinité de solution.

1. Modèle à trois branches avec capital fixe

a) Définitions

Dans ce modèle, la production se divise en trois branches. La première branche produit l'énergie : **E**; **C**, la deuxième, des matières premières, et la branche trois, les biens qui sont consommés par les travailleurs des trois branches : **V**.

Dans chaque branche, le capital investi se subdivise en quatre sous types de capitaux.

Nous notons que pour la branche *i*, le capital investi K_i se subdivise en F_i , E_i , C_i et V_i :

$$K_i = F_i + E_i + C_i + V_i$$

F_i est le capital fixe, c'est à dire le capital investit dans l'achat de l'infrastructure et des machines. Ce capital est amorti sur un nombre n de cycles. On définit $D_i = F_i/n$ la quantité de valeur transmise par le capital fixe à chaque cycle.

Pour chaque branche indiquée *i* :

E_i est le capital nécessaire à chaque cycle pour l'énergie.

C_i est le capital nécessaire à chaque cycle pour l'achat de matières premières.

V_i est le capital variable, défini comme le capital nécessaire à chaque cycle pour reproduire la force de travail des salariés.

La proportion de capital non variable dans la branche *i* est définie comme **composition organique** de la branche *i* : $CO_i = \frac{F_i + E_i + C_i}{V_i}$

La production totale de la branche *i* a une valeur ajoutée notée PL_i dépendant du taux d'exploitation du travail. Ce taux d'exploitation dépend des rapports de force entre travailleurs et employeurs. Notre hypothèse initiale est que ce rapport de force s'équilibre entre les branches et que le travail est exploité en moyenne par un même taux d'exploitation noté e . (L'hypothèse d'un taux d'exploitation différent entre branches ne change pas les conclusions générales de la transformation.)

Ainsi, pour la branche *i*, $PL_i = eV_i$

La production totale de la branche *i* à chaque cycle est notée W_i :

$$W_i = D_i + E_i + C_i + V_i + PL_i = D_i + E_i + C_i + (1 + e)V_i$$

Dans Le Capital, livre III, Marx postule que les marchandises sont échangées selon un prix de production de marché qui diffère de la valeur. La transformation de la valeur en prix se résout par un

coefficient de transformation propre au type de marchandise. Ce coefficient est noté x_i pour la branche i . Autrement dit, pour la branche i , le prix de la production totale est $x_i W_i$.

Dans le modèle à trois branches, le coefficient x_1 s'applique pour les matières premières, le coefficient x_2 pour l'énergie et x_3 pour les marchandises produites par la branche 3. Le coefficient x_3 s'applique au salaire des travailleurs qui reproduisent leur force de travail avec les biens de consommations courants.

Ainsi, le capital total en prix investi dans la branche i , noté K_{pi} , s'écrit :

$$K_{pi} = F_i + x_1 C_i + x_2 E_i + x_3 V_i$$

On notera que le capital fixe n'a pas de coefficient de transformation car le capitaliste se procure ce capital fixe au prix de marché, ce capital est amorti ensuite au cours de n cycles de production. Nous suivons ici la manière de procéder de Laure van Bambeke.

Et la production totale en prix de la branche i est, à chaque cycle :

$$x_i W_i = D_i + x_1 C_i + x_2 E_i + x_3 V_i + S_i$$

S_i étant défini comme le profit en prix de la branche i .

b) Les égalités fondamentales de Marx

Selon Marx, les coefficients de transformation des valeurs en prix sont contraints par deux égalités correspondant à des contraintes. Nous avons vu dans la partie A que ces deux égalités expriment l'adéquation entre la production et les besoins solvables.

La première égalité postule que la somme des profits (prix) est égale à la somme des plus-values (valeur). Ainsi, globalement, pour l'ensemble du système économique, la création globale de richesses (en prix) est exactement égale à la création de valeur. L'égalité s'écrit :

$\sum S_i = \sum PL_i$	Que nous appellerons égalité fondamentale I
------------------------	--

La deuxième égalité postule que la somme des capitaux engagés en prix est égale à la somme des capitaux engagés en valeur. C'est-à-dire : $\sum K_{pi} = \sum K_i$

Cette dernière qui peut s'écrire aussi :

$$\sum (x_1 C_i + x_2 E_i + x_3 V_i) = \sum (C_i + E_i + V_i)$$

En tenant compte de l'égalité fondamentale I, nous pouvons écrire :

$$\sum (x_1 C_i + x_2 E_i + x_3 V_i + S_i) = \sum (C_i + E_i + V_i + PL_i)$$

Ou encore :

$$^1 \sum (D_i + x_1 C_i + x_2 E_i + x_3 V_i + S_i) = \sum (D_i + C_i + E_i + V_i + PL_i)$$

¹ On pourra objecter que la quantité D_i apparaissant dans le membre de droite n'est pas une valeur et a été considérée justement dans le membre de gauche comme le prix d'achat par le capitaliste. C'est

Ce qui revient à postuler que la somme de la production en prix est exactement égale à la somme des productions en valeur, et peut encore s'écrire :

$\sum x_i W_i = \sum W_i$	Que nous appellerons égalité fondamentale II
---------------------------	---

c) Résolution du problème de la transformation

Dans ce qui suit, nous résolvons le problème de la transformation, c'est-à-dire nous déterminons les coefficients x_i , tout en respectant les deux égalités fondamentales. Le cas le plus simple mais nullement obligatoire est de considérer un même taux de profit pour chaque branche. Ce taux de profit, noté r est tel que, pour chaque branche $S_i = rK_{pi}$.

Le capital total K_T se distribue en K_1, K_2 et K_3 dans les branches 1, 2 et 3 respectivement. Cette répartition n'est pas une donnée fixe, elle dépend de la transformation. Par contre, la composition organique des branches se définissant par la quantité $CO_i = \frac{F_i + C_i}{V_i}$ et les **coefficients sociotechniques** $f_i = F_i/K_i, e_i = E_i/K_i, c_i = C_i/K_i$ et $v_i = V_i/K_i$ sont fixés par les moyens de la technique, la nature des marchandises considérées, leurs compositions et le degré de qualification de la main-d'œuvre.

Pour chaque branche, $f_i + e_i + c_i + v_i = 1$ (1b)

Pour la démonstration qui suit, nous généralisons cette écriture en normalisant les différents termes intervenant par rapport à K_i .

$$w_i = W_i/K_i, d_i = D_i/K_i, pl_i = PL_i/K_i, s_i = S_i/K_i$$

Ainsi, les relations définies dans le paragraphe précédent peuvent s'écrire :

$$pl_i = ev_i \tag{2b}$$

$$d_i = f_i/n \tag{3b}$$

$$w_i = d_i + e_i + c_i + v_i + pl_i = d_i + e_i + c_i + (1 + e)v_i \tag{4b}$$

$$x_i w_i = d_i + x_1 c_i + x_2 e_i + x_3 v_i + s_i \tag{5b}$$

incontestablement un point faible dans ce schéma de Laure van Bambeke qui est corrigé dans son modèle à quatre branches (voir chapitre F) dans lequel la production du capital fixe est endogène.

Il faut remarquer cependant que cette question du traitement du capital fixe n'est pas cruciale dans la résolution du problème de la transformation, puisque ce dernier se résout dans le cas d'un capital fixe nul (voir ci-après). De plus, au chapitre F, nous résolvons la transformation dans des modèles incluant une branche pour les machines...

$$s_i = r(nd_i + x_1c_i + x_2e_i + x_3v_i) \quad (6b)$$

Ayant posé $k_1 = K_1/K_T$, $k_2 = K_2/K_T$ et $k_3 = K_3/K_T$

L'égalité fondamentale I peut s'écrire:

$$k_1[x_1w_1 - x_1e_1 - x_2c_1 - x_3v_1 - d_1] + k_2[x_2w_2 - x_1e_2 - x_2c_2 - x_3v_2 - d_2] + k_3[x_3w_3 - x_1e_3 - x_2c_3 - x_3v_3 - d_3] - [k_1pl_1 + k_2pl_2 + k_3pl_3] = 0$$

Ou encore :

$$k_1[x_1(w_1 - e_1) - x_2c_1 - x_3v_1 - (d_1 + pl_1)] + k_2[x_2(w_2 - c_2) - x_1e_2 - x_3v_2 - (d_2 + pl_2)] + k_3[x_3(w_3 - v_3) - x_1e_3 - x_2v_3 - (d_3 + pl_3)] = 0$$

Pour la résolution du problème de la transformation, il sera utile de noter :

$$z = k_1[x_1(w_1 - e_1) - x_2c_1 - x_3v_1 - (d_1 + pl_1)] + k_2[x_2(w_2 - c_2) - x_1e_2 - x_3v_2 - (d_2 + pl_2)] + k_3[x_3(w_3 - v_3) - x_1e_3 - x_2v_3 - (d_3 + pl_3)] \quad (7b)$$

Les équations (5b) et (6b) amènent au **système d'équations des branches en prix** :

$$\left. \begin{aligned} (e_1t - w_1)x_1 + c_1tx_2 + v_1tx_3 &= -d_1(1 + nr) \\ e_2tx_1 + (c_2t - w_2)x_2 + v_2tx_3 &= -d_2(1 + nr) \\ e_3tx_1 + c_3tx_2 + (v_3t - w_3)x_3 &= -d_3(1 + nr) \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

On a posé :

$$t = 1 + r$$

Ce système d'équations, quand son déterminant est non nul, permet de déterminer un triplet unique x_1, x_2, x_3 en fonction de r

L'égalité fondamentale II peut s'écrire :

$$k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 = k_1x_1w_1 + k_2x_2w_2 + k_3x_3w_3$$

Comme pour le modèle à deux branches, un système d'équations similaire permet de déterminer les k_i en fonction des x_i . Mais ce système d'équations possède un degré de liberté supplémentaire. Il y a donc, contrairement au cas à deux branches, une infinité de solutions. En fixant un k_i , par exemple $k_3 = k_3^{fixed}$, on a :

$$\left. \begin{aligned} \text{On a} \quad k_1 + k_2 &= 1 - k_3^{fixed} \\ \text{Et} \quad k_1w_1(1 - x_1) + k_2w_2(1 - x_2) &= -k_3^{fixed}w_3(1 - x_3) \end{aligned} \right\}$$

(Dédit de l'égalité fondamentale II)

Le déterminant de ce système est :

$$Det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}$$

Premier cas $Det \neq 0$:

Puisque que le coefficient k_3 est fixé, cela suppose ici différentes compositions organiques de la branche 1 et 2 (à taux d'exploitation identiques).

Les solutions de ce système d'équations sont :

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - k_3^{fixed} & 1 \\ -k_3^{fixed} w_3(1-x_3) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - k_3^{fixed} \\ w_1(1-x_1) & -k_3^{fixed} w_3(1-x_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1(1-x_1) & w_2(1-x_2) \end{vmatrix}}$$

Si au moins l'un des coefficients k_i (pour $i=1$ ou $i=2$) est trouvé négatif pour toutes les valeurs de r envisagées cela signifie que la valeur fixée k_3^{fixed} n'est pas acceptable et il est nécessaire d'en choisir une autre.

Deuxième cas $Det = 0$:

Pour des taux d'exploitation et de compositions organiques identiques des branches 1 et 2, pour éviter l'annulation du déterminant, il suffit de choisir l'une parmi ces deux branches dont on fixe le montant de capital pour se ramener au cas $Det \neq 0$. Si les trois branches sont de compositions organiques égales, dans ce cas les prix sont identiques aux valeurs, et les coefficients de transformation sont égaux à 1 :

Nous notons r^* la valeur positive la plus faible qui annule z et telle que $z(r^* - \varepsilon) > 0$ où ε désigne une valeur arbitrairement petite (voir chapitre VIII sur la fonction z)

L'égalité fondamentale I est vérifiée pour $r = r^*$.

L'égalité fondamentale II est vérifiée puisque nous l'avons utilisée pour déterminer k_1 et k_2 en fonction de x_1 et x_2 .

La valeur r^* peut être approchée aussi précisément que voulu au moyen d'une interpolation (voir algorithme décrit ci-après).

Les coefficients de transformations sont déterminés en fonction de r^* de façon unique.

Le tableau 3A correspond à la répartition d'un capital de 1000 unités monétaires entre les trois branches E, C, V. Cette répartition est une répartition « quelconque » de ce capital à partir des coefficients socio-techniques utilisés par Laure van Bambeke ((12), page 176). Les tableaux 3B en valeur et 3C en prix correspondent à une répartition respectant les deux égalités fondamentales et pour laquelle les trois taux de profit sont égaux. Le capital de la branche 3 a été fixé à 300 unités

monétaires², déterminant de la sorte la seule répartition restante possible pour les capitaux des deux premières branches. En employant les mêmes valeurs que Laure Van Bambeke pour le capital de la branche 3, nous obtenons des résultats qui diffèrent légèrement de la moins mauvaise solution³ qu'il trouve avec la méthode de Moore-Penrose (3 E).

d) Exemple

IN

A

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche I E	8.31504400	19.40180700	38.80346699	24.9451700	24.945170000	116.41065800	166.3008840
Branche II C	1.19699599	19.94996400	39.89988499	47.8799929	47.879992999	156.80683099	119.6998019
Branche III V	15.0733250	116.3555819	232.7111639	214.199999	214.19999999	792.54007100	713.9999960
TOTAL	24.585365	155.707353	311.414515	287.02516	287.0251630	1065.757560	1000.000682

B

Valeurs apres transfert

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche I E	16.6337646	38.81219293	77.62409181	49.9013700	49.901370060	232.87278955	332.6753016
Branche II C	3.67324760	61.22088752	122.4416430	146.930373	146.93037371	481.19652564	367.3253803
Branche III V	6.33332986	48.88890027	97.77780054	90.0000005	90.000000504	333.00003169	300.0000000
TOTAL	26.640342	148.921980	297.843535	286.83174	286.8317442	1047.069346	1000.000682

C

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche I E	16.6337646	46.46117676	70.84793374	49.3187365	95.5050082	278.766619	332.96549
Branche II C	3.67324760	73.28610576	111.7531582	145.214858	105.263334	439.1907044	366.98659
Branche III V	6.33332986	58.52376960	89.24233408	88.9491873	86.0634016	329.1120225	300.04858
TOTAL	26.6403421	178.271052	271.843426	283.48278	286.831744	1047.0693468	1000.000682

Tableau 3 A B C D

D

K1, K2, K3	r en prix	x1, x2, x3
0	0	0
332.67530162371	0.28683154865740212	1.197076827
367.32538037629	0.28683154865740229	0.9127054769
300	0.28683154865740224	0.9883242978

Pour une répartition avec K3=300

E

² En cherchant une « moins mauvaise solution » V. Laure Van Bambeke se cale sur la valeur de 367.9263 pour le capital engagé de la branche 3. Les solutions trouvées par notre méthode ne sont limitées en précision que par le nombre de chiffres significatifs employés (14 dans le cas présent)

³ « Moins mauvaise solution » est l'expression employée par l'auteur soi-même qui utilise la technique de résolution approchée de Moore-Penrose.

K1, K2, K3	r en prix	x1, x2, x3
305.518421123339	0.28682810820047633	1.19704086
326.555960876661	0.28682810820047638	0.9126729466
367.9263	0.28682810820047616	0.9882902803

Pour une répartition correspondant à $K_3=367.9263$

e) Interprétation géométrique

Les deux plans qui correspondent dans l'espace des K à l'égalité fondamentale II et à la conservation du capital total sont donnés rappelons-le par les deux équations suivantes :

$$K_1 w_1 (1 - x_1) + K_2 w_2 (1 - x_2) + K_3 w_3 (1 - x_3) = 0$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = K_T$$

L'intersection de ces deux plans est une droite dans un espace à 3 dimensions. La solution (K1, K2, K3) se trouve sur cette droite (Figure 2A). Si l'on choisit une valeur de K3 différente, r le taux de profit sera lui aussi différent ainsi que x1, x2, x3 les coefficients de la transformation. Or les quantités petit w1, petit w2, petit w3 étant des constantes il s'ensuit que la première équation ci-dessus est modifiée et correspond maintenant à un plan légèrement différent. La seconde équation exprimant la constance du capital total engagé ne change pas. Nous pouvons en déduire que la droite d'intersection des deux plans change pour chaque valeur de K3 choisie. L'ensemble des solutions se positionne donc selon une ligne incurvée dans l'espace à 3 dimensions K1, K2, K3. (Figure 2B) et non pas sur une droite comme l'affirme V. Laure van Bambeke ((12) page 181). Sur la figure 2A les limites de l'ensemble des solutions indiquées par les points sphériques bleu et vert ne peuvent être qu'approximatives du fait de cette courbure.

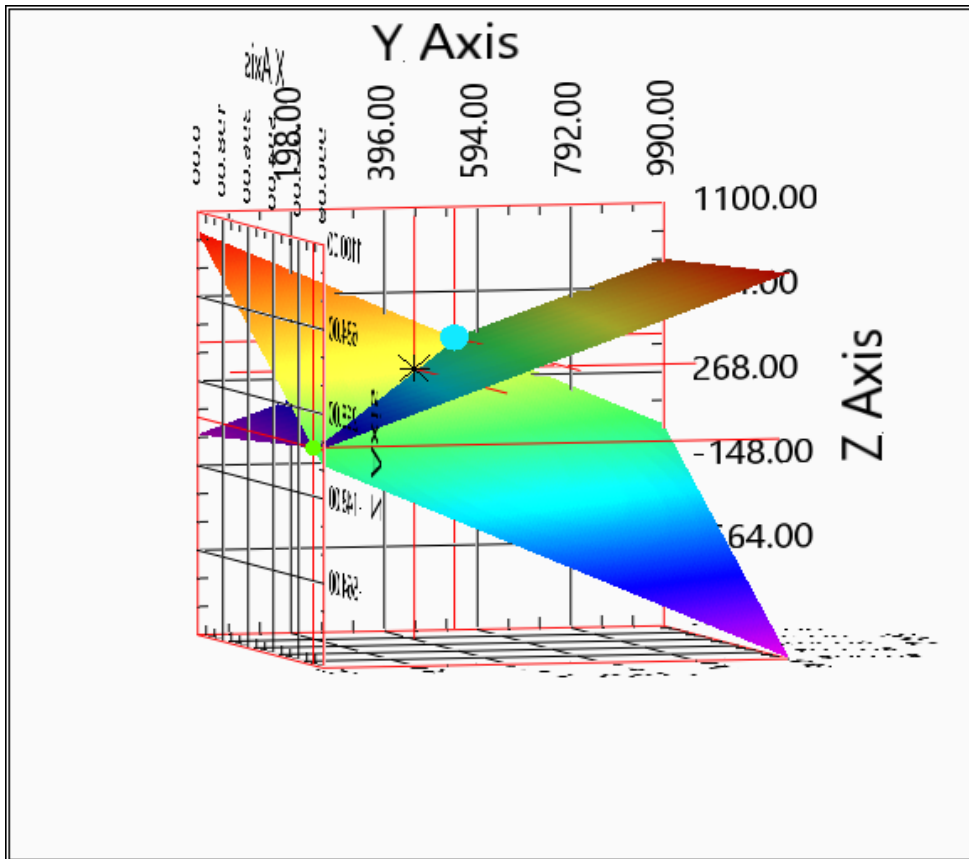


Figure 2 A : L'astérisque désigne une des solutions qui se trouve sur l'intersection des deux plans. Les points verts et bleus désignent les limites approximatives de l'ensemble des solutions.

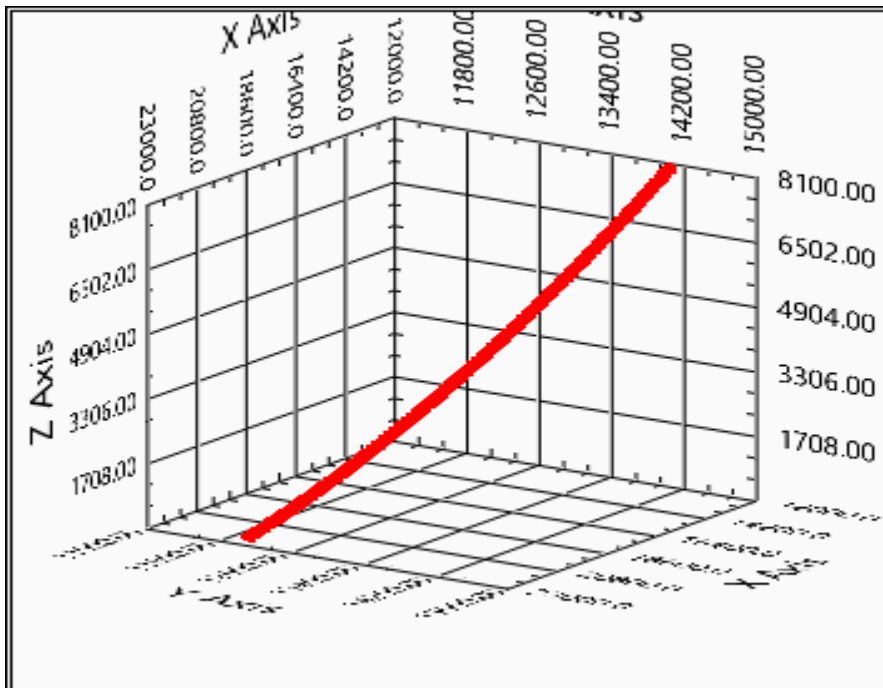


Figure 2B : L'ensemble des solutions ne se situe pas sur un segment rectiligne mais sur un segment courbé (tracé rouge). Cet exemple utilise des paramètres choisis pour obtenir une courbure prononcée.

Nous pouvons établir un raisonnement tout à fait analogue pour quatre branches. L'ensemble des solutions dans l'espace K_1, K_2, K_3, K_4 se répartirait dans ce cas sur une portion de surface légèrement incurvée.

f) Conclusion

Quels que soient les coefficients sociotechniques des trois branches, une valeur r^* du taux de profit existe, telle que les deux égalités fondamentales sont respectées. La plus-value étant, dans ce modèle, le seul mécanisme créateur de valeur, à taux d'exploitation identiques, le taux de profit en interne (calculé en valeur) est plus important pour la branche la moins capitalistique (composition organique faible). Mais en prix, il est observé un taux de profit comparable entre branches (disons uniforme). Marx avait décrit ce processus en exprimant que « les capitalistes frères se partagent la plus-value totale, et ce partage se traduit par un taux de profit uniforme (en prix). Autrement dit, en prix, une branche très capitalistique pourra avoir le même taux de profit qu'une branche de faible composition organique, même si en valeur c'est cette dernière branche qui génère proportionnellement le plus de plus-value. Il est notable que contrairement au cas le plus simple comportant deux branches, la répartition contient ici une infinité de solutions.

Le surplus en valeur d'une branche i est défini par la différence positive entre la production en valeur de la marchandise i et les consommations totale de cette marchandise par toutes les branches. Il n'y a pas de profit possible sans surplus en valeur. Celui-ci peut être accaparé en actions, en produits de luxe ou en argent par les propriétaires des moyens de production. Les ouvriers produisant plus que ce qu'ils consomment ne peuvent pas absorber toute la surproduction. Mais ils peuvent orienter leurs dépenses vers un produit plutôt qu'un autre. Ce choix va alimenter la compétition entre producteurs capitalistes pour faire désirer leurs marchandises plutôt que d'autres. Si on donne par exemple une envie accrue pour les téléphones portables alors il faudra extraire plus de certains minerais et le schéma de la production globale se modifie en conséquence. Une telle compétition entre capitalistes, tout en satisfaisant un taux de profit uniforme dans toutes les branches, n'est possible qu'à condition qu'il n'y ait pas qu'une répartition des capitaux comme solution de la transformation. Nous montrons qu'il y en a une infinité dès lors que la plus-value est non nulle (donc le surplus en valeur et le profit non nuls également). On peut dire que l'existence du surplus amène, dans les deux sens du mot, du jeu dans l'économie.

Dans le « vrai » monde, si l'on se place à un moment précis, il semble qu'une seule répartition des capitaux parmi une infinité possible s'établisse. Cet équilibre est déterminé par la réalité du monde, l'attrait de certains produits plutôt que d'autres, le succès relatif des branches de production, ou d'autres paramètres qui ne font pas partie du problème de la transformation (par exemple, la démographie). La transformation se borne à trouver les répartitions possibles, c'est à dire compatible avec les lois de conservation (égalités fondamentales) et l'établissement d'un taux de profit uniforme. Cette répartition change d'ailleurs tout le temps sous les effets de la technique, de la publicité c'est à dire finalement de la compétition entre les différents produits. **Si la transformation était rigide au point de ne permettre qu'une seule solution alors elle serait manifestement en contradiction avec la réalité d'un monde où les capitalistes sont en concurrence.**

2. Modèle à trois branches avec capital fixe et profit nuls

a) Résolution

Les équations (5) et (6) pour le **système d'équations des branches en prix** deviennent :

$$(e_1 - w_1)x_1 + c_1x_2 + v_1x_3 = 0$$

$$e_2x_1 + (c_2 - w_2)x_2 + v_2x_3 = 0$$

$$e_3x_1 + c_3x_2 + (v_3 - w_3)x_3 = 0$$

$$w_1x_1 = e_1x_1 + c_1x_2 + v_1x_3$$

$$w_2x_2 = e_2x_1 + c_2x_2 + v_2x_3$$

$$w_3x_3 = e_3x_1 + c_3x_2 + v_3x_3$$

Le système d'équations des branches en prix devient :

$$[e_1 - w_1]x_1 + c_1x_2 + v_1x_3 = 0$$

$$e_2x_1 + [e_2 - w_2]x_2 + v_2x_3 = 0$$

$$e_3x_1 + c_3x_2 + [v_3 - w_3]x_3 = 0$$

On a $w_i = c_i + e_i + v_i \quad i = 1,2,3$

On en déduit $x_i = x_j \quad \forall i, j$

Le respect de chacune des égalités fondamentales n'est possible que pour $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

En effet, l'égalité fondamentale II est

$$k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 = k_1x_1w_1 + k_2x_2w_2 + k_3x_3w_3$$

Si $x_1 = x_2 = x_3$, alors $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

L'égalité fondamentale I devient

$$k_1(x_1(w_1 - e_1) - x_2c_1 - x_3v_1) + k_2(x_2(w_2 - c_2) - x_1e_2 - x_3v_2) + k_3(x_3(w_3 - v_3) - x_1e_1 - x_2c_2) = 0$$

ET peut encore s'écrire :

$$[k_1w_1 - (k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_1)]x_1 + [k_2w_2 - (k_1c_1 + k_2c_2 + k_3c_3)]x_2 + [k_3w_3 - (k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3)]x_3 = 0$$

Contrainte physique :

Or, la quantité des marchandises produites dans chacune des trois branches doit être supérieure ou égale à la quantité totale de cette marchandise consommée dans les trois branches. Cette inégalité s'applique pour leur prix.

Autrement dit :

$$k_1 w_1 x_1 \geq (k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3) x_1$$

$$k_2 w_2 x_2 \geq (k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3) x_2$$

$$k_3 w_3 x_3 \geq (k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3) x_3$$

Donc, l'égalité fondamentale I n'est possible que lorsque les trois égalités suivantes sont respectées simultanément :

$$k_1 w_1 = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3$$

$$k_2 w_2 = k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3$$

$$k_3 w_3 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

Ce modèle sans capital fixe, ni plus-value, met en exergue l'implication des égalités fondamentales : **elles sont ici l'expression de l'adéquation entre la production et les besoins solvables.**

Ces égalités peuvent également s'écrire :

$$k_1(w_1 - e_1) - k_2 e_2 - k_3 e_3 = 0$$

$$-k_1 c_1 + k_2(w_2 - c_2) - k_3 c_3 = 0$$

$$-k_1 c_1 + k_2(w_2 - c_2) - k_3 c_3 = 0$$

Ce système a son déterminant nul, nous ne garderons donc que deux équations indépendantes.

En tenant compte de l'égalité $k_1 + k_2 + k_3 = 1$, comme troisième équation indépendante du système.

$$k_1[(w_1 - e_1)] - k_2 e_2 - k_3 e_3 = 0$$

$$-k_1[(c_1)] + k_2(w_2 - c_2) - k_3 c_3 = 0$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} (w_1 - e_1) & -e_2 & -e_3 \\ -c_1 & (w_2 - c_2) & -c_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$D \neq 0$, il existe alors une solution unique pour (k_1, k_2, k_3) :

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -e_2 & -e_3 \\ 0 & (w_2 - c_2) & -c_3 \\ K_T & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} (w_1 - e_1) & 0 & -e_3 \\ -c_1 & 0 & -c_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

$$k_3 = \frac{\begin{vmatrix} (w_1 - e_1) & -e_2 & 0 \\ -c_1 & (w_2 - c_2) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

Avec : $K_i = k_i K_T$

b) Exemple

IN

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche I E	0.00000000	19.40180700	38.80346699	24.9451700	0.0000000000	83.150444000	83.150444000
Branche II C	0.00000000	19.94996400	39.89988499	47.8799929	0.0000000000	107.72984199	107.72984199
Branche III V	0.00000000	116.3555819	232.7111639	214.199999	0.0000000000	563.26674600	563.26674600
TOTAL	0.00000000	155.707353	311.414515	287.02516	0.0000000000	754.1470320	754.1470320

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche I E	0.00000000	35.77724778	71.55422450	45.9992993	0.00000000	153.3307716	153.330771
Branche II C	0.00000000	56.78908263	113.5780428	136.294024	0.00000000	306.6611498	306.661149
Branche III V	0.00000000	60.76444122	121.5288824	111.861786	0.00000000	294.1551105	294.155110
TOTAL	0.00000000	153.330771	306.661149	294.15511	0.00000000	754.14703199	754.147031

Tableau 4

Les deux tableaux 4 reprennent l'exemple des tableaux 3 sans capital fixe et sans plus-value. Il n'y a plus alors qu'une seule répartition possible

3. Conclusion

Le système à trois branches avec capital fixe nul et plus-value nulle met en exergue le sens des égalités fondamentales. Elles expriment l'adéquation entre la production et les besoins solvables. Dans ce modèle simplifié, les égalités fondamentales contraignent à une répartition unique des capitaux entre les trois branches qui assure cette adéquation.

Par généralisation, quel que soit le nombre de branches, le modèle économique sans capital fixe (ou celui dans lequel sa production est endogène –paragraphe F), ni plus-value, conduit à une répartition unique des capitaux telle que les marchandises sont produites dans des quantités correspondant exactement à leur consommation (besoin social solvable).

C- Particularité des cas pour lesquels le capital fixe est nul

1. Capital fixe nul et profit uniforme non nul

Nous traitons ce cas particulier parce qu'il permet de répondre aux critiques qui ont été formulées à l'égard du rôle du capital fixe dans l'approche de V. Laure van Bambeke (10). Nous montrons que le problème de la transformation se résout de la même manière qu'il y ait ou non du capital fixe. Dans le cas d'un capital fixe nul et d'un profit uniforme nous faisons apparaître une propriété particulière : bien qu'il y ait une infinité de répartitions possibles des capitaux, la plus-value totale produite est invariante pour toutes les répartitions respectant les deux égalités fondamentales et un profit uniforme donné.

a) Le taux de profit est la valeur propre de la matrice des coefficients socio-techniques

Ce système sans capital fixe est fermé, c'est à dire que chaque marchandise est produite à partir de marchandises également produites par le système. Le système d'équations des prix (8b) s'écrit :

$$w_1 x_1 = (1+r)e_1 x_1 + (1+r)c_1 x_2 + (1+r)v_1 x_3$$

$$w_2 x_2 = (1+r)e_2 x_1 + (1+r)c_2 x_2 + (1+r)v_2 x_3$$

$$w_3 x_3 = (1+r)e_3 x_1 + (1+r)c_3 x_2 + (1+r)v_3 x_3$$

Quand son déterminant est nul, ce système d'équations homogènes admet une infinité de solutions. On distinguera la solution particulière $\mathbf{x}_u(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, le vecteur unitaire (ayant pour module l'unité) colinéaire à tous les vecteurs $q \cdot \mathbf{x}_u(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ (q réel > 0), qui sont également des solutions. Puisque tous les vecteurs $q \cdot \mathbf{x}_u(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, $\forall q > 0$, sont des solutions, nous avons à ce stade établi un système cohérent de prix relatifs, avec pour coefficients de transformation :

$$x_i = q \times x_i^*, \quad \forall i$$

Du système d'équations, nous déduisons que :

$$(1+r) = \frac{w_i x_i^*}{e_i x_1^* + c_i x_2^* + v_i x_3^*}, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

La valeur de r est donc déterminée de manière univoque et trouvée en même temps que le vecteur unitaire \mathbf{x}_u . En employant le langage des mathématiques, on dit que $\frac{1}{(1+r)}$ est une valeur propre de l'équation aux valeurs propres et \mathbf{x}_u le vecteur propre unitaire.

Le taux de profit r se calcule donc indépendamment des capitaux engagés. Autrement dit, quels que soient les mouvements de capitaux respectant les égalités fondamentales, r ne varie pas, c'est à dire $dr = 0$.

b) Démonstration de l'invariance du profit total

Remarque préliminaire :

On a trois quantités distinctes :

$$r_i = \frac{S_i}{K_{pi}} \quad pl_i = \frac{PL_i}{K_i} \quad s_i = \frac{S_i}{K_i}$$

La première formule r_i représente le taux de profit réel, celui apprécié en pratique par le capitaliste. L'expression du centre pl_i est le taux de profit en interne, inaccessible mais qui joue un rôle primordial derrière le rideau (dans les coulisses). La troisième expression s_i est un autre taux de profit qui est le profit par unité de capital en valeur. Alors que r_i et pl_i sont des rapports de quantités homogènes (en prix et en valeurs, respectivement), s_i est le rapport du profit en prix sur le capital engagé en valeur.

Le profit total S peut s'écrire sous la forme du produit scalaire :

$$S = \mathbf{r} \cdot \mathbf{K}_p = \sum_i r_i \cdot K_{pi} \quad (10)$$

Nous utilisons les caractères gras pour la notation vectorielle.

La variation de la masse de profit peut s'écrire :

$$dS = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_p \cdot d\mathbf{r} \quad (11)$$

Dans l'espace des capitaux K_p , le vecteur $d\mathbf{K}_p$ appartient au plan défini par l'équation $\sum_i K_{pi} = K_T$ (K_T désignant le capital total engagé). Le profit \mathbf{r} étant uniforme, ses composantes sont identiques et son vecteur est perpendiculaire au plan des K_p . Le produit scalaire du premier membre ci-dessus est donc nul. Donc :

$$dS = \mathbf{K}_p \cdot d\mathbf{r}$$

Nous en déduisons que le profit total est invariant pour toutes les répartitions respectant les deux égalités fondamentales et un profit uniforme donné.

Selon notre hypothèse initiale, la somme des profits est égale à la somme des plus-values donc l'invariabilité de l'une entraîne l'invariabilité de l'autre et la plus-value totale PL reste constante.

$$dPL = \mathbf{pl} \cdot d\mathbf{K} = \sum_i pl_i dK_i = 0$$

On en déduit que les seuls déplacements de capitaux autorisés se situent dans le plan défini par l'égalité de la somme des capitaux et perpendiculaire au vecteur $\mathbf{pl} (pl_1, pl_2, pl_3)$ de l'espace des K .

c) Détermination des taux de profit à partir des montants de capitaux engagé

De façon générale, le taux de profit moyen est calculé à partir des capitaux engagés dans chaque branche.

Taux de profit en interne (en valeur) :

$$r_v = \frac{\sum_i K_i [w_i - (e_i + c_i + v_i)]}{K_T} = \frac{\sum_i K_i [w_i - 1]}{K_T}$$

Le taux de profit (en prix) est :

$$r = \frac{q^* \sum_i K_i [w_i x_i^* - (e_i x_1^* + c_i x_2^* + v_i x_3^*)]}{K_T}$$

Avec des répartitions aléatoires des capitaux, non seulement ces deux taux de profit moyens (en valeur et en prix) ne coïncident pas mais ils varient généralement d'une répartition à l'autre.

IN

	F/n	E	C	V	Pl	W	K
Branche I E	0.00000000	19.40180700	38.80346699	24.9451700	24.945170000	108.09561400	83.15044400
Branche II C	0.00000000	19.94996400	39.89988499	47.8799929	47.879992999	155.60983499	107.7298419
Branche III V	0.00000000	116.3555819	232.7111639	214.199999	214.199999999	777.46674600	563.2667460
TOTAL	0.00000000	155.707353	311.414515	287.02516	287.0251630	1041.172195	754.1470320

Tableau 5. Si le capital total K_T est distribué de manière quelconque entre les branches sans respecter les égalités fondamentales, comme dans ce tableau qui contient les valeurs brutes à partir desquelles sont tirées les valeurs par unité de valeur de capitaux, alors le taux de profit en interne (calculé comme le rapport de la plus-value totale sur le capital) ainsi que la production totale changent d'une distribution à l'autre, même pour le système sans capital fixe.

La satisfaction de l'égalité fondamentale II fixe la valeur de q^* :

$$q^* = \frac{\sum_i K_i w_i}{\sum_i K_i w_i x_i^*}$$

Pour ces valeurs q^* , correspondant à des distributions de capitaux satisfaisant les égalités fondamentales, en rappelant que $K_T = q^* \sum_i K_i (e_i x_1^* + c_i x_2^* + v_i x_3^*)$, il peut être vérifié que :

$$r_v = r.$$

d) Répartitions possibles des capitaux qui respectent les deux égalités fondamentales

Pour rappel, l'égalité fondamentale II pour la solution $q \mathbf{x}_u$:

$$K_1 w_1 (1 - q x_1^*) + K_2 w_1 (1 - q x_2^*) + K_3 w_1 (1 - q x_3^*) = 0$$

Par approximation linéaire et encadrement successifs (pour K_3 fixé), le couple (K_1, K_2) est solution du système à d'équations :

$$K_1 w_1 (1 - q x_1^*) + K_2 w_1 (1 - q x_2^*) + K_3 w_1 (1 - q x_3^*) = 0$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = K_T$$

Comme dans la situation avec capital fixe, la solution doit vérifier également l'égalité fondamentale I qui correspond à l'annulation de la variable z :

$$z = K_1 [q x_1^* (w_1 - e_1) - q x_2^* c_1 - q x_3^* v_1 - p l_1] + K_2 [q x_2^* (w_2 - c_2) - q x_1^* e_2 - q x_3^* v_2 - p l_2] + K_3 [q x_3^* (w_3 - v_3) - q x_1^* e_3 - q x_2^* v_3 - p l_3]$$

Après encadrement avec l'obtention d'un couple de valeurs (z_1, z_2) tel que $z_1 < 0$ et $z_2 > 0$, on calcule par interpolation la valeur particulière q^* qui annule la variable z . Une méthode somme toute très

semblable à celle utilisée avec capital fixe si ce n'est qu'ici seul le module q^* du vecteur de transformation des prix est à chercher.

Pour toutes les répartitions possibles (une infinité dès qu'il y a trois branches ou plus) qui respectent les deux égalités fondamentales, les taux de profit moyen en valeur (en interne) et en prix sont égaux et ne varient pas. Leur valeur est celle calculée à partir de la valeur propre de la matrice des coefficients socio-techniques (voir ci-après).

Les tableaux 6A (valeur) 6B (prix) ainsi que 7A (valeur) 7B (prix) sont construits à partir de la répartition quelconque du tableau 5 et correspondent à un choix respectif du capital de la branche 3 de 230 et 300 unités monétaires.

Valeurs apres transfert

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche I E	0.00000000	44.98323644	89.96613207	57.8355655	57.835565539	250.62049960	192.7849340
Branche II C	0.00000000	61.36333073	122.7265292	147.272237	147.27223799	478.63433592	331.3620979
Branche III V	0.00000000	47.51174119	95.02348239	87.4647764	87.464776413	317.46477641	230.0000000
TOTAL	0.00000000	153.858308	307.716143	292.57257	292.5725799	1046.719611	754.1470319

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche I E	0.00000000	47.98869505	86.49127260	58.1529478	74.7322560	267.3651715	192.632911
Branche II C	0.00000000	65.46319026	117.9863294	148.080418	128.617584	460.1475229	331.529934
Branche III V	0.00000000	50.68613643	91.35328739	87.9447539	89.2227395	319.2069174	229.984177
TOTAL	0.00000000	164.138021	295.830889	294.17812	292.572579	1046.7196119	754.147031

Tableaux 6A-6B

K1,K2,K3	r en prix	x1,x2,x3
192.7849340615	0.38795164275602007	1.066812858
331.3620979385	0.3879516427560189	0.9613759157
230	0.38795164275601934	1.005487667

Tableaux 6C

Valeurs apres transfert

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche I E	0.00000000	37.72783070	75.45537556	48.5071906	48.507190632	210.19758754	161.6903969
Branche II C	0.00000000	54.15861782	108.3171189	129.980898	129.98089833	422.43753342	292.4566350
Branche III V	0.00000000	61.97183634	123.9436726	114.084490	114.08449097	414.08449097	300.0000000
TOTAL	0.00000000	153.858284	307.716167	292.57257	292.5725799	1046.719611	754.1470319

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche I E	0.00000000	40.24853505	72.54098101	48.7733821	62.6785917	224.2414899	161.562891
Branche II C	0.00000000	57.77711008	104.1334697	130.694190	113.516501	406.1212718	292.604770
Branche III V	0.00000000	66.11235208	119.1564622	114.710549	116.377486	416.3568501	299.979363
TOTAL	0.00000000	164.137997	295.830912	294.17812	292.572579	1046.7196119	754.147031

Tableaux 7A-7B

K1, K2, K3 2	r en prix 2	x1, x2, x3 2
161.690396910202	0.38795164275602029	1.066812862
292.456635089798	0.38795164275601918	0.9613759189
300	0.3879516427560194	1.00548767

Tableaux 7C

e) Matrice des coefficients sociotechniques

Les coefficients sociotechniques de chaque branche i sont tels que:

$$\mathbf{e}_i + \mathbf{c}_i + \mathbf{v}_i + \mathbf{pl}_i = \mathbf{1} + \mathbf{pl}_i = \mathbf{w}_i$$

Le degré d'exploitation de la branche i , $\frac{\mathbf{pl}_i}{\mathbf{v}_i}$ est contenu dans \mathbf{w}_i , la production par unité de capital engagé en valeur de la branche i . En prix nous avons :

$$(\mathbf{e}_i x_1 + \mathbf{c}_i x_2 + \mathbf{v}_i x_3)(\mathbf{1} + r) = \mathbf{w}_i x_i$$

Ce qui se traduit (pour 3 branches) par l'équation aux valeurs propres :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1/w_1 & \mathbf{c}_1/w_1 & \mathbf{v}_1/w_1 \\ \mathbf{e}_2/w_2 & \mathbf{c}_2/w_2 & \mathbf{v}_2/w_2 \\ \mathbf{e}_3/w_3 & \mathbf{c}_3/w_3 & \mathbf{v}_3/w_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+r)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matrice ci-dessus (que nous appellerons matrice des coefficients socio-techniques) tient compte des besoins en constituants de chaque marchandise qui rentre dans la composition d'une marchandise donnée. Elle ignore les conditions de la satisfaction du besoin social mais elle nous dit quel profit sera réalisé pour chaque unité produite et vendue, c'est un profit par unité de capital, donc un taux de profit potentiel. Parce qu'elle ne se préoccupe pas des montants de capitaux elle fournit la valeur potentielle du taux de profit qui est aussi le taux de profit exact. Nous avons montré que toutes les configurations de capitaux respectant les égalités de Marx et seules ces répartitions conduisaient au même taux de profit. Ce fait prouve d'une autre façon le caractère fondamentale de ces égalités. Si cela n'avait été le cas il y aurait eu effectivement une incohérence. Pour cette raison l'invariabilité de la masse de profit quand il n'y a pas de capital fixe est un résultat important.

Seul le respect des deux égalités fondamentales permettra de connaître la répartition adéquate des capitaux rendant ce taux de profit effectif.

Cette matrice ne contient aucune information sur le montant des capitaux engagés. L'exposé ci-avant a démontré l'équivalence, quand les égalités fondamentales sont respectées, entre ce taux de profit avec celui calculé par le rapport du profit sur le capital total ; on ne s'étonnera donc pas que la valeur propre de la matrice soit indépendante des capitaux engagés.

Cette matrice contient des proportions c'est-à-dire des quantités par unité de valeurs produites de chaque marchandise utilisée dans la fabrication d'une autre marchandise. Le taux de profit calculé à partir de la matrice est donc un profit par unité de valeur produite. C'est donc le profit authentique réalisé à chaque fois qu'une unité de valeur est produite et achetée. Elle ne nous dit pas combien de valeur sera effectivement produite et réalisée. Pour un capital égal à K_T le profit est le produit $r \cdot K_T$ mais la matrice ne connaît rien sur K_T et sur sa distribution dans les différentes branches. La matrice contient toute l'information sur les quantités potentielles de valeurs par unité de valeur

produite des marchandises entrant dans la composition des marchandises. Le taux de profit inhérent à la matrice suppose implicitement qu'aucune valeur n'est perdue en cours de route dans le cas où par exemple une marchandise aurait été produite en excès par rapport aux besoins. La matrice ne nous dit rien sur ces besoins mais suppose implicitement qu'ils sont remplis et elle nous procure par conséquent le taux de profit optimal qui est aussi le seul possible dans un système à profit uniforme sans capital fixe et pour un taux d'exploitation uniforme.

f) Valeurs permises des transferts de capitaux entre les branches dans le cas d'un système fermé (sans capital fixe) et à taux de profit uniforme, un exemple

Nous avons vu que le profit total et donc la plus-value totale (l'égalité fondamentale I) sont constants pour toutes les répartitions permises des capitaux. Cela se traduit par :

$$\Delta PL = \mathbf{pl} \cdot \Delta \mathbf{K} = \sum_i pl_i \Delta K_i = 0$$

Les vecteurs déplacement $\Delta \mathbf{K}$ possibles appartiennent au plan $\sum_i K_i = K_T$ et sont orthogonaux au vecteur \mathbf{pl} .

Considérons le cas pour lequel seule la branche 1 produit de la plus-value. Pour que PL reste inchangé, il faut que K_1 reste inchangé. Seuls les déplacements $\Delta \mathbf{K}$ orthogonaux à l'axe des K_1 sont donc autorisés. Autrement dit, dans ce cas, seuls les transferts entre les branches 2 et 3 sont possibles et il n'y a qu'une solution pour K_1 . Ce cas est illustré par les tableaux 8.

Remarquons que la valeur du montant de capital de la branche 1 (121.90 um ; tableau 8B) est inférieure à celle trouvée quand il n'y avait pas de plus-value du tout (153.33 um ; tableau 4B). Cet exemple illustre qu'avec une plus-value produite, la branche 1 permet de satisfaire les besoins sociaux solvables avec un capital engagé moindre.

Valeurs après transfert

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche I E	0.00000000	28.66090531	57.32159348	36.8497200	36.849720005	159.68193881	122.8322188
Branche II C	0.00000000	61.35457430	122.7090163	147.251222	0.0000000000	331.31481318	331.3148131
Branche III V	0.00000000	61.97183634	123.9436726	114.084490	0.0000000000	300.00000000	300.0000000
TOTAL	0.00000000	151.987315	303.974282	298.18543	36.84972000	790.9967520	754.1470319

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche I E	0.00000000	22.95038930	60.35473263	38.6043009	5.95683323	127.8662561	121.90942
Branche II C	0.00000000	49.13003795	129.2020933	154.262515	16.2514988	348.8461459	332.59464
Branche III V	0.00000000	49.62431417	130.5020808	119.516566	14.6413879	314.2843498	299.64296
TOTAL	0.00000000	121.704741	320.058906	312.38338	36.8497200	790.99675200	754.147031

K1, K2, K3	r en prix 3	x1, x2, x3
122.832218811826	0.048862779328106044	0.8007559096
331.314813188174	0.048862779328107064	1.052914425
300	0.048862779328106419	1.0476145

Tableaux 8 A, B, C. La seule valeur permise pour le capital de la branche 1 est : 122.832218811826 quels que soient les valeurs possibles pour les branches 2 et 3.

2. Capital fixe nul et taux de profit différents selon les branches

Au contraire de la situation précédente, quand les taux de profit ne sont plus identiques dans toutes les branches, le profit total ainsi que la production totale changent avec la répartition. Considérons l'égalité suivante :

$$PL = \sum_i K_i pl_i = K_1 pl_1 + K_2 pl_2 + K_3 pl_3 = K_T \cdot r$$

Dans cette équation, nous ne pouvons pas simplement remplacer r par sa valeur moyenne $\langle r \rangle$ si les montants de capitaux qui permettent de calculer cette valeur moyenne de r ne sont pas connus. Le taux de profit moyen $\langle r \rangle$ qui va dépendre de la répartition des capitaux ne peut plus alors être obtenu au moyen de la valeur propre d'une matrice et ceci bien que nous ayons affaire à une équation sans second membre^{4,*}

Il est à noter que dans cette configuration des taux de profits différents, la valeur particulière q^* qui annule la variable z , donc le module du vecteur des prix change avec les répartitions et l'ensemble des solutions est un segment incurvé quand il y a trois branches comme dans le cas avec capital fixe.

L'idée de taux de profits différents selon les branches se conçoit très bien, en imaginant par exemple une situation de monopole pour l'une des branches, même si cette situation présente un caractère artificiel sans capital fixe sa considération revêt toutefois un intérêt théorique qui permet d'examiner la cohérence des concepts. Une situation de monopole conduit, y compris quand le taux d'exploitation reste semblable dans toutes les branches, à une répartition inégale entre les capitalistes. Dans ce cas les différents taux de profits r_i sont, en l'absence de capitaux fixes, toujours déterminés indépendamment des capitaux engagés (l'équation 3 s'applique toujours à condition d'ajouter l'indice petit i au taux de profit concernant la branche i) tandis que le taux de profit moyen $\langle r \rangle$ varie bien évidemment selon la répartition des capitaux selon les N branches.

$$\langle r \rangle = \frac{1}{K_T} \sum_i^N K_i r_i$$

Quand les taux de profits diffèrent selon les branches alors le vecteur \mathbf{r} n'est plus perpendiculaire au déplacement des capitaux $d\mathbf{K}_{pi}$, le produit scalaire, premier membre de **l'équation 2** ne s'annule plus, d'autre part le module r ne peut plus être mis en facteur dans la somme de **l'équation 1**) et la masse totale des plus-values n'est par conséquent plus une quantité conservée avec la répartition des capitaux et ceci même quand il n'y a pas de capital fixe.

⁴Laure Van Bambeke semble croire qu'en l'absence de second membre le taux de profit est forcément déterminé par la valeur propre.

3. Différence avec le cas où il y a amortissement d'un capital fixe

Nous avons donc démontré que dans un système sans capital fixe, si l'on impose la condition d'égalité des taux de profit, la somme de profit ou de plus-value est constante (quels que soient les déplacements des capitaux respectant les égalités fondamentales de Marx). Dans un système avec capital fixe, il en va tout autrement.

Dans ce cas l'expression du profit de la branche i contient un terme d_i d'amortissement de ce capital fixe.

$$S_i = K_{ip}r_i = K_i s_i = K_i(w_i x_i - e_i x_1 - c_i x_2 - v_i x_3 - d_i)$$

Le changement de prix, fonction de la répartition, n'affectant pas le coefficient supplémentaire, la production et les coûts d'une branche ne varient plus proportionnellement l'une à l'autre. Le changement avec la répartition du vecteur des prix x n'est plus un changement du module seul, le rapport des prix des marchandises change et la production totale ainsi que le taux de profit peuvent varier avec la répartition des capitaux. Le taux de profit ne peut plus dans ce cas être extrait du calcul de la valeur propre d'une matrice.

Plusieurs remarques :

* Dans le cas général même quand les taux de profit r_i des branches sont identiques, les taux s_i ne le sont pas car :

$$r_i = \frac{S_i}{K_{pi}} \neq s_i = \frac{S_i}{K_i}$$

Dans une situation de monopole une branche peut effectivement bénéficier d'un taux de profit supérieur à celui des autres branches. Mais une opération « marketing » avisée peut aussi conférer à une marchandise un caractère unique qui met l'entreprise qui l'a produite en situation de monopole pour cet article. Ainsi la société qui fabrique les chaussures de sports **Nike peut réaliser un surprofit car elle est seule à pouvoir faire, non pas des chaussures de sport mais des chaussures de sport avec le logo Nike recherché⁵.

L'argument qu'une marchandise puisse être vendue à un prix ayant plus à voir au désir exprimé pour elle qu'à la quantité de travail qu'elle contient ou bien au montant de capital investi par le capitaliste, a souvent été employé pour contester la pertinence du concept de valeur objective dans la théorie marxiste. Le désir subjectif rencontre la réalité objective des possibilités de la production.

Ce surprofit n'est cependant en dernière analyse réalisable que parce que s'effectue un transfert de la plus-value réellement produite par l'ensemble des salariés de tous les secteurs. Ce surprofit bénéficie également à l'ensemble de la branche en tirant les prix vers le haut.

Dans le cadre de la théorie marxiste une marchandise non désirable n'a pas de valeur quelle que soit le temps passé à la fabriquer. Si la marchandise est désirée, sa valeur n'est non plus simplement une substance contenue en elle. La valeur, tout objective qu'elle soit, naît d'interactions complexes qui

⁵ Réponse à Frédéric Lordon 13. F. Lordon, *La condition anarchique, affects et institutions de la valeur* (Le Seuil, Paris, 2018)..

font intervenir l'ensemble du champ social de la production à la consommation. Le nombre d'heures socialement nécessaires et les efforts qui sont mis en œuvre pour produire la marchandise demeurent incontournables pour comprendre la dynamique du capitalisme mais ils résultent de rapports de force qui fluctuent sans arrêt selon l'époque et le lieu. Si la valeur se déplace avec la marchandise elle n'est cependant pas une substance contenue en elle⁶. Ces considérations qui confèrent à la marchandise un rapport social et relationnel, différencient nettement le concept de valeur dans le Marxisme d'avec sa vision ricardienne classique étaient assez justement énoncées par Marx lui-même et d'autres auteurs (15).

4. Conclusion

Le traitement du cas sans capital fixe à taux de profit uniforme, pour lequel le calcul exact du taux de profit sans avoir à se préoccuper des montants de capitaux alloués aux différents secteurs a pu induire en erreur des théories économique sur le fait la répartition des capitaux entre branches ne serait pas fondamentale (11, 16, 17). Mais cela n'empêche pas de traiter ce cas pour le problème de la transformation.

Nous avons montré qu'avec une répartition aléatoire (tableau 5) le taux de profit en valeur ne correspondait pas avec celui obtenu à partir de la valeur propre de la matrice. La coïncidence de ces deux taux survient quand les égalités fondamentales sont respectées, et donc quand le besoin social solvable est satisfait. Dans ce cas, nous avons démontré une invariance du profit total. Cette invariance est un point important qui explique pourquoi il est possible de déterminer le taux de profit par la méthode matricielle (indépendante de l'allocation des capitaux) (17). Quand le taux de profit n'est pas uniforme alors les taux de profit ne peuvent plus être déterminés par une valeur propre et les montants de capitaux deviennent indispensables à son calcul.

Les systèmes considérés dans ce chapitre ont la particularité d'être des systèmes fermés. Pour de tels systèmes, quand il y a plus-value dans au moins une branche, la réalisation d'un taux de profit uniforme r^* est conditionnée à une répartition des capitaux telle que toutes les marchandises produites sont réabsorbées par le marché. Par généralisation, la répartition des capitaux entre branches est contrainte par l'adéquation entre production et besoins solvables qu'expriment les équations fondamentales. La question de la transformation des valeurs en prix de production de marché est donc implicitement liée à la considération d'un mouvement de capitaux entre branches.

⁶ On sait aujourd'hui que la masse des particules élémentaires naît aussi d'une interaction avec un champ scalaire que l'on appelle Champ de Higgs 14. B. Pire (Champ de Higgs et masse des particules. (<https://www.universalis.fr/encyclopedie/boson-de-higgs/3-champ-de-higgs-et-masse-des-particules/>)).

D- Critère de Convergence dans un processus « réel »

Dans ce qui précède, nous avons utilisé une voie algorithmiquement directe pour déterminer la distribution des capitaux correspondant à l'état final du système. Connaissant le point d'arrivée du processus (par exemple, un taux de profit uniforme) et le montant des capitaux initiaux engagés dans chaque branche, nous en avons déduit les transferts de capitaux effectués. Dans ce que nous appellerons ici (par abus de langage) « processus réel », les taux de profits des différentes branches atteignent progressivement leurs valeurs d'équilibre par le biais d'échanges successifs de capitaux qui se transfèrent systématiquement vers les branches les plus profitables. Dans une simulation, on pourrait atteindre la convergence vers un taux de profit uniforme par un processus de transferts successifs ajustés en fonction d'un gradient du taux de profit entre branches.

Afin de simuler ce « processus réel » de convergence, nous avons imposé des taux de profit différents entre branches et nous avons suivi les mouvements de capitaux amenant, pas à pas, un taux de profit intermédiaire entre celui de la branche la plus rentable et celui de la branche la moins rentable. La figure 3 représente un exemple d'une telle convergence où les branches à taux de profit élevés attirent les capitaux.

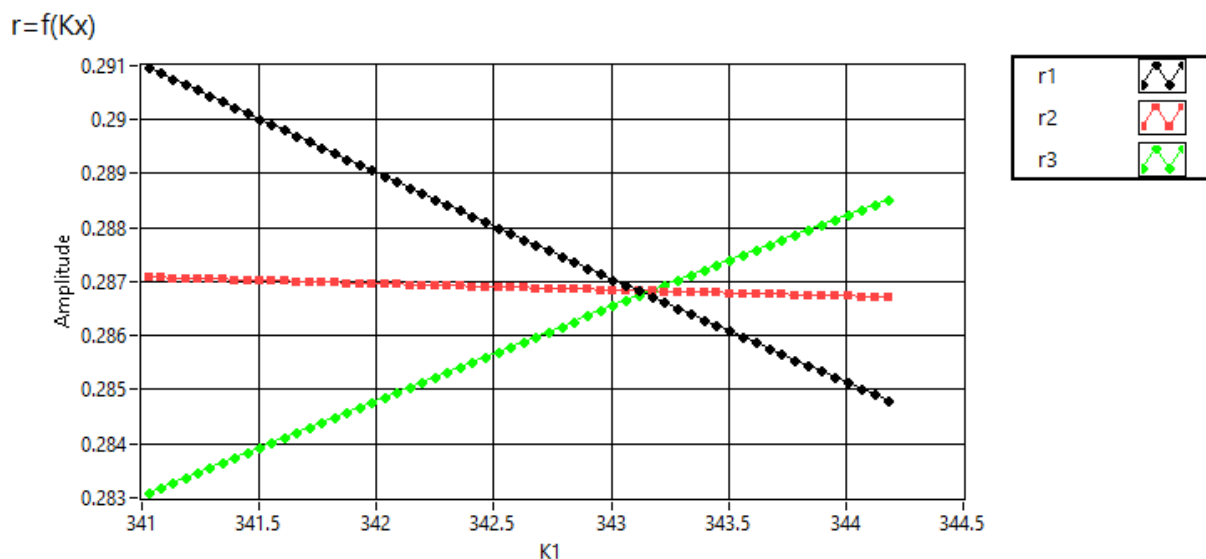


Fig. 3. Les taux de profit (ordonnée) des trois branches sont représentés en fonction du capital K_1 engagé dans la branche 1. Le capital K_2 est maintenu fixe et les transferts n'ont lieu qu'entre 1 et 3 dans un sens ou dans l'autre. Pour chaque valeur de r_1 , r_2 , r_3 la répartition des capitaux est calculée selon notre algorithme de manière à ce que les deux égalités fondamentales (en plus des 3 égalités de branches) soient respectées.

Cependant, dans d'autres cas, comme celui illustré par la figure 4, la convergence nécessite à un transfert vers la branche la moins profitable. En effet, que l'on soit d'un côté ou de l'autre du point d'intersection, le transfert vers la branche la plus rentable conduit à un éloignement du point d'intersection. Dans ce cas, ce dernier n'est donc pas un point d'équilibre.

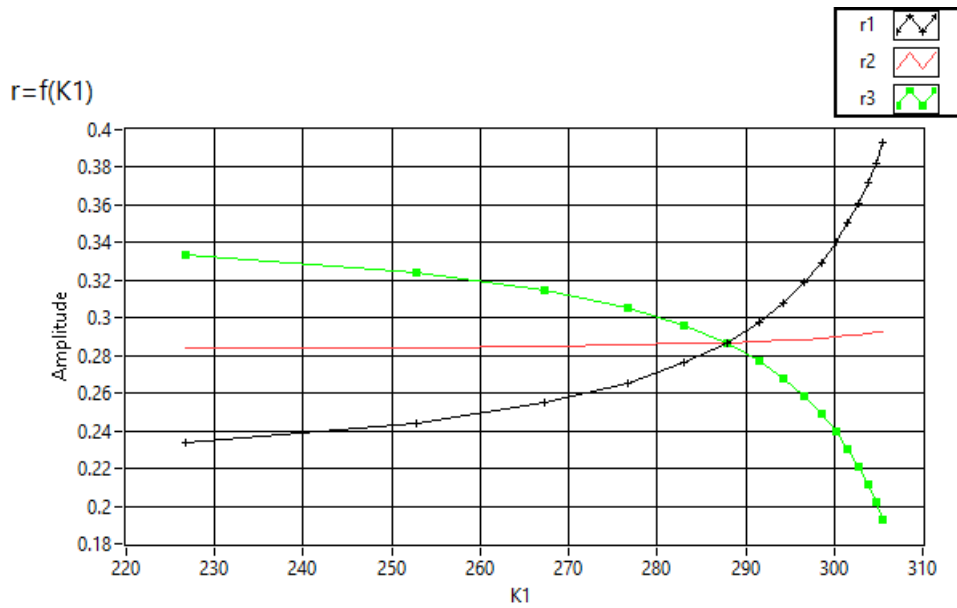


Figure 4 : Trajectoire divergente d'égalisation des taux de profit quand le transfert de capital se fait vers la branche la moins rentable. Le capital de la branche intermédiaire (tracé rouge) a été maintenu constant.

Les exemples des figures 3 et 4 illustre cette évidence : si l'indice i désigne la branche la plus rentable, et K_i le montant du capital engagé dans cette branche, la convergence n'est possible qu'à condition que :

$$\frac{dr_i}{dK_i} < 0$$

Le signe de la variation de r étant identique à celui de s , nous pouvons rechercher la condition :

$$\frac{ds_i}{dK_i} < 0$$

Rappelons que S_i est le profit réalisé dans cette branche et que

$$s_i = \frac{S_i}{K_i} = \mathbf{w}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{d}_i - (\mathbf{e}_i \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_i \mathbf{x}_2 + \mathbf{v}_i \mathbf{x}_3)$$

On en déduit :

$$\frac{ds_i}{dK_i} = \frac{dS_i}{dK_i} \frac{K_i}{K_i^2} - \frac{S_i}{K_i^2} = \frac{1}{K_i} \frac{dS_i}{dK_i} - \frac{S_i}{K_i^2}$$

La condition s'écrit alors :

$$\frac{1}{K_i} \frac{dS_i}{dK_i} < \frac{S_i}{K_i^2}$$

Soit

$$\frac{dS_i}{dK_i} < \frac{S_i}{K_i}$$

Conclusion

Une convergence vers un taux de profit uniforme n'est possible que si, pour la branche économique la plus rentable, le taux d'accroissement du profit associé à l'augmentation de capital (en valeur) est inférieur au rapport du profit sur le capital engagé (en valeur). Autrement dit, dans la branche la plus rentable, plus le capital engagé est important plus il doit être difficile d'augmenter le profit de cette branche. Il faut des apports de capitaux de plus en plus grands pour augmenter le profit dans les mêmes proportions qu'auparavant.

Cette condition de convergence semble une condition « naturellement » respectée conforme aux limites généralement imposées par la nature. On y voit un rapport direct avec la loi générale des rendements décroissants. Il semblerait que le non-respect de la condition établie ci-dessus, par exemple dans le secteur informationnel doive conduire à un phénomène de bulle spéculative.

E- Invalidité des conséquences attribuées au Théorème d'Okishio

Le théorème d'Okishio (18) énonce que l'augmentation des profits d'un capitaliste par une réduction de ses coûts augmente le taux de profit général dans la société. Ce théorème a été employé comme argument invalidant la baisse tendancielle du taux de profit moyen (BTTPM) prédite par Marx (19-21). Nous montrons ici que cette interprétation du théorème est une erreur. Au contraire, non seulement le théorème d'Okishio n'est pas un obstacle à la BTTPM, mais il en est l'un des mécanismes, dès lors que la mobilité des capitaux et les répartitions possibles qui en résultent sont prises en compte.

1. Le théorème d'Okishio n'empêche pas la BTTPM

Dans ce paragraphe, partant d'un modèle à trois branches avec des taux de profits différents pour chaque branche, nous présentons des simulations sur le mode du chapitre précédent montrant une convergence vers un taux de profit uniforme qui s'accompagne d'une BTTPM.

Nous notons la composition organique globale CO calculée comme suit : $CO = \frac{F+E+C}{V}$

F, E, C, V , désignent $\sum_i F_i, \sum_i, \sum_i, C_i, \sum_i V_i$ respectivement.

La composition organique en prix est : $COp = \frac{F+x_1E+x_2C}{x_3V}$

Les coûts sont : $D + x_1E + x_2C + x_3V$

Avec $D = F/n$: $D = F/n$
 n étant le nombre de cycles pour l'amortissement du capital fixe (égale à 10 dans les exemples qui suivent).

a) Cas avec capital fixe nul $F=0$:

Les paramètres de cette simulation sont détaillés dans l'Annexe

Valeurs apres transfert

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche I E	0.00000000	54.32456191	108.6487122	69.8458361	69.845836125	302.66494641	232.8191102
Branche II C	0.00000000	71.29627220	142.5923907	171.111337	171.11133705	556.11133705	385.0000000
Branche III V	0.00000000	28.16163884	56.32327768	51.8430051	51.843005180	188.17092689	136.3279217
TOTAL	0.00000000	153.782472	307.564380	292.80017	292.8001783	1046.947210	754.1470319

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche I E	0.00000000	58.00818831	104.4593118	70.1873775	90.5330982	323.1879758	232.654871
Branche II C	0.00000000	76.13071211	137.0941513	171.948059	149.495241	534.6681645	385.172921
Branche III V	0.00000000	30.07121625	54.15150078	52.0965139	52.7718389	189.0910699	136.319230
TOTAL	0.00000000	164.210116	295.704963	294.23195	292.800178	1046.9472103	754.1470319

Tableaux 9A et 9B

Nous prenons pour point de départ la répartition les tableaux 9 A-B (en valeur et prix) ci-dessus et en imposant un taux de profit supérieur pour la branche 1 (E), intermédiaire pour la branche é (C) et inférieur pour la branche 3 (V), nous appliquons le processus de transfert de capitaux décrit au chapitre V pour aboutir à l'égalisation des taux de profits.

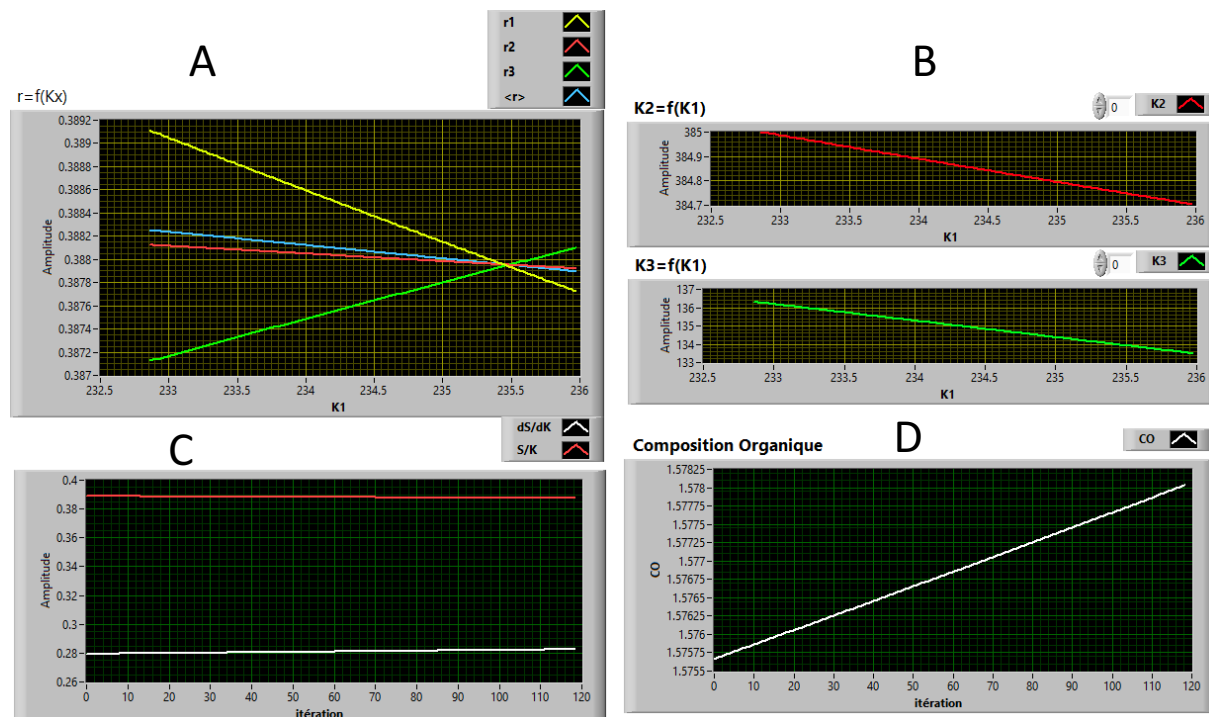


Figure 4 : A - convergence vers le même taux de profit quand le transfert des capitaux se fait vers la branche la plus rentable. Le taux de profit moyen général (tracé bleu) baisse au fur et à mesure que la convergence se réalise. B – Evolution des capitaux en fonction de K1 le capital de la branche E. C – ds/dk (tracé blanc) et S/K(tracé rouge) montrant le respect du critère de convergence. D-La composition Organique du capital total augmente.

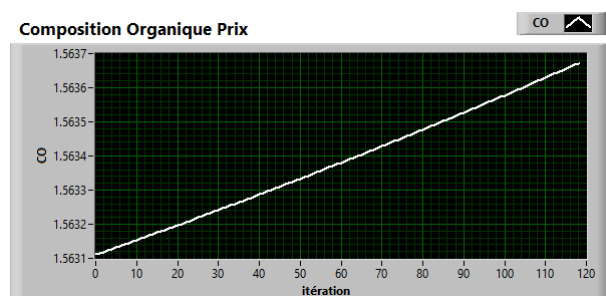


Figure 5 : La composition organique calculée en prix évolue ici dans le même sens que la composition organique en valeur.

Le total des coûts en l'absence de capital fixe étant constant et égal au capital engagé, il n'est pas représenté sur la figure 4.

Conclusion

Sans capital fixe, on observe une BTPM.

b) Cas avec Capital fixe non nul

Valeurs apres transfert

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche I E	32.0360680	33.93699782	67.87373852	43.6332646	43.633264676	221.11333370	465.8046810
Branche II C	3.84999350	64.16665701	128.3331757	154.000232	154.00023222	504.35029069	385.000000
Branche III V	5.26080158	40.60972813	81.21945626	74.7588007	74.758800709	276.60758740	249.1960009
TOTAL	41.1468630	138.713382	277.426370	272.39229	272.3922976	1002.071211	1100.000682

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche I E	32.0360680	45.20922369	59.74700339	41.5738035	115.990367	294.5564665	466.890710
Branche II C	3.84999350	85.47971054	112.9674429	146.731523	94.9341813	443.9628520	383.67861
Branche III V	5.26080158	54.09831160	71.49479659	71.2302350	61.4677483	263.5518932	249.43135
TOTAL	41.1468630	184.787245	244.209242	259.53556	272.392297	1002.0712118	1100.00068

Tableau 10A et 10B

Valeurs et prix au départ de la simulation

Valeurs apres transfert

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche I E	32.0736294	33.97678811	67.95331880	43.6844236	43.684423601	221.37258362	466.350825
Branche II C	3.84709350	64.11832369	128.2365091	153.884232	153.88423204	503.97039047	384.710000
Branche III V	5.25539409	40.56798605	81.13597211	74.6819573	74.681957364	276.32326700	248.939856
TOTAL	41.176117	138.663097	277.325800	272.25061	272.2506130	1001.666241	1100.00068

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche I E	32.0736294	45.19118931	59.82488554	41.6636157	115.685645	294.4389652	467.41598
Branche II C	3.84709350	85.28126009	112.8971273	146.765665	94.8953644	443.6865109	383.41498
Branche III V	5.25539409	53.95788242	71.43065756	71.2272273	61.6696034	263.5407648	249.16970
TOTAL	41.1761171	184.430331	244.152670	259.65650	272.250613	1001.6662411	1100.00068

Tableau 11 A et 11 B

Valeurs et prix à la fin de la simulation

Les tableaux 10 et 11 (en valeurs A et en prix B) correspondent respectivement au début et à la fin de la simulation.

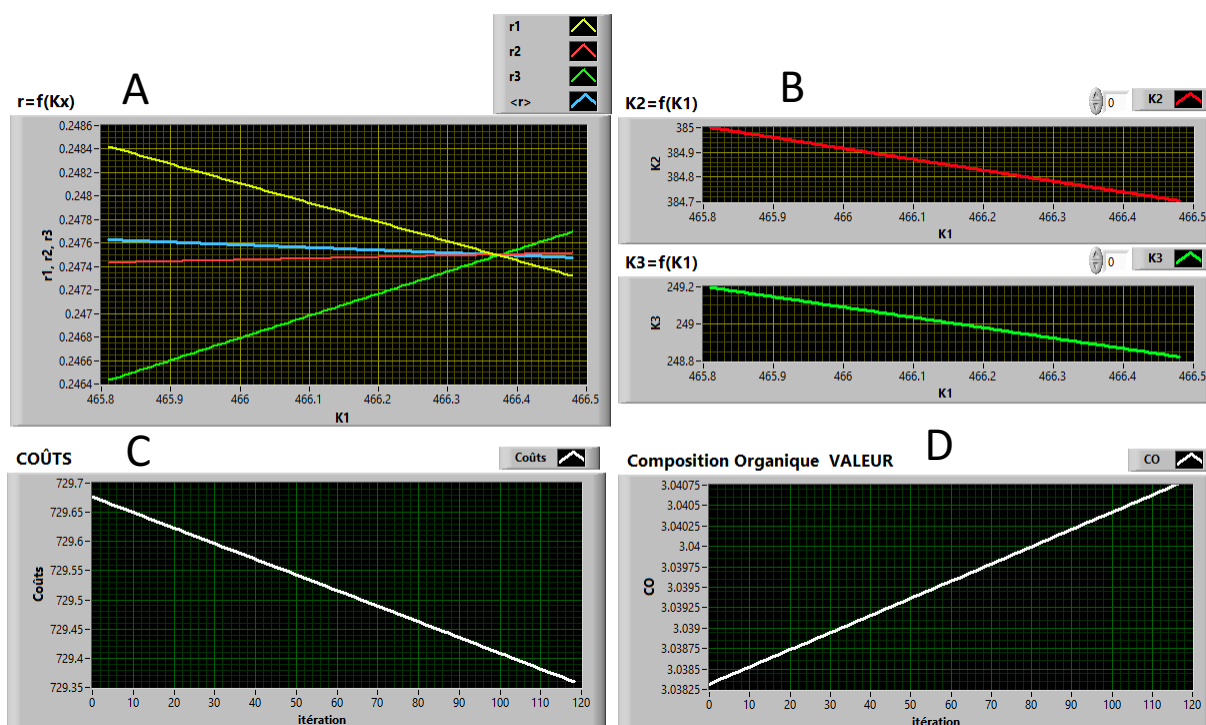


Figure 6 : **A** - convergence vers le même taux de profit quand le transfert des capitaux se fait vers la branche la plus rentable. Le taux de profit moyen général (tracé bleu) baisse au fur et à mesure que la convergence se réalise. **B** – Evolution des capitaux en fonction de K_1 le capital de la branche E. **C** - Les coûts de production (prix) diminuent. **D** -La composition Organique du capital total augmente.

Conclusion

Cet exemple montre que la BTPM se produit quand les capitaux se dirigent vers la branche la plus rentable (et aussi à composition organique plus grande) amenant ainsi à une égalisation des taux de profits. Bien que les coûts de production diminuent (avec capital fixe) ce phénomène se produit en même temps que la composition organique augmente. Mais la composition organique peut augmenter également s'il n'y a pas de capital fixe et la baisse du taux de profit moyen est aussi observée dans ce cas. Cependant il est intéressant de noter que la composition organique calculée en prix diminue (Figure 7). Cet exemple montre que c'est la composition organique en valeur qui gouverne de fait la baisse du taux de profit.

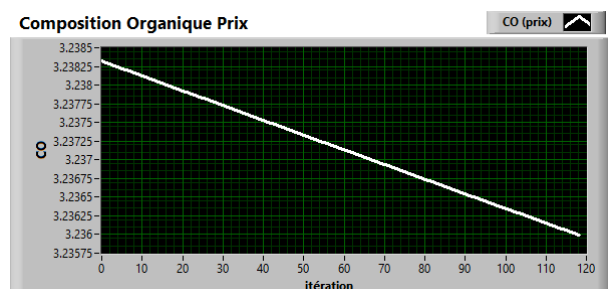


Figure 7 : La composition organique apparente, c'est-à-dire exprimée en prix diminue tandis que la composition organique en valeur de la figure 5 augmentait en même temps que la baisse du taux de profit.

2. Le théorème d'Okishio favorise la BTPM

Dans le paragraphe précédent nous partions directement d'une situation avec des taux de profit différents pour chaque branche. Nous nous intéressons ici à la genèse d'un taux de profit supérieur susceptible d'apparaître dans un secteur. Nous partons des coefficients socio-techniques suivants (exemple avec cinq branches M, E, C, V et L) :

Sha

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche 0 M	10.00000000	30.00000000	60.00000000	40.00000000	40.00000000	180.00000000	230.00000000
Branche I E	15.00000000	20.00000000	50.00000000	30.00000000	30.00000000	145.00000000	250.00000000
Branche II C	5.00000000	35.00000000	65.00000000	79.99999999	79.99999999	265.00000000	230.00000000
Branche III V	3.00000000	32.00000000	70.00000000	60.00000000	60.00000000	225.00000000	192.00000000
Branche IV L	2.00000000	0.50000000	1.00000000	10.00000000	20.00000000	33.50000000	31.50000000
TOTAL	35.000000	117.500000	246.000000	220.000000	230.000000	844.700000	933.500000

Duree amortissement 10

Tableau 12 n=10

Tableau 12 : Voici une répartition quelconque entre cinq branches (M, E, C, V, L). Nous convenons que ces nombres reflètent les coefficients socio-techniques de production. Nous nous intéressons (par exemple) à la branche E de l'énergie. Son capital est de $(150+20+50+30)=250$ um. Nous en déduisons que pour cette branche : $f/n=15/250=0,06$ et que $v=30/150=0,2$.

Tableau 13 : Imaginons que des capitalistes de cette branche trouvent à utiliser une amélioration technique qui permette d'économiser les coûts de production, notamment la main-d'œuvre au prix d'une augmentation de la proportion du capital fixe en valeur qui passe de 150 um à 152 um (pour 250 um) au détriment de la force de travail qui passe de 30 à 28 um (pour 250). On suppose le capital investi dans cette branche constant. Les nouveaux coefficients socio-techniques deviennent : $f'/n=152/250=0,0608$ et $v'=28/250=0,112$.

Sha

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche 0 M	10.00000000	30.00000000	60.00000000	40.00000000	40.00000000	180.00000000	230.00000000
Branche I E	15.19999999	20.00000000	50.00000000	28.00000000	30.00000000	143.19999999	250.00000000
Branche II C	5.00000000	35.00000000	65.00000000	79.99999999	79.99999999	265.00000000	230.00000000
Branche III V	3.00000000	32.00000000	70.00000000	60.00000000	60.00000000	225.00000000	192.00000000
Branche IV L	2.00000000	0.50000000	1.00000000	10.00000000	20.00000000	33.50000000	31.50000000
TOTAL	35.200000	117.500000	246.000000	218.000000	230.000000	848.499999	933.500000

Tableau 13

A partir de ces coefficients socio-techniques nous pouvons construire une répartition convenable, c'est à dire qui respecte les deux égalités de Marx. Nous choisissons de fixer le montant des capitaux des trois dernières branches à 242, 358 et 5 um, respectivement. En partant des coefficients socio-techniques du tableau 12 nous obtenons le résultat des tableaux 14. Le taux de profit est de $r=0,2614634020$. Cet équilibre est celui duquel nous partons. La valeur ainsi produite par la branche E est :

$$W_E = D_E + E_E + C_E + V_E + PL_E \quad (\text{E1})$$

Nous nous situons maintenant juste après que l'amélioration technique ait eu lieu, ce sont maintenant les coefficients socio-techniques du tableau 2 qui s'appliquent, les lettres primées indiquent les nouvelles valeurs, nous avons maintenant :

$$W'_E = D'_E + E_E + C_E + V'_E + PL'_E \text{ (E2)}$$

Le travail socialement nécessaire pour produire la marchandise E n'a pas encore changée et les deux quantités (E1) et (E2) sont égales et si $V'_E + D'_E < V_E + D_E$, une plus-value extra est réalisée grâce à la nouvelle technique.

Immédiatement après ce changement technique les montants de capitaux alloués aux différentes branches n'ont évidemment pas eu le temps de changer. Nous pouvons calculer :

$$D'_E = \frac{f'_E}{n} K_E = 0,0608 * 227,734 = 13,846$$

$$V'_E = v'_E K_E = 0,112 * 227,734 = 25,506$$

$$D_E = 13,664 < D'_E = \text{ et } V_E = 27,328 > V'_E \text{ (I1)}$$

Les productions en prix avant et après sont :

$$\begin{aligned} x_E W_E &= D_E + x_E E_E + x_C C_E + x_v V_E + S_E \\ x'_E W_E &= D'_E + x_E E_E + x_C C_E + x_v V'_E + S'_E \end{aligned}$$

Si l'on convient que les prix pour cette quantité n'ont pas changés :

$$x'_E W_E = x_E W_E$$

L'économie réalisée sur les coûts relativement au procédé de production standard encore en cours est la source du surprofit ($S'_E - S_E$) réalisé par les capitalistes modernisateurs. Son expression est :

$$S'_E - S_E = x_v (V_E - V'_E) - (D'_E - D_E)$$

VALEURS APRES TRANSFERT

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche 0 M	4.38110451	13.14331355	26.28662710	17.5244180	17.524418071	78.859881320	100.765403909
Branche I E	13.6640757	18.21876768	45.54691921	27.3281515	27.328151530	132.08606573	227.734596090
Branche II C	5.26086956	36.82608695	68.39130434	84.1739130	84.173913043	278.82608695	241.999999999
Branche III V	5.59375000	59.66666666	130.5208333	111.875000	111.87500000	419.53125000	358.000000000
Branche IV L	0.31746031	0.079365079	0.158730158	1.58730158	3.1746031746	5.3174603174	5.00000000000
TOTAL	29.217260	127.934199	270.904414	242.48878	244.076085	914.620744	933.500000000

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche 0 M	4.38110451	16.32382996	24.32558721	16.7476418	26.462215241	88.240378789	101.208104207
Branche I E	13.6640757	22.62748010	42.14901939	26.1168212	59.491834222	164.04923073	227.534078401
Branche II C	5.26086956	45.73753637	63.28916340	80.4428736	63.294607804	258.02505082	242.078269106
Branche III V	5.59375000	74.10524882	120.7836935	106.916099	93.536582163	400.93537443	357.742542272
Branche IV L	0.3174603	0.09857042	0.14688854	1.5169438	1.290846387	3.370709542	4.93700601151
TOTAL	29.217260	158.892665	250.694352	231.74038	244.076085	914.620744	933.500000000

Duree amortissement
10

K1,K2,K3,K4,K5	Taux de profit	x1,x2,x3,x4,x5
100.765403909489	0.26146340205694402	1.118951453
227.734596090511	0.26822000000000001	1.24198741
242	0.26146340205694402	0.9253978121
358	0.26146340205694402	0.9556746355
5	0.26146340205694402	0.6338946303

Tableaux 14

$$r'_E = \frac{S'_E}{F'_E + x_E E_E + x_C C_E + x_V V'_E}$$

Du tableau 14 des prix nous lisons :

$$S_E = 59.49183422278 \quad V_E = 26.1168212538384878 \quad D_E = 13.6640757654306455$$

$$x_V = 0,9556746355$$

Nous avons calculé plus haut D'_E et V'_E , nous en déduisons :

$$S'_E = 61.0508 \quad \text{et} \quad r'_E = 0.26822$$

$$r'_E = 0.26822 > r_E = 0.26146340205694413$$

Le taux de profit transitoire de la branche E étant devenu supérieur à celui des autres secteurs (si tous les capitalistes de ce secteur n'ont pas encore modernisé leur production ce taux de profit est inférieur à r'_E), les capitaux vont affluer jusqu'à produire la péréquation des taux de profit. Le nouvel état d'équilibre en valeur et en prix est alors donné par les tableaux 15, il a été obtenu en maintenant fixes les capitaux des trois dernières branches. Le transfert de la branche 1 vers la branche 2 qui est aussi la plus capitalistique est la solution indiquée par l'algorithme pour le respect des deux égalités de Marx. Les nouveaux montants de capitaux, les taux de profit ainsi que les coefficients de transformation sont dans les tableaux 16.

VALEURS APRES TRANSFERT

	F/n	E	C	V	PI	W	K
Branche 0 M	3.82890045	11.48670137	22.97340274	15.3156018	15.315601829	68.920208233	88.0647105209
Branche I E	14.6184656	19.23482315	48.08705789	26.9287524	28.852234737	137.72133381	240.435289479
Branche II C	5.26086956	36.82608695	68.39130434	84.1739130	84.173913043	278.82608695	241.999999999
Branche III V	5.59375000	59.66666666	130.5208333	111.875000	111.87500000	419.53125000	358.000000000
Branche IV L	0.31746031	0.079365079	0.158730158	1.58730158	3.1746031746	5.3174603174	5.00000000000
TOTAL	29.619445	127.293643	270.131328	239.88056	243.3913527	910.3163393	933.500000000

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W	Kp
Branche 0 M	3.82890045	14.29538511	21.24403113	14.6266542	23.062882026	77.057852938	88.4550750284
Branche I E	14.6184656	23.93804763	44.46720264	25.7174059	62.655299208	171.39642104	240.307312244
Branche II C	5.26086956	45.83065913	63.24300388	80.3874854	63.114843953	257.83686199	242.069844125
Branche III V	5.59375000	74.25612894	120.6956008	106.842483	93.271350492	400.65931400	357.731713508
Branche IV L	0.3174603	0.09877112	0.14678140	1.5158993	1.286977103	3.365889340	4.93605509318
TOTAL	29.619445	158.418991	249.796619	229.08992	243.3913527	910.3163393	933.499999999

Tableaux 15

K1,K2,K3,K4,K5	r en prix	x1,x2,x3,x4,x5
88.064710520932	0.26072989050380402	1.11807342
240.435289479068	0.2607298905038033	1.244516128
242	0.26072989050380352	0.9247228794
358	0.26072989050380424	0.9550166144
5	0.26072989050380369	0.6329881445

Tableaux 16

3. Conclusion

Le transfert des capitaux vers la branche la plus profitable (et aussi la plus capitaliste dans notre exemple) amène à un nouvel équilibre pour lequel le taux de profit a diminué par rapport à sa valeur initiale r_E :

$$r''_E = 0.2607298905038033$$

$$r'_E > r_E > r''_E$$

Le phénomène de la baisse tendancielle du taux de profit moyen énoncé par Marx est donc vérifié pour le modèle décrit ici du fait que les mouvements de capitaux ne sont pas instantanés⁷. Il n'y aurait pas d'intérêt à l'innovation si le résultat final arrivait immédiatement. Le théorème d'Okishio rend compte d'un phénomène transitoire. Il en décrit l'effet transitoire de l'augmentation initiale du taux de profit dans un secteur. Cet effet, suivi de déplacements de capitaux jusqu'à la péréquation des taux de profit, est un processus qui réalise la BTPM. Notons que la BTPM peut survenir, y compris en absence de capital fixe. C'est l'augmentation de la composition organique en valeur, quand bien même elle baisserait quand exprimée en prix, qui gouverne la baisse du taux profit moyen. On pourrait penser que l'innovation technique permanente, survenant avant qu'un nouvel état d'équilibre ne soit atteint est à même de contrecarrer cette BTPM. Il est indéniable que l'innovation est un facteur (parmi d'autres) qui change la trajectoire du taux de profit moyen en lui donnant plus ou moins régulièrement des impulsions positives. Ce n'est pas un hasard si le mot « tendancielle » a été choisi par Marx. Mais il est facile de se persuader que même si le système est entraîné dans un déséquilibre permanent, ponctué de changements des conditions de production associés à des hausses du taux de profit, à partir du moment où la masse de plus-value à partager, elle, tend à diminuer au cours du temps (toute chose étant égale par ailleurs) alors la BTPM se produit inexorablement.

⁷ On voit ici que l'argument de M. Husson (2017) contre le schéma de V. Laure van Bambeke, objectant du temps pris par les transferts de capitaux, ne tient pas.

F- L'ajout d'une branche de luxe

L'ajout d'une branche de luxe répond à cette question : Pouvons-nous ajouter une branche de Luxe correspondant à la consommation des capitalistes de façon à construire un système cohérent, qui respecte les égalités fondamentales et qui soit un système de reproduction simple, c'est-à-dire pour lequel, quel que soit i , le prix de la production totale de marchandise de la branche i soit exactement égal au prix de la consommation de cette marchandise par toutes les branches ?

1. Cas sans capital fixe

Nous avons vu au chapitre C que lorsqu'il n'y a pas de capital fixe, toutes les répartitions des capitaux qui respectent les égalités fondamentales conduisent nécessairement aux mêmes bilans en valeurs et en prix pour les productions totales ainsi qu'aux mêmes profits totaux et plus-values totales. Si nous partons d'un système de capital total $K_{1,2,3}$ à trois branches 1-E (Energie), 2-C (Matières premières), 3-V (biens de consommation courante) en gardant les notations S pour profit et PL pour plus-value, cela se traduit par :

$$\sum_{i=1}^3 K_i p l_i = PL_{1,2,3} = \text{constante} \quad \forall K_i \text{ tels que } \sum_{i=1}^3 K_i = K_{1,2,3}$$

En vertu de l'équivalence du profit total avec la plus-value totale de ces trois branches :

$$\sum_{i=1}^3 S_i = S_{1,2,3} = PL_{1,2,3}$$

Soit, $E_{1,2,3}, C_{1,2,3}, V_{1,2,3}$ les consommations totales pour ces trois branches en marchandise du type désigné, et $E_L, C_L, V_L = E_4, C_4, V_4$ celles de la branche de luxe. Nous voulons que la somme des prix d'une marchandise donnée soit égale au prix de sa production totale.

La condition de reproduction totale s'écrit donc :

$$\kappa_{\mp} \sum_{i=1}^4 E_i = \kappa_{\mp} W_1 \quad ; \quad \kappa_{\mp} \sum_{i=1}^4 C_i = \kappa_{\mp} W_2 \quad ; \quad \kappa_{\mp} \sum_{i=1}^4 V_i = \kappa_{\mp} W_3$$

On note :

$$E_{1,2,3} = (E_1 + E_2 + E_3), \quad C_{1,2,3} = (C_1 + C_2 + C_3), \quad V_{1,2,3} = (V_1 + V_2 + V_3)$$

Nous alimentons la branche de luxe par les surplus E_L, C_L, V_L générés dans les trois premières branches de telle manière que :

$$\left. \begin{aligned} E_L &= W_1 - (E_1 + E_2 + E_3) \\ C_L &= W_2 - (C_1 + C_2 + C_3) \\ V_L &= W_3 - (V_1 + V_2 + V_3) \end{aligned} \right\}$$

(EQ VI-1)

$$E_L + C_L + V_L = PL_1 + PL_2 + PL_3$$

$$S_L = x_L W_L - (x_1 E_L + x_2 C_L + x_3 V_L)$$

La plus-value totale et le profit total incluant la branche L sont :

$$PL_T = PL_{1,2,3} + PL_L = S_T = S_{1,2,3} + S_L$$

Nous rappelons ici que si les quantités E_i, C_i, V_i sont devenues E'_i, C'_i, V'_i après réallocation des capitaux suite à l'ajout de la branche de luxe, par contre les sommes $PL_{1,2,3}$ ainsi que $S_{1,2,3}$ sont demeurées constantes et égales entre elles, ce qui implique :

$$PL_L = S_L = rK_{pL}$$

Donc

$$x_L = 1$$

Nous posons que le taux d'exploitation e_L pour la branche de luxe L soit identique aux autres branches ($e_L = 1$), alors la plus-value de la branche de luxe est : $PL_L = V_L$

Nous pouvons aussi déduire, le capital engagé $K_L = E_L + C_L + V_L$ de la branche L, ce dernier étant égal au surplus (invariable) $PL_{1,2,3}$ des trois premières branches, que :

$$rK_L = r(E_L + C_L + V_L) = r \cdot PL_{1,2,3} = V_L \quad (\text{EQ VI-2})$$

La condition de reproduction totale qui se traduit par les équations EQ VI-1 impose :

$$x_3 W_3 - x_3 (V_1 + V_2 + V_3) = x_3 PL_L = x_3 V_L$$

Or la somme des V_i ci-dessus n'est autre que la plus-value $PL_{1,2,3}$ (invariable) des branches 1, 2, 3 car on suppose les taux d'exploitation tous égaux à l'unité.

$$W_3 = V_L + PL_{1,2,3}$$

En vertu de (EQ VI-2) et en introduisant la production par unité de capital $w_3 = W_3/K_3$, l'égalité ci-dessus devient :

$$K_3 w_3 = r \cdot PL_{1,2,3} + PL_{1,2,3} = PL_{1,2,3} (1 + r)$$

$$K_3 = \frac{PL_{1,2,3} (1 + r)}{w_3}$$

On voit donc que le capital de la branche 3 doit être une quantité spécifique, mais une valeur de K_3 implique des valeurs bien déterminées pour K_1, K_2 et par conséquent pour E_L, C_L, V_L .

Cependant ce capital de la branche 3 peut être déterminé directement étant donné que les quantités qui servent à le calculer sont ici indépendantes de la répartition. On rappelle qu'il est question ici de toutes les répartitions qui obéissent aux égalités fondamentales. On sait déjà que, pour un système à 3 branches, lorsque le capital d'une branche (en l'occurrence ici la branche 3) est fixée alors il ne reste plus qu'une seule solution possible et le système de reproduction totale à quatre branches incluant la branche de luxe possède donc une et une seule répartition possible des capitaux. Le coefficient K_3 est

donc fixé dans l'algorithme principal pour trois branches qui en déduit donc les valeurs obligées pour K_1 et K_2 .

Un exemple ci-dessous après normalisation du capital à 1000 unités monétaires (um).

Valeurs avec luxe Capital total choisi

	F/n	E	C	V	PI	W
Branche I E	0.00000000	36.6183670486	73.23645665	47.0807379	47.0807379	204.016299605
Branche II C	0.00000000	52.3117633325	104.6234139	125.548440	125.548440	408.032057638
Branche III V	0.00000000	58.0607973433	116.1215946	106.884625	106.884625	387.951642756
LUXE	0.00000000	57.025371880	114.050592	108.43783	108.43783	387.95164275
TOTAL	0.00000000	204.016299605	408.0320576	387.951642	387.951642	1387.95164275

Prix avec luxe Capital total

	F/n	E	C	V	PI	W
Branche I E	0.00000000	39.0649449387	70.40776579	47.3391015	60.8354001	217.647212397
Branche II C	0.00000000	55.8068619368	100.5824306	126.237408	109.645493	392.272194227
Branche III V	0.00000000	61.9400053614	111.6365047	107.471172	109.032910	390.080593374
LUXE	0.00000000	60.835400160	109.645493	109.03291	108.43783	387.95164275
TOTAL	0.00000000	217.647212397	392.2721942	390.080593	387.951642	1387.95164275

x_1, x_2, x_3	r en prix
1.066812862	0.38795164275602012
0.9613759186	0.38795164275601962
1.00548767	0.38795164275601907
1	0.38795164275602001

Tableaux 17

2. Cas avec capital fixe

Les équations (EQ VI-1) s'appliquent encore. Mais cette fois leurs sommes verticales imposent :

$$E_L + C_L + V_L = PL_1 + PL_2 + PL_3 + d_1 + d_2 + d_3$$

Ou encore, le taux d'exploitation étant égal à un :

$$E_L + C_L + V_L = d_1 + d_2 + d_3 + V_1 + V_2 + V_3$$

Et :

$$W_i = D_i + V_i + E_i + C_i + PL_i \quad i = 1,2,3$$

$$W_i - (V_i + E_i + C_i) = D_i + PL_i = D_i + V_i$$

Or la plus-value de la branche L, $S_L = V_L$ étant encore égale à son profit ($x_L = 1$):

$$V_L = rK_L = r[n.D_L + E_L + C_L + V_L] = r[n.D_L + D_1 + D_2 + D_3 + V_1 + V_2 + V_3]$$

Et :

$$W_3 = V_L + PL_{1,2,3} = r[n.D_L + dD_1 + D_2 + D_3] + (r + 1)PL_{1,2,3}$$

Finalement :

$$K_3 = \frac{PL_{1,2,3}(1 + r) + r[n.d_L + d_1 + d_2 + d_3]}{w_3}$$

Le capital fixe $n.d_L$ de la branche de luxe peut être choisi arbitrairement.

On notera que contrairement au cas précédant la plus-value et le profit sont ici fonction de la répartition. A chaque répartition correspond une quantité de plus-value totale différente. En réinjectant plusieurs fois la valeur obtenue de K_3 à l'entrée de l'algorithme principal pour actualiser $PL_{1,2,3}$, nous produisons une boucle de convergence rapide vers K_3 définitif.

3. Conclusion

On peut donc artificiellement construire un système à quatre branches de reproduction totale avec ou sans Capital fixe et avec des taux de profit identiques dans toutes les branches, ce système respectant les égalités fondamentales. L'ajout la branche de luxe interagit avec les trois premières branches et modifie la répartition des capitaux. Quand il n'y a pas de capital fixe le taux de profit n'est pas modifié. Cette branche de luxe possède un coefficient de transformation égal à l'unité et possède de fait une composition organique de son capital égale à la moyenne des compositions organiques de toutes les branches. Cette branche de luxe pourrait servir à fabriquer un étalon monétaire (8).

Après normalisation du capital total à 1000 (um) :

PRIX	F/n	E	C	V	PL	W
Branche I E	11.55804026431	32.28303076701444	49.22769528651572	34.26846455956420	66.360647563625	193.69787844103
Branche II C	2.494086650225	49.75920390665076	75.87693934452640	98.59648745945578	71.470192344380	298.19690970523
Branche III V	5.455203259710	50.40824356714876	76.86673140482611	76.61430506788214	74.128470846627	283.47295414619
LUXE	2.9558955965	61.247400200219	96.225543669370	73.993697059292	74.86971859160	309.29225511699
TOTAL	22.46322577075	193.69787844103	298.19690970523	283.47295414619	286.8290293462	1084.6599974094
VALEURS	F/n	E	C	V	PI	W
Branche I E	11.55804026431	26.96881297398367	53.93742161568479	34.67417361353128	34.6741736135312	161.812622081044
Branche II C	2.494086650225	41.56817473481852	83.13625987391078	99.76378480311481	99.7637848031148	326.726090865184
Branche III V	5.455203259710	42.11037380351796	84.22074760703580	77.52135233798695	77.5213523379869	286.829029346238
LUXE	2.955895596503	51.16526056872472	105.4316617685530	74.86971859160503	74.8697185916050	309.292255116991
TOTAL	22.46322577075	161.812622081044	326.7260908651844	286.8290293462380	286.8290293462	1084.6599974094

Tableaux 18

r en prix	x1,x2,x3,x4
0.286829029346238	1.197050489
0.286829029346238	0.9126816561
0.286829029346238	0.9882993879
0.286829029346238	1

Tableaux 19

Remarque :

Si nous partons d'une branche de luxe avec des coefficients socio-techniques quelconques, le coefficient de transformation x_L n'a aucune raison d'être égal à un. Un exemple avec un capital total de mille unités monétaires où x_L vaut 0.902974216175.

	F/n	E	C	V	PI	W
Branche I E	16.2510560	40.88133952	77.31916496	46.5316588	46.531658881	227.51487831
Branche II C	2.87151058	45.45965245	83.72240933	114.860790	114.86079030	361.77515298
Branche III V	6.11883699	50.58938377	101.1787675	87.0434787	87.043478765	331.97394583
Branche IV L	4.08163265	4.081632653	18.36734693	36.7346938	36.734693877	100.00000000
TOTAL	29.323036	141.012008	280.587688	285.17062	285.170621	1021.263977

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W
Branche I E	16.2510560	49.41898076	69.55259976	46.3253484	93.4810019	275.0289870
Branche II C	2.87151058	54.95342659	75.31265024	114.351524	77.9464049	325.4355169
Branche III V	6.11883699	61.15444877	91.01554999	86.6575484	85.5556673	330.5020515
Branche IV L	4.08163265	4.934039049	16.52238136	36.5718208	28.1875476	90.297421617
TOTAL	29.3230362	170.460895	252.403181	283.90624	285.170621	1021.2639771

K1,K2,K3	r en prix	x1,x2,x3
327.242724088192	0.28517042734605924	1.208839567046
272.757957911808	0.28517042734605996	0.899551874378
300	0.28517042734605902	0.995566235521
100	0.28517042734605985	0.902974216175

Tableaux 20

Si nous prenons une situation sans plus-value, nous obtenons :

PRIX

	F/n	E	C	V	S	W
Branche I E	13.5425918	34.06789644	64.43285213	38.7765115	-0.0000000	150.8198520
Branche II C	3.41416512	54.05056169	99.54416733	136.567041	0.0000000	293.5759354
Branche III V	7.38078645	61.02294261	122.0458852	104.995333	0.0000000	295.4449475
Branche IV L	1.67845127	1.678451270	7.553030718	15.1060614	0.0000000	26.015994697
TOTAL	26.0159946	149.141400	286.022904	280.33888	-0.0000000	765.85672972

K1,K2,K3

0	272.703178646993
	324.303421517082
	361.872025701641
	41.1220561342842

Le cas où les machines ne sont plus importées mais sont fabriqués dans le système considéré est intéressant (tableaux 21):

VALEURS APRES TRANSFERT

	F/n	E	C	V	PI	W
Branche 0 M	0.85957385	4.014439445	8.023463033	5.15795894	5.1579589428	23.213394222
Branche I E	10.9135000	25.46556089	50.92893910	32.7404999	32.740499999	152.78899999
Branche II C	2.33230670	38.87255576	77.74277923	93.2922680	93.292268000	305.53217770
Branche III V	10.9339025	84.42568070	168.7995665	155.384688	155.38468841	574.92852663
Branche IV L	0.44941810	0.009041660	0.017607443	0.23793843	0.2379384304	0.9519440726
TOTAL	25.488701	152.787278	305.512355	286.81335	286.8133537	1057.415042

PRIX

	F/n	E	C	V	PI	W
Branche 0 M	0.85957385	4.805035010	7.322080721	5.09712331	7.4055143786	25.489327287
Branche I E	10.9135000	30.48069683	46.47691422	32.3543416	62.653503139	182.87895587
Branche II C	2.33230670	46.52803808	70.94678478	92.1919309	66.824591909	278.82365243
Branche III V	10.9339025	101.0523030	154.0437148	153.552001	148.56560162	568.14752355
Branche IV L	0.4494181	0.01082230	0.01606826	0.2351320	1.364142736	2.075583477
TOTAL	25.488701	182.876895	278.805562	283.43052	286.8133537	1057.415042

K1,K2,K3,K4,K5	r en prix	x1,x2,x3,x4,x5
0	0	0
25.7916	0.28681335379052542	1.098043959
218.27	0.28681335379052586	1.196937972
233.23067	0.28681335379052453	0.9125835928
517.948961390607	0.28681335379052492	0.9882054851
4.75876860939249	0.28681335379052508	2.180362835

Tableaux 21

Dans ce cas (voir tableau 22), si l'on supprime la plus-value, il y a réorganisation des capitaux qui abandonnent la branche de luxe pour se reporter dans les branches fondamentales.

PRIX

	F/n	E	C	V	PI	W
Branche 0 M	1.22882411	5.738936736	11.47013110	7.37368204	0.0000000000	25.811574002
Branche I E	13.7464510	32.07596897	64.14918866	41.2393532	0.0000000000	151.21096201
Branche II C	3.32277491	55.38068952	110.7580562	132.910996	-0.0000000000	302.37251734
Branche III V	7.51352388	58.01536677	115.9951413	106.776748	0.0000000000	288.30078062
Branche IV L	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
TOTAL	25.811574	151.210962	302.372517	288.30078	-0.00000000	767.6958339

Tableau 22

Comme nous le démontrons dans le **chapitre G** suivant, dans ce système qui produit tout ce qu'il consomme, il ne peut y avoir de branche de luxe sans profit.

G- L'ajout d'une branche produisant le capital fixe

1. Cas général

On considère les quatre branches fondamentales suivantes :

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{E}_i + \mathbf{C}_i + \mathbf{V}_i$$

F_i : Capital en machines-outils, bâtiments...

La fraction de cette sorte de marchandise consommée par une branche i à chaque cycle est égale à l'amortissement d_i .

E_i : Capital nécessaire à chaque cycle pour l'énergie.

C_i : Capital nécessaire à chaque cycle pour l'achat de matières premières.

V_i : Capital variable, défini comme le capital nécessaire à chaque cycle pour reproduire la force de travail des salariés.

e : Taux d'exploitation.

$$w_i = d_i + e_i + c_i + v_i + pl_i = d_i + e_i + c_i + (1 + e)v_i \quad (4b)$$

$$x_i w_i = d_i + x_1 c_i + x_2 e_i + x_3 v_i + s_i \quad (5b)$$

$$s_i = r(nd_i + x_2 c_i + x_3 e_i + x_4 v_i)$$

$$\begin{aligned} z = & k_1 [x_1 w_1 - x_2 e_1 - x_3 c_1 - x_4 v_1 - (d_1 + pl_1)] \\ & + k_2 [x_2 (w_2 - e_2) - x_3 c_2 - x_4 v_2 - (d_2 + pl_2)] \\ & + k_3 [x_3 (w_3 - c_3) - x_2 e_3 - x_4 v_3 - (d_3 + pl_3)] \\ & + k_4 [x_4 (w_4 - v_4) - x_2 e_4 - x_3 c_3 - (d_4 + pl_4)] \end{aligned}$$

$$k_1 w_1 x_1 - (k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + k_4 d_4) - [k_2 w_2 - (k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4)] x_2 + [k_3 w_3 - (k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 + k_4 c_4)] x_3 + [k_4 w_4 - (k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4)] x_4 = 0$$

Considérant les contraintes des besoins sociaux qui se traduisent par les inégalités suivantes:

$$k_1 w_1 x_1 \geq k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + k_4 d_4$$

$$k_2 w_2 \geq k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4$$

$$k_3 w_3 \geq k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 + k_4 c_4$$

$$k_4 w_4 \geq k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4$$

L'expression de z ne peut s'annuler que si :

$$k_1 w_1 x_1 = k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + k_4 d_4$$

$$k_2 w_2 = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4$$

$$k_3 w_3 = k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 + k_4 c_4$$

$$k_4 w_4 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1$$

Comme il n'y a pas de plus-value $x_1 = 1$, on choisit par exemple les trois premières équations à laquelle on ajoute l'équation de conservation des capitaux pour obtenir le système de cinq équations en k_i qui possède une et une seule solution du moment que le déterminant est non nul. Dans le cas d'un système fermé, même avec capital fixe, s'il n'y a pas de plus-value, chaque branche produit strictement selon les besoins.

Dans le cas général avec plus-value nous avons le système de prix :

$$(-w_1)x_1 + e_1 t x_2 + c_1 t x_3 + v_1 t x_4 = -d_1(1 + nr)$$

$$0x_1 + (e_2 t - w_2)x_2 + c_2 t x_3 + v_3 t x_4 = -d_2(1 + nr)$$

$$0x_1 + e_3 t x_2 + (c_3 t - w_3)x_3 + v_3 t x_4 = -d_3(1 + nr)$$

$$0x_1 + e_4 t x_2 + c_4 t x_3 + (v_4 t - w_4)x_4 = -d_4(1 + nr)$$

L'égalité fondamentale II s'écrit:

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 + k_4 w_4 = k_1 x_1 w_1 + k_2 x_2 w_2 + k_3 x_3 w_3 + k_4 x_4 w_4$$

Ajout de la branche de Luxe L :

$$k_L w_L = k_L (d_L + e_L + c_L + v_L)$$

Système en prix :

$$(-w_1)x_1 + e_1 t x_2 + c_1 t x_3 + v_1 t x_4 = -d_1(1 + nr)$$

$$0x_1 + (e_2 t - w_2)x_2 + c_2 t x_3 + v_3 t x_4 = -d_2(1 + nr)$$

$$0x_1 + e_3 t x_2 + (c_3 t - w_3)x_3 + v_3 t x_4 = -d_3(1 + nr)$$

$$0x_1 + e_4 t x_2 + c_4 t x_3 + (v_4 t - w_4)x_4 = -d_4(1 + nr)$$

$$(-w_L)x_L + e_L t x_2 + c_L t x_3 + v_L t x_4 = -d_L(1 + nr)$$

Dans le cas général, le coefficient x_L n'a aucune raison d'être égal à l'unité. (Table 21)

2. Cas sans plus-value

$$k_1 w_1 = k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + k_4 d_4 + k_L d_L$$

$$k_2 w_2 = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4 + k_L e_L$$

$$k_3 w_3 = k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 + k_4 c_4 + k_L c_L$$

$$k_4 w_4 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4 + k_L v_L$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_L = 1$$

Quand son déterminant n'est pas nul alors ce système de cinq équations indépendantes à cinq inconnues a une et une seule solution. Or puisque la branche L ne produit aucune marchandises fondamentales, une solution avec $k_L = 0$ est possible et c'est par conséquent la seule possible.

3. Conclusion

Si le capital fixe est produit à l'intérieur du système on peut en déduire que **sans profit il ne peut y avoir non plus de branche de luxe.**

H- Variations de la fonction z et détermination de r^*

Si l'on considère les expressions (7a ou 7b) de z en fonction des coefficients k_i et x_i , on voit que celles-ci peuvent s'exprimer en fonction de r sous la forme d'un rapport de deux polynômes dont les degrés augmentent avec le nombre de branches considéré. Cette forme polynomiale implique qu'il existe plusieurs valeurs de r qui annulent z, donc pour lesquelles **l'égalité fondamentale I** est vérifiée. Cependant les valeurs de r inférieurs ou supérieurs à r^* (que nous définissons rigoureusement ci-dessous) conduisent à des valeurs de capitaux ou des coefficients de transformation négatifs, ne vérifiant pas **l'égalité fondamentale II** et généralement n'ont pas de sens économique.

Nous avons défini la fonction z par :

$$z = \sum_i S_i - \sum_i PL_i = \sum_i (S_i - PL_i)$$

Dans sa première étape notre algorithme calcule les deux capitaux non fixés de façon à respecter **l'égalité fondamentale II** de l'égalité de la production totale en prix et en valeur.

$$\sum_{i=1}^n (W_i - W_i x_i) = 0$$

Soit :

$$\sum_i W_i = \sum_i W_i x_i \quad (EQ 8)$$

Nous nous plaçons suffisamment proche de la solution r^* de manière à ce que les solutions provisoires pour les k_i soient toutes positives. Nous prenons pour des raisons d'écriture et sans nuire à la généralisation le cas de trois branches.

$$\begin{aligned} \sum_i W_i x_i &= \sum_i (d_i + E_i x_1 + C_i x_2 + V_i x_3 + S_i) \\ \sum_i W_i &= \sum_i (d_i + E_i + C_i + V_i + PL_i) \end{aligned}$$

Or quand le taux de profit $r < r^*$ les prix sont globalement inférieurs à ce qu'ils atteignent au moment où $r = r^*$ si bien que :

$$\sum_i (d_i + E_i + C_i + V_i) > \sum_i (d_i + E_i x_1 + C_i x_2 + V_i x_3)$$

La seule manière de vérifier (EQ 8) est que :

$$S_i > PL_i \rightarrow z > 0$$

Nous en déduisons qu'au voisinage de la solution et pour $r < r^*$, $z > 0$

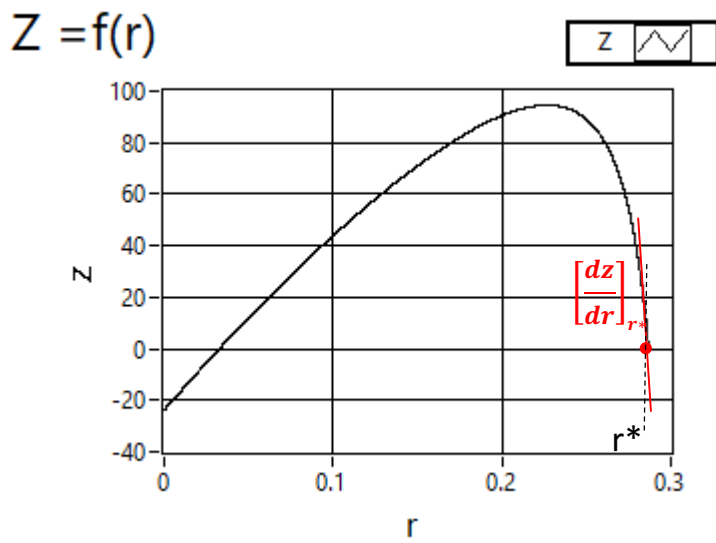


Figure 8

Nous définissons donc r^* comme la première valeur qui à la fois annule z et soit telle que :

$$\left[\frac{dz}{dr}\right]_{r^*} < 0$$

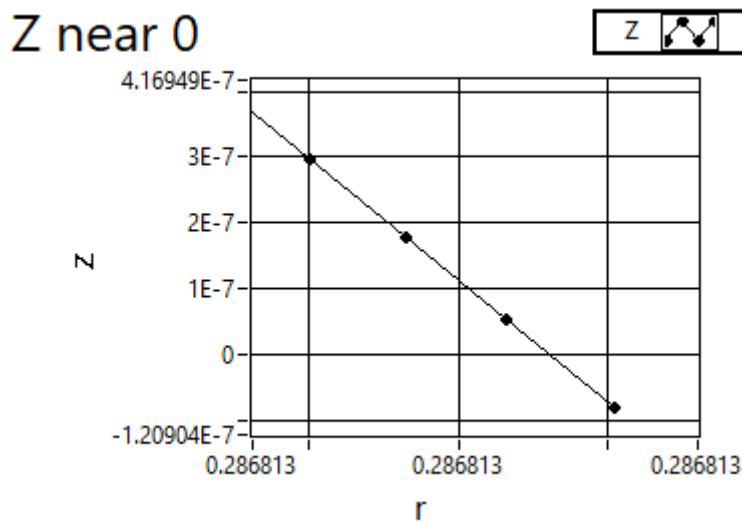


Figure 9

Autrement dit r^* est la première valeur trouvée qui annule la fonction $z(r)$ quand son graphe traverse l'axe des abscisses du haut vers le bas.

Nous ne ferons pas ici une étude détaillée pour trouver une forme analytique des zéros de la fonction z et la valeur r^* peut être approchée avec la précision voulue au moyen d'une interpolation (voir algorithme décrit ci-après).

Les coefficients de transformations sont déterminés en fonction de r^* de façon unique.

CONCLUSION GENERALE

Pour reprendre la formule employée par le philosophe des sciences Etienne Klein «Le monde s'oppose à ce qu'il nous montre»⁸, il est courant dans l'histoire des sciences qu'une loi essentielle soit découverte contre l'apparence des faits. Par exemple, c'est en dépit de l'observation courante, que Galilée a postulé que les corps soumis à l'attraction doivent tomber à la même vitesse, quels que soient leurs poids. On sait que l'auteur de la célèbre phrase : « Les faits sont têtus » a aussi dans son unique ouvrage de Philosophie : « Empiricriticisme et Matérialisme dialectique » dressé un réquisitoire sans appel contre le courant positiviste et son empirisme vulgaire trop souvent confondu avec la méthode scientifique. Ainsi, la loi de la valeur employée par Marx peut sembler en contradiction avec les faits. C'est cette contradiction apparente qui lui a valu des attaques, comme l'illustre la critique de Böhm-Bawerk :

« La loi de la valeur soutient que seule la quantité de travail détermine les rapports d'échange ; les faits démontrent que ce n'est pas la quantité de travail, ou des facteurs qui lui sont homogènes, qui détermine les rapports d'échange. Ces deux propositions ont entre elles la même relation que Oui et Non, que l'affirmation et la contradiction. »⁹

Ou encore :

« Marx n'a pas déduit des faits les principes fondamentaux de son système, par un empirisme de bon sens ou une solide analyse économique-psychologique ; au contraire, il ne l'établit pas sur un terrain plus solide que celui d'une dialectique formelle. »

Marx a écrit le Livre III du Capital avant le livre I. C'est dans le livre III qu'est exposée la méthode de la transformation des valeurs en prix, et il sait, autant que n'importe quel économiste orthodoxe selon Lexis (22), et autant que Galilée dans son énoncé de la chute des corps, que cette loi de la valeur est en contradiction apparente avec les faits. Derrière les apparences, Marx cherche à révéler l'essence des principes et, comme le dit encore Lexis (22), « Ce profit, le capitaliste le rapporte à l'ensemble de son capital ; profit et taux de profit sont ainsi à la surface des phénomènes, alors que la plus-value et son taux constituent l'objet caché, mais essentiel, des investigations ».

Marx n'a jamais fini la rédaction complète du Livre III, seule une orientation générale est donnée pour la transformation des valeurs en prix de production de marché et il ne disposait pas de l'outil mathématique adapté pour démontrer strictement la validité de sa théorie de la valeur. A ce stade, Marx s'est autorisé des approximations. Comme rappelé dans notre introduction, Marx avait lui-même signalé une approximation en utilisant dans le chapitre IX du livre III, les valeurs à la place des prix (Tableau 1) pour calculer le prix de production de marché. Le sens de ce passage du livre a été soumis à controverse. Husson soutient plutôt que Marx, utilisant bien des prix pour calculer le cout de production, met en garde contre le risque de compter deux fois le profit (23). Au contraire, d'autres, comme Bortkiewicz soutiennent que Marx utilise les valeurs en intrants (23). Bien que nous ne partagions pas l'avis de M Husson, nous reconnaissons la difficulté d'interpréter ce passage du livre III.

⁸ <https://www.youtube.com/watch?v=dIDWHIX-c5M>

⁹ Notons que cette critique ne tient pas compte du sens donné par Marx au « travail socialement nécessaire » qui tient compte des rapports d'échanges.

Cependant cette difficulté ne change pas la teneur de la longue controverse dans laquelle s'inscrit notre travail.

Le principe fondamental qui sous-tend la théorie de la valeur et de l'exploitation est que toute valeur d'une marchandise prend sa source dans le travail humain socialement nécessaire à sa production. Ce principe se décline en deux postulats que l'on peut résumer de manière simplifiée par :

- 1) Toute valeur vient du travail.
- 2) Tout profit vient du surtravail.

Marx a proposé que ces postulats s'appliquent à l'économie capitaliste, à condition d'admettre une inadéquation entre valeurs et des prix. Le problème de la transformation est de mettre à jour les règles qui sous-tendent cette inadéquation pour les différentes branches d'une économie globale. Une telle résolution respectant les deux postulats sans prendre en compte le mouvement des capitaux vers une répartition adéquate est, nous semble-t-il une tâche très ardue. Il n'a certainement pas manqué d'ingéniosité et de brillants esprits dont quelques-uns bien équipés mathématiquement pour s'y sont attelés (Bortkiewicz, Duménil, Foley, Lipietz, Sraffa, Morishima, Okishio, ...). Cependant le problème était selon nous mal posé, même si des solutions de compromis furent jugées satisfaisantes par certains.

Laure van Bamberke fut le premier à proposer une résolution du problème de la transformation en y incluant, comme une composante indissociable du problème, la détermination de la distribution des capitaux entre les branches qui satisfait les égalités fondamentales. Dans l'introduction, nous avons fait remarquer que cette manière de voir est en fait très naturelle par une analogie avec l'électrostatique. Cette analogie a cependant des limites, notamment quand il est question des constantes de temps. La répartition des charges électriques à la surface d'un conducteur est presque instantanée tandis que les investissements et la modernisation des outils de production prennent du temps. Justement, même si les déplacements de capitaux vont plus vite que du temps de Marx, ce déphasage temporel permet l'existence d'un régime transitoire durant lequel des capitalistes d'un secteur prennent l'avantage en faisant baisser leurs coûts de production. Cet avantage amène à un taux de profit provisoirement supérieur dans le secteur. Ce différentiel de taux motive ensuite l'afflux des capitaux dans cette branche. La péréquation des taux qui s'en suit, est accompagnée d'une BTTPM (les taux d'exploitation et conditions de production étant inchangés par ailleurs).

Dans le premier schéma de V. Laure van Bamberke (1, 12) *dans les cas de deux ou trois branches, le capital fixe importé n'est pas transformé et possède de ce fait un prix égal à sa valeur*. Or ce capital fixe a lui-même été constitué par du travail socialement nécessaire dans le cadre d'une production de composition organique donnée. Dans son modèle, à quatre branches (12) Bamberke s'occupe de cette question en ajoutant une branche qui produit le capital fixe à l'intérieur du système économique avec un coefficient de transformation qui lui est associé. Afin de montrer la cohérence de la loi de la valeur avec la façon dont le profit se partage, nous sommes allés plus loin en résolvant les cas pour lesquels le capital fixe est nul. Cette expérience de pensée permet de concevoir un système économique dans lequel aucune valeur préalable n'existe. On ne voit d'ailleurs pas, comme le souligne M. Husson dans sa critique du travail de V. Laure van Bamberke, pourquoi ce problème simplifié serait plus difficile à résoudre que celui de toute évidence plus complexe qui incorpore le capital fixe. Surtout, quand notre expérience de pensée va encore plus loin, en considérant des modèles sans capital fixe et sans profit, elle démontre le lien entre les égalités fondamentales de Marx et la satisfaction des besoins sociaux solvables. Cette approche donne toute son évidence au fait que la répartition des capitaux dans chaque branche ne peut être posée comme une donnée exogène et fixe du problème de la transformation mais qu'au contraire elle doit être déterminée en même temps que les coefficients de transformation.

Toujours dans le cadre de modèles sans capital fixe, nous montrons que, pour un taux de profit uniforme, ce dernier est invariant quelles que soient les répartitions de capitaux qui satisfont les égalités fondamentales. Cette propriété permet de comprendre les succès de la théorie classique qui calcule le taux de profit à partir de la valeur propre de la matrice socio-technique, indépendamment des montants de capitaux et de leur répartition. Une approche répandue qui pourrait expliquer la difficulté d'admettre que le problème de la transformation inclut dans sa solution la détermination d'une répartition adéquate des capitaux entre branches.

Nous pensons également qu'il est préférable d'utiliser une autre méthode de résolution que celle préconisée par Laure van Bambeke.

Dans son article de 2018 () Laure Van Bambeke écrit :

« 2. Mais tenir compte des contraintes de Marx au sein du modèle de détermination des prix à partir des valeurs conduit à un système analytique surdéterminé qui n'a pas de solution au sens classique du terme.

3. Toutefois un tel système possède toujours une solution approchée au sens de la méthode des moindres carrés. Après avoir présenté succinctement la méthode mathématique de Moore et Penrose, nous l'appliquons à un modèle complet de détermination des prix à partir des valeurs. »

4. Nous admettons ensuite que les prix ainsi calculés sont les prix effectifs qui peuvent provoquer une situation déséquilibrée caractérisée par des écarts de rentabilité entre les branches et des transferts de capitaux vers les activités les plus rentables. Un point d'équilibre est atteint après de nombreuses itérations lorsque la répartition du capital devient efficiente et que les deux égalités, réputées inconciliables et contradictoires, sont simultanément satisfaites. »

Pourtant Laure van Bambeke dans son livre (11) a caractérisé le problème général comme étant bilinéaire, en x_i (coefficient de transformation de la valeur en prix pour la marchandise i) et en K_i (montant de capital en valeur attribuée à la branche i). Son détour par la méthode de Moore Penrose pour obtenir des valeurs approchées est inutile et le système possède en réalité un ensemble de solutions exactes. Les postulats 1) et 2) mentionnés plus haut constituent le socle de la conception fondamentale et doivent agir même quand les taux de profit des branches d'activité sont différents. Ce ne sont pas des approximations. La méthode de Moore et Penrose utilisée par Laure van Bambeke fonctionne, mais elle procède par transfert successifs de capitaux d'une branche à l'autre jusqu'à trouver l'erreur la plus petite. Cette façon de procéder est fastidieuse et devient difficilement praticable avec l'augmentation du nombre de branches. A l'inverse notre méthode est directe et applicable à un nombre quelconque de branches. En outre dans la méthode de Moore-Penrose, l'état d'égalité des taux de profit est approché progressivement par des transferts successifs, ce qui est correct, en revanche il n'y a pas de raison théorique pour que les égalités de Marx ne soient pas pleinement vérifiées durant cette « phase d'approche »; or avec cette méthode les écarts (différences des taux entre eux et les deux différences entre plus-values et profits ainsi que prix et valeurs) étant ajustés selon les moindres carrés, les égalités fondamentales ne seront vérifiées qu'une fois l'égalité des taux réalisée.

Dans notre algorithme le taux de profit apparait comme une variable d'ajustement, mais il est également directement lié à l'exploitation puisqu'il dépend en premier lieu du taux de plus-value. Cependant pour que le profit soit effectivement réalisé la marchandise produite doit aussi être vendue et il est impératif de tenir compte de la capacité d'absorption du marché, cette contrainte amène nécessairement une valeur particulière pour ce taux de profit. C'est exactement ce que notre algorithme réalise quand il respecte strictement les égalités fondamentales de Marx.

Nous rejetons catégoriquement la théorie « non stationnaire » de M. Husson (Contre Sraffa 1982) (23) qui explique les échecs des théories précédentes à donner une version cohérente du problème de la Transformation respectant les égalités fondamentales, par le fait que les intrants et les extrants qui composent les marchandises changent de valeurs durant le processus de production le système capitaliste étant intrinsèquement hors-équilibre. Certes, cette considération cherche à se rapprocher de la situation réelle et permet certainement de retrouver les schémas marxistes (Perez-Husson 1980) mais on pourrait, en augmentant à loisir le nombre de variables, vérifier à peu près n'importe quelle autre hypothèse. Si la conception marxiste a quelque valeur, ce que nous pensons fermement, elle doit fonctionner dans une situation dans laquelle les valeurs des intrants et les valeurs des extrants resteraient stables quand bien même cette situation serait idéalisée. C'est ce que nous montrons par notre développement algorithmique basé sur des équations simultanées appliquées à un système en équilibre transitoire. Comme Isaac Roubine l'a fait remarquer :

« La vie économique est un océan en perpétuel mouvement. Il n'est pas possible d'observer, à un moment donné quelconque, l'état d'équilibre dans la répartition du travail entre les différentes branches de la production. Mais sans une conception théorique de cet état d'équilibre, on ne peut expliquer la nature de ces fluctuations et leur direction. »¹⁰

Dans l'exemple incluant la branche de luxe, cette dernière a été construite sur mesure pour réaliser un système de reproduction simple parfait dont l'intérêt est purement arithmétique. Il est plus réaliste de partir des coefficients socio-techniques caractéristiques pour cette branche et d'obtenir en augmentant progressivement le capital de cette branche la meilleure solution possible. En outre, comme dans le cas illustré par Laure van Bambeke, la branche des biens de consommation doit aussi produire pour les classes moyennes improductives. Considérons aussi que chaque branche de marchandises possède un « haut de gamme » destiné à la classe dominante mais dont les produits peuvent aussi être achetés à l'occasion par les producteurs de plus-value.

L'hypothèse de la loi de la BTPM liée à la composition organique du capital est confirmée pour les modèles que nous présentons. Nous montrons que le théorème d'Okishio s'applique, mais contrairement à l'interprétation habituelle, non seulement il ne remet pas en question la BTPM mais il explique son initiation. Dans ce contexte, il est intéressant de noter que la composition organique du capital peut évoluer dans des sens opposés selon qu'elle soit exprimée en prix ou en valeur. Comme l'illustre notre exemple avec capital fixe à trois branches du Chapitre D, c'est bien la loi de la valeur qui gouverne la BTPM. Ces conclusions ont pu être tirées parce que notre approche permet d'étudier le

¹⁰ Isaac Roubine Chapitre 9 (page 118) : La valeur régulateur de la production

système économique dans sa globalité. Cette approche est fidèle à la proposition évidente et déjà ancienne de Serge Latouche¹¹ qui remarquait dans son article à propos de la BTPM :

« D'autre part, si l'évolution de la productivité modifie les valeurs des éléments du capital constant aussi bien que du capital variable, il est nécessaire d'expliciter le système économique tout entier et non plus de raisonner sur ce qui chez Marx pourrait apparaître comme une « branche représentative », car toute modification dans une branche se répercute à travers tout le système économique. Cette nouvelle façon de poser le problème donnerait sans doute plus de clarté à ce « mécanisme » un peu mystérieux qu'est la baisse tendancielle du taux de profit »

Il ressort de notre travail que la cohérence de la conception marxiste de la transformation de la valeur en prix de production de marché est évidente en considérant que la répartition des capitaux dans chaque branche se détermine en même temps que les coefficients de transformation des valeurs en prix. L'expérience idéalisée dans laquelle le capital fixe et le profit sont nuls est utile à cette démonstration : la répartition des capitaux ne peut pas être une donnée exogène, elle est déterminée par l'équilibre entre la production de marchandise et la satisfaction des besoins solvables. Une conséquence importante est que si les capitaux engagés dans chaque branche de production doivent être déterminés en même temps que les prix et le taux de profit, alors les contradictions du capitalisme ne sauraient se résumer à un seul problème de partage du surplus. Comme Marx le souligne : « Il faut d'abord créer ce sur quoi on prélèvera ». Le conflit entre classes naît dans la sphère de production et ne vient pas seulement du mode de répartition. Un corolaire est qu'il ne suffit pas de changer la répartition pour sortir du capitalisme.

La conception marxiste qui postule que toute valeur a pour source une quantité de travail et que tout profit vient d'un surtravail (donc de l'exploitation du travail humain) est donc non seulement compatible avec des modèles d'économie classiques à branches multiples mais contient selon nous une puissance explicative inégalée des crises du capitalisme. C'est la composition organique du capital en valeur et non pas celle qu'elle nous en apparait de prime abord, c'est-à-dire exprimée en prix, qui gouverne la baisse tendancielle du taux de profit à taux d'exploitation constant. Samuelson¹² (24) aurait pu s'en apercevoir s'il n'avait pas effacé le tableau de valeur.

L'algorithme que nous fournissons pour la résolution du problème de la transformation permet une détermination rapide d'un ensemble de solutions exactes (non pas approchées). Cet algorithme fonctionne également dans le cas de branches comportant des capitaux fixes nuls ou dans le cas de taux de profit ou de plus-value différents selon les branches. Une version de cet algorithme en langage LabVIEW est fournie.

¹¹ Latouche Serge. A propos de la baisse tendancielle du taux de profit. In: Revue économique, volume 24, n°1, 1973. pp. 163-175;

¹² Samuelson (1970) : « En résumé, la "transformation" des valeurs en prix peut être décrite logiquement comme la procédure suivante : (1) écrivez les relations de valeurs, (2) prenez une gomme et effacez-les, (3) finalement écrivez les relations de prix – ainsi vous avez effectué le fameux processus de transformation. »

BIBLIOGRAPHIE

1. V. Laure van Bambeke, Refonder la théorie marxiste de la valeur. (2018).
2. E. Heimann, *Kapitalismus und Socialismus* (ed. Potsdam: Alfred Protte, 1913).
3. S. Lee, A study on the transformation problem. (2007).
4. A. Einstein, Pourquoi le socialisme. *Monthly Review* (1949).
5. K. Marx, Le Capital, livre III. (divers).
6. K. Marx (1862) Lettre à Engels du 2 août 1862 [sur la transformation].
7. L. von Bortkiewicz, Wertrechnung und Preisrechnung im Marxschen System, Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik. **25**, 10-51 (1907).
8. L. von Bortkiewicz, Zur Berichtigung der grundlegenden theorischen Konstruktion von Marx im dritten Band des Kapital. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik XXXIV*, 319-335 (1907).
9. E. M. Purcell, *Cours de Physique Berkeley Tome 2 Electricité et magnétisme* (Collection U).
10. M. Husson (2017) Théorie de la valeur: dans les méandres de la «transformation». (<http://alencontre.org/economie/theorie-de-la-valeur-dans-les-meandres-de-la-transformation.html>).
11. V. Laure van Bambeke, *Les méandres de la transformation des valeurs en prix de production* (ed. L'Harmattan, 2013).
12. V. Laure van Bambeke, *La valeur du travail humain* (ed. L'Harmattan, 2021).
13. F. Lordon, *La condition anarchique, affects et institutions de la valeur* (Le Seuil, Paris, 2018).
14. B. Pire (Champ de Higgs et masse des particules. (<https://www.universalis.fr/encyclopedie/boson-de-higgs/3-champ-de-higgs-et-masse-des-particules/>).
15. I. Roubine, *Essais sur la théorie de la valeur de Marx* (ed. Syllepse, 2009).
16. G. Abraham-Frois, E. Lendjel, Une première application du théorème de Perron-Frobenius à l'économie : l'abbé Potron comme précurseur. *Revue d'économie politique* **111**, 639-665 (2001).
17. V. Laure van Bambeke, DES VALEURS AUX PRIX ABSOLUS. ESSAI DE THÉORIE ÉCONOMIQUE RATIONNELLE. *revue-innovation* **2**, 171-198 (2006).
18. N. Okishio, Technical Change and the Rate of Profit. *Kobe University Economic Review* **7**, 85-99 (1961).
19. C. Schmidt, Werttheorie. *Sozialistische Monatshefte XIV*, 850-854 (1910).
20. C. Schmidt, Marxistische Orthodoxie. *Sozialistische Monatshefte XIX*, 483-488 (1913).
21. C. Schmidt, Cfr Zur Théorie der Handelskrisen und der Ueberproduction. *Sozialistische Monatshefte V*, 669-682 (1901).
22. G. Dostaler, *Valeur et prix. Histoire d'un débat* (ed. PRESSES UNIVERSITAIRES DE GRENOBLE LES PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC, 1978).
23. M. Perez, *Contre Sraffa. La transformation des valeurs en prix* (ed. auto edition, 1982).
24. Samuelson, The Transformation from Marxian 'Values' to competitive 'Prices': A Process of rejection and Replacement. *Proceeding of the National Academy of Sciences* **67**, 423-425 (1970).

ANNEXES

1. Algorithmes de résolution

L'indice i désigne la branche d'activité i .

F_i : Capital fixe

E_i : Energie

C_i : Matières premières

V_i : Force de travail

PL_i : Plus-value produite uniquement par la force de travail V_i

Le taux de plus-value ou exploitation est PL_i/V_i généralement considéré (sauf exception) égale pour toutes les branches.

K_i : Capital engagé dans la branche i .

$K_i = F_i + C_i + V_i$ en valeur (euros)

Par unité de capital engagé :

$f_i = F_i/K_i$, $pl_i = PL_i/K_i$, $c_i = C_i/K_i$, $v_i = V_i/K_i$, $e_i = E_i/K_i$

Ce sont des proportions sans unités. Remarquons alors que pour deux branches :

$$f_i + c_i + v_i = 1$$

Ou

$$f_i + e_i + c_i + v_i = 1$$

Dans le cas de trois branches

Si n désigne le nombre de cycles d'amortissement (années) on définira également les quantités $D_i = F_i/n$ et $d_i = f_i/n$.

Deux branches : C (matières premières), V (biens de consommation courante constituant le salaire)

Le taux de profit interne (valeur) de la branche i :

$$r_i = \frac{pl_i}{(f_i + c_i + v_i)} = pl_i$$

Le taux de profit global est :

$$r = \frac{PL}{(F + C + V)} = \frac{PL}{KT}$$

Où PL , F , C et V désignent respectivement en valeur la plus-value, le capital fixe, les matières premières, la force de travail de l'économie totale, chacune de ces quantités étant la somme de toutes les branches de la catégorie considérée.

Le profit global r peut donc s'écrire aussi :

$$r = \frac{\sum_i K_i p_i l_i}{\sum_i K_i (f_i + c_i + v_i)} = \sum_i \frac{K_i}{KT} r_i$$

La simplification par K_i ne peut s'effectuer et le taux de profit global apparait donc comme la moyenne pondérée au prorata du capital engagé K_i des taux de profits de chacune des branches. Ce taux de profit va donc dépendre de la répartition des capitaux entre les branches puisque la plus-value totale produite par la force de travail totale V est fonction de cette répartition.

Cas général avec Capital fixe non nul :

Posons :

$$t=1+r;$$

$$r_1=r+dr_1; r_2=r+dr_2;$$

On se donne la possibilité de choisir deux taux de profit différents pour simuler par exemple une situation de monopole ou bien un déséquilibre momentané entre branches, dans ce cas :

$$t_1=1+r_1; t_2=1+r_2$$

Puisque la plus-value reçue par le capitaliste doit être proportionnelle au capital qu'il engage, généralement le profit en prix sera différent de la plus-value (en valeur) mais la valeur totale créée devra être égale au prix total de cette production.

Il s'ensuit que la valeur d'une marchandise n'est pas forcément égale à son prix, nous introduisons un vecteur de transformation \mathbf{X} qui transforme la valeur d'une marchandise en son prix. Ainsi, à la valeur par exemple C_i , correspond son prix $P_i=x_i \cdot C_i$.

La production d'une branche en prix au cours d'un cycle est la somme des couts et du profit, ce dernier étant proportionnel au capital engagé. L'hypothèse est que le capital fixe F_i est amorti en n cycles et transmet $D_i=F_i/n$ euros à chacun de ces cycles.

Deux équations principales pour deux branches :

$$w_i x_i = c_i x_1 + v_i x_2 + d_i + r_i (c_i x_1 + v_i x_2 + f_i)$$

$$i = 1, 2$$

Pour les deux branches $i=1,2$:

Les deux équations 1) s'écrivent selon le système en $\mathbf{X}(x_1, x_2)$:

$$(c_1 t_1 - w_1) x_1 + v_1 t_1 x_2 = -(d_1 + n d_1 r_1)$$

$$c_2 t_2 x_1 + (v_2 t_2 - w_2) x_2 = -(d_2 + n d_2 r_2)$$

Quand le déterminant est différent de zéro ce système admet une solution unique $\mathbf{X}^*(x_1^*, x_2^*)$ que l'on détermine par la méthode de Kramer et qui dépend de t donc de r .

Les équations en K_i :

1] La somme totale des capitaux est constante et égale à KT :

$$K_1 + K_2 = K_T$$

II] La valeur totale de la production (toutes les branches) est égale au prix total de la production :

$$K_1 w_1 (1 - x_1) + K_2 w_2 (1 - x_1) = 0$$

III] Egalité fondamentale de Marx:

Le profit est égal à la production totale en prix moins les coûts de production évalués en prix tandis que la plus-value est égale à la production totale en valeur moins les coûts de production évalués en valeur. Dans le cas de deux branches ceci conduit à l'égalité fondamentale :

$$K_1 [(w_1 - c_1) x_1 - v_1 x_2 - (d_1 + pl_1)] + K_2 [(w_2 - v_2) x_2 - c_2 x_1 - (d_2 + pl_2)] = 0$$

Le système d'équations linéaires en K_i : I], II], et III] a trois équations pour deux inconnues et est surdéterminé. Les équations II et III sont redondantes, le système possède un déterminant nul et accepte une solution différente de la solution triviale (0,0).

Nous résolvons le système en K_1, K_2 composé des équations II et I en prenant pour \mathbf{X} le vecteur $\mathbf{X}^*(x_1^*, x_2^*)$ solution des deux équations de branches. Pour des raisons d'allègement d'écriture nous écrirons ci-dessous x_1 et x_2 à la place de x_1^*, x_2^* .

$$K_1 w_1 (1 - x_1) + K_2 w_2 (1 - x_2) = 0$$

$$K_1 + K_2 = K_T$$

Le déterminant D est :

$$D = \begin{vmatrix} w_1 (1 - x_1) & w_2 (1 - x_2) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1^{er} cas : Le déterminant $D=0$: Quand les compositions organiques des deux branches sont égales et dans ce cas les prix sont identiques aux valeurs donc les coefficients de transformation égaux à 1:

$$x_1 = x_2 = 1$$

Il n'y a qu'une seule façon de répartir le profit et de répondre aux besoins sociaux et la répartition (K_1, K_2) est solution unique du système des deux équations suivantes:

$$K_1 [(w_1 - c_1 - d_1)] - K_2 c_2 = 0$$

$$K_1 + K_2 = K_T$$

La première de ces équations dit que la production de la branche 1 produit en valeur ce qu'il faut de matières premières pour les deux branches, la deuxième équation traduit la conservation du capital total.

2^{iem} cas : Le déterminant D est différent de 0 : Ce système a une et une seule solution.

$$K1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & w2(1-x2) \\ KT & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

$$K2 = \frac{\begin{vmatrix} w1(1-x1) & 0 \\ 1 & KT \end{vmatrix}}{D}$$

On calcule alors l'expression $z(r)$ fonction de r (x_1, x_2).

$$z = K_1[(w_1 - c_1)x_1 - v_1 x_2 - (d_1 + pl_1)] + K_2[(w_2 - v_2)x_2 - c_2 x_1 - (d_2 + pl_2)]$$

Puisque z est la différence entre la somme des profits et la somme des plus-values

On a $z=0$ quand « \sum Profits = \sum Plus – values »

La fonction $z(r)$ est nulle quand r est égale à la valeur r^* c'est-à-dire quand la somme des profits est exactement la somme des plus-values. Nous cherchons la valeur de r qui annule z quand z passe de positive à négative (voir chapitre VI La fonction z). Car au voisinage de la solution nous avons :

Pour $r < r^*, z(r) > 0$ et pour $r > r^*, z(r) < 0$ puis $z(r^*) = 0$

Aussi on fait varier r le taux de profit avec un pas d'incrémentation dépendant de la précision initiale (en partant de $r=0$). A chaque valeur de r correspondent un vecteur $X^*(x_1^*, x_2^*)$ différent et une valeur z différente. Nous continuons d'incrémenter r jusqu'à ce que l'on trouve deux valeurs de r successives, r_a et r_b telles que $z(r_a) > 0$ et $z(r_b) < 0$.

On détermine alors par interpolation linéaire au moyen des quantités $z(r_a), z(r_b), r_a$ et r_b , la valeur r^* pour laquelle $z(r^*)=0$.

L'intervalle $[r_a, r_b]$ correspondant à l'intervalle $[z_1, z_2]$ est ensuite divisé par dix et l'encadrement précédent est réalisé une nouvelle fois pour obtenir une précision augmentée sur r^* .

Cette procédure peut être poursuivie plusieurs cycles (NLoop). Le nombre de boucles est de l'ordre de 4 ou plus selon la précision voulue. Cette dernière étape n'a pas été reportée sur le schéma algorithmique de la figure pour ne pas l'alourdir.

La valeur de r finalement trouvée correspond à une répartition du capital qui correspond aux taux de profit r_1 et r_2 pour les branches 1 et 2. Ces taux de profits différents peuvent correspondre à une phase de déséquilibre dans laquelle une branche est provisoirement plus rentable mais peuvent aussi être la marque d'un « contrat » entre les capitalistes des deux branches. Généralement les capitalistes se partagent la plus-value au prorata du capital qu'ils ont engagé si bien que la situation « ordinaire » est $r_1=r_2=r$. Les capitalistes ne peuvent se partager entre eux pas d'avantage que la plus-value totale produite ce qui implique que cette dernière ne peut être égale qu'au profit total, et alors forcément $z(r)=0$.

Dans le cas de deux branches nous avons donc une solution unique qui correspond à l'intersection dans l'espace des K qui est ici le plan K1, K2, des deux droites d'équations I et II. La droite d'équation III est confondue à celle d'équation II.

Trois branches : E (énergies), C (matières premières), V (biens de consommation courante constituant le salaire)

$KT = K1 + K2 + K3$; En euros

W_i : Production en valeur de la branche i durant 1 cycle:

En valeur : $W_i = D_i + E_i + C_i + V_i + PL_i$

PL_i : Plus-value en valeur réalisée par la branche i

En prix : $P_i = x_i W_i$

Trois équations principales :

$$w_i x_i = e_i x_1 + c_i x_2 + v_i x_3 + d_i + r(e_i x_1 + c_i x_2 + v_i x_3 + f_i)$$

$$i = 1, 2, 3$$

Avec :

$$pl_i = r(e_i x_1 + c_i x_2 + v_i x_3 + f_i)$$

K_i : Capital engagé dans la branche i.

$K_i = F_i + E_i + C_i + V_i$ en valeur (euros)

Avec :

$$w_i = W_i / K_i \quad e_i = E_i / K_i \quad c_i = C_i / K_i \quad v_i = V_i / K_i \quad pl_i = PL_i / K_i$$

Les lettres minuscules w, e, c, v, pl indiquent des proportions, quantités sans unités.

W_i , indique la valeur produite par la branche i, et E_i , C_i , V_i les valeurs utilisées par la branche i respectivement en marchandises E, C, V.

Remarquons que :

$$f_i + e_i + c_i + v_i = 1$$

Le taux de profit interne et en valeur de la branche i:

$$r_i = \frac{pl_i}{(f_i + e_i + c_i + v_i)} = pl_i$$

Le taux de profit global est :

$$r = \frac{PL}{(F + E + C + V)} = \frac{PL}{KT}$$

$$r = \frac{\sum_i K_i p_i}{\sum_i K_i (f_i + e_i + c_i + v_i)} = \sum_i \frac{K_i}{K_T} r_i$$

On pose :

$$t=1+r;$$

$$r_1=r+dr_1; r_2=r+dr_2; r_3=r+dr_3; \text{ (on considère que les trois taux peuvent être différents)}$$

$$t_1=1+r_1; t_3=1+r_3; t_2=1+r_2$$

Les trois équations 1') s'écrivent selon le système en $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} (e_1 t_1 - w_1)x_1 + c_1 t_1 x_2 + v_1 t_1 x_3 &= -(d_1 + n d_1 r_1) \\ e_2 t_2 x_1 + (c_2 t_2 - w_2)x_2 + (v_2 t_2 - w_2)x_3 &= -(d_2 + n d_2 r_2) \\ e_3 t_3 x_1 + c_3 t_3 x_2 + (v_3 t_3 - w_3)x_3 &= -(d_3 + n d_3 r_3) \end{aligned}$$

Ce qui détermine, si le déterminant est différent de zéro, une solution unique $\mathbf{X}^*(x^*_1, x^*_2, x^*_3)$:

Les équations en K_i :

I] La somme totale des capitaux est constante et égale à K_T :

$$K_1 + K_2 + K_3 = K_T$$

II] La valeur totale de la production est égale au prix total de la production :

$$K_1 w_1^* x_1 + K_2 w_2^* x_2 + K_3 w_3^* x_3 = K_1 w_1 + K_2 w_2 + K_3 w_3$$

III] La somme des Plus-values est égale à la somme des profits:

$$K_1 [x_1 (w_1 - e_1) - c_1 x_2 - v_1 x_3 - (d_1 + p_1)] + \dots$$

$$K_2 [x_2 (w_2 - c_2) - e_2 x_1 - v_2 x_3 - (d_2 + p_2)] + \dots$$

$$K_3 [x_3 (w_3 - v_3) - e_3 x_1 - c_3 x_2 - (d_3 + p_3)] = 0$$

Comme pour le cas de deux branches les équations II et III sont redondantes et le système d'équations linéaires en K_i est constitué des équations I] et II].

$$K_1 w_1 (1 - x_1) + K_2 w_2 (1 - x_1) + K_3 w_3 (1 - x_3) = 0$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = K_T$$

Il y a une infinité de solutions et nous fixons une valeur pour l'un des K_i par exemple K_3 (K_3 dans le cas où la branche 1 et la branche 2 ont des compositions organiques différentes). Cette valeur est bien évidemment fixée inférieure à K_T . Les inconnues sont en lettres grasses.

$$K_1 w_1 (1 - x_1) + K_2 w_2 (1 - x_2) = -K_3 w_3 (1 - x_3)$$

$$K_1 + K_2 = K_T - K_3$$

$$D = \begin{vmatrix} w_1 (1 - x_1) & w_2 (1 - x_2) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1^{er} cas : Le déterminant $D=0$: Quand les compositions organiques de la branche 1 et de la branche 2 sont identiques, il suffit de choisir parmi elles la branche dont on fixe le montant de capital pour se ramener au cas D différent de zéro. Si les trois branches sont de compositions organiques égales, dans ce cas les prix sont identiques aux valeurs, par conséquent les coefficients de transformation sont égaux à 1:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

Il n'y a dans ce cas particulier qu'une seule façon de répartir le profit et de répondre aux besoins sociaux et la répartition (K_1, K_2, K_3) est solution unique du système des trois équations suivantes:

$$K_1 [(w_1 - e_1 - d_1)] - K_2 e_2 - K_3 e_3 = 0$$

$$-K_1 [(c_1)] - K_2 (w_2 - c_2 - d_2) - K_3 c_3 = 0$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = K_T$$

Les deux premières équations indiquent que les productions en Energie de la branche 1 et des matières premières de la branche 2 sont suffisantes, la troisième équation est la conservation du capital total.

2^{iem} cas : Le déterminant D est différent de zéro :

On suppose différentes les compositions organiques de la branche 1 et de la branche 2.

$$K_1 = \frac{\begin{vmatrix} -K_3 w_3 (1 - x_3) & w_2 (1 - x_2) \\ K_T - K_3 & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

$$K_2 = \frac{\begin{vmatrix} w_1 (1 - x_1) & -K_3 w_3 (1 - x_3) \\ 1 & K_T - K_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Remarque : Si les compositions organiques sont identiques pour seulement deux des branches alors la branche dont on fixe le capital pour ne laisser que deux inconnues doit être l'une d'entre elles pour éviter que le déterminant soit nul. Pour cette raison les compositions organiques de la branche 1 et de la branche 2 ci-dessus sont supposées différentes.

Si l'une des valeurs trouvées pour K1 et K2 est négative et ceci pour toutes les valeurs de r possibles, alors la valeur choisie pour K3 est impossible et il nous faut en choisir une autre.

Comme pour le cas à deux branches nous devons trouver la valeur r^* qui annule l'expression de z qui affirme l'égalité entre la somme des profits et la somme des plus-values.

$$z = K_1[(w_1 - e_1)x_1 - c_1 x_2 - v_1 x_3 - (d_1 + pl_1)] + K_2[(w_2 - c_2)x_2 - e_2 x_1 - v_2 x_3 - (d_2 + pl_2)] + K_3[(w_3 - v_3)x_3 - c_3 x_2 - e_3 x_1 - (d_3 + pl_3)]$$

En partant de valeurs croissantes de r à partir de $r=0$, on recherche le premier passage de z d'une valeur positive à une valeur négative (voir chapitre VI sur la fonction z).

Le processus est décrit par l'algorithme de la figure 2 dans laquelle par souci de simplification nous avons considéré r identique pour les trois branches. Si tel n'est pas le cas, l'algorithme reste le même en remplaçant le taux de profit de la branche i, r_i par $r_i = r_i + \Delta r_i$.

Les deux plans qui correspondent dans l'espace des K aux deux égalités fondamentales sont donnés rappelons-le par les deux équations suivantes :

$$K_1 w_1 (1 - x_1) + K_2 w_2 (1 - x_1) + K_3 w_3 (1 - x_3) = 0$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = K_T$$

L'intersection de ces deux plans est une droite dans un espace à 3 dimensions. La solution (K1, K2, K3) se trouve sur cette droite. Si l'on choisit une valeur de K3 différente, r le taux de profit sera lui aussi différent ainsi que x_1, x_2, x_3 les coefficients de la transformation. Or les quantités « petit » w_1, w_2, w_3 étant des constantes il s'ensuit que la première équation ci-dessus est modifiée et correspond maintenant à un plan légèrement différent. La seconde équation exprimant la constance du capital total engagé ne change pas. Nous pouvons en déduire que la droite d'intersection des deux plans change pour chaque valeur de K3 choisie (sauf dans le cas exceptionnel où la droite initiale serait toujours l'axe autour duquel le plan tourne). L'ensemble des solutions se positionne donc selon une ligne légèrement incurvée dans l'espace à 3 dimensions K1, K2, K3.

Nous pouvons établir un raisonnement tout à fait analogue pour quatre branches. L'ensemble des solutions dans l'espace K1, K2, K3, K4 se répartirait dans ce cas sur un plan légèrement incurvé.

Cas particulier où le Capital fixe est nul :

Nous traitons directement le cas avec trois branches.

$$w_1 x_1 = (1 + r)e_1 x_1 + (1 + r)c_1 x_2 + (1 + r)v_1 x_3$$

$$w_2 x_2 = (1 + r)e_2 x_1 + (1 + r)c_2 x_2 + (1 + r)v_2 x_3$$

$$w_3 x_3 = (1 + r)e_3 x_1 + (1 + r)c_3 x_2 + (1 + r)v_3 x_3$$

$$(1+r) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{e}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{e}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (w_1, w_2, w_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(1+r) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1/w_1 & \mathbf{c}_1/w_1 & \mathbf{v}_1/w_1 \\ \mathbf{e}_2/w_2 & \mathbf{c}_2/w_2 & \mathbf{v}_2/w_2 \\ \mathbf{e}_3/w_3 & \mathbf{c}_3/w_3 & \mathbf{v}_3/w_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1/w_1 & \mathbf{c}_1/w_1 & \mathbf{v}_1/w_1 \\ \mathbf{e}_2/w_2 & \mathbf{c}_2/w_2 & \mathbf{v}_2/w_2 \\ \mathbf{e}_3/w_3 & \mathbf{c}_3/w_3 & \mathbf{v}_3/w_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+r)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1/w_1 & \mathbf{c}_1/w_1 & \mathbf{v}_1/w_1 \\ \mathbf{e}_2/w_2 & \mathbf{c}_2/w_2 & \mathbf{v}_2/w_2 \\ \mathbf{e}_3/w_3 & \mathbf{c}_3/w_3 & \mathbf{v}_3/w_3 \end{bmatrix}$$

La valeur propre de la matrice est donc égale à l'inverse de $(1+r)$ et détermine donc le taux de profit. Le taux de profit dépend des valeurs w_i qui sont supérieures à 1 pour les branches réalisant une plus-value. Le taux de profit dépend donc du taux d'exploitation.

La valeur du taux de profit est aussi :

$$r = \frac{PL}{(E + C + V)} = \frac{\sum_i K_i pli}{\sum_i K_i (e_i + c_i + v_i)}$$

Contrairement à la matrice A, le taux de profit calculé de cette manière dépend des valeurs de K1, K2, K3. Mais la matrice ne nous renseigne pas sur la répartition des capitaux.

Il se trouve que lorsque la répartition des capitaux répond au besoin social, les deux calculs mènent au même résultat. Les coefficients socio-techniques contiennent les proportions de chacune des marchandises contenues dans une autre. Ils apportent donc l'information sur le besoin

La norme du vecteur propre doit posséder la valeur adéquate pour que les égalités fondamentales soient respectées. Ainsi la résolution matricielle ne permet pas à elle seule de déterminer complètement le vecteur de transformation. Il existe une norme particulière pour laquelle un ensemble de valeurs (K1, K2, K3) est compatible avec ces égalités. Pour cet ensemble, le calcul du taux de profit coïncide avec la valeur propre de la matrice A.

$$[A] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+r)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nous devons déterminer les vecteurs propres de la matrice [A] pour trouver un vecteur \mathbf{X} de transformation des valeurs en prix.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Cependant le résultat de l'algorithme classique fourni un vecteur propre unitaire.

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1$$

Nous connaissons donc le rapport entre les différents prix mais pas encore leurs montants absolus.

Le véritable vecteur de transformation \mathbf{X}^* est tel que :

$$\mathbf{X}^* = q \mathbf{X}$$

La valeur recherchée de q est q^* c'est à dire celle qui permet de réaliser l'égalité fondamentale de la somme totale des profits et de la somme totale des plus-values.

A partir de ce moment l'algorithme de résolution est donc identique à celui employé avec capital fixe à ceci près qu'au lieu de faire varier r , c'est ici la variable q qui est incrémentée jusqu'à ce que l'on détermine par interpolation linéaire la valeur particulière de q , q^* qui annule la variable z . A chaque nouvelle valeur de q correspond un nouveau vecteur \mathbf{X}^* donc une nouvelle répartition K_i des capitaux. Ces valeurs de K_i nouvelles déterminent à leur tour une nouvelle valeur de la variable r utilisée dans l'équation aux valeurs propres.

$$z = KT - \sum_i K_i q (e_i x_1 + c_i x_2 + v_i x_3)$$

Les algorithmes des processus avec ou sans capital fixe sont représentés dans les figures 2 et 3 de l'annexe. La figure 1 de l'annexe montre la construction des systèmes à partir de la table des valeurs qui est la donnée du problème. Cette table correspond à une répartition à priori arbitraire des capitaux mais reflète les coefficients socio-techniques.

2. Paramètres des simulations

Paramètres des simulations E-1-a :

Pour cette simulation nous reprenons les coefficients socio-techniques de l'exemple du tableau 5 avec le capital fixe qui est à zéro. Le capital total engagé, alors de 754.147032 (um) est constant. Le capital de la branche 2 de valeur initiale 385 (um) est décrémenté de 0.0025 (um) à chaque itération les taux de profit r_1 et r_3 des branches 1 et 3 sont imposés de façon à ce que : $r_1 = r_2 + \Delta r_1$ et $r_3 = r_2 + \Delta r_2$, r_2 servant de référence. Les capitaux des branches 1 et 3 ainsi que r_2 sont calculés par l'algorithme principal de façon à respectées les égalités fondamentales et la différence imposée des taux de profit. A la première itération le taux de profit r_1 est le plus grand avec $\Delta r_1 = +0.001$. Le facteur Δr_1 est ensuite décrémenté à chaque itération de 0.00001. Le taux de profit r_3 est le plus petit avec $\Delta r_3 = -0.001$, ce facteur étant incrémenté de 0.00001 à chaque itération. La simulation atteint le point où les trois taux de profit sont égaux entre la 99^{iem} et la 100^{iem} itérations. La simulation se termine à l'itération 120 (sur le graphique la première itération commence à zéro).

Paramètres des simulations E-1-b :

Par rapport aux coefficients socio-techniques de l'exemple du tableau 3, nous gardons la même durée d'amortissement du capital fixe avec $n=10$ cycles mais nous avons augmenté le capital fixe de la branche 1 de 100 unités monétaires (ce qui permet d'avoir aussi la branche 2 avec un taux de profit croissant, les conclusions de la simulation n'étant pas changées dans le cas contraire). Le capital total engagé est donc de 1100 (um) est constant. Nous avons diminué d'un facteur quatre les pas d'incrémentation par rapport à la simulation précédente. Le capital de la branche 2 de valeur initiale 385 (um) est décrémenté de 0.0025 (um) à chaque itération les taux de profit r_1 et r_3 des branches 1 et 3 sont imposés de façon à ce que : $r_1 = r_2 + \Delta r_1$ et $r_3 = r_2 + \Delta r_2$, r_2 servant de référence. Les capitaux des branches 1 et 3 ainsi que r_2 sont calculés par l'algorithme principal de façon à respectées les égalités fondamentales et la différence imposée des taux de profit. A la première itération le taux de profit r_1 est le plus grand avec $\Delta r_1 = 0.001$. Le facteur Δr_1 est ensuite décrémenté à chaque itération de 0.00001. Le taux de profit r_3 est le plus petit avec $\Delta r_3 = -0.001$, ce facteur étant incrémenté de 0.00001 à chaque itération. La simulation atteint le point où les trois taux de profit sont égaux entre la 99^{iem} et la 100^{iem} itérations. La simulation se termine à l'itération 120.