



HAL
open science

Résolution de problèmes d'ordonnancement sur machines parallèles par Inclusion-Exclusion

Olivier Ploton, Vincent t'Kindt

► **To cite this version:**

Olivier Ploton, Vincent t'Kindt. Résolution de problèmes d'ordonnancement sur machines parallèles par Inclusion-Exclusion. Congrès annuel de la ROADEF 2021, Apr 2021, Mulhouse (en ligne), France. hal-03455242

HAL Id: hal-03455242

<https://hal.science/hal-03455242>

Submitted on 5 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Résolution de problèmes d’ordonnancement sur machines parallèles par Inclusion-Exclusion

Olivier Ploton¹, Vincent T’kindt¹

Université de Tours, Laboratoire d’Informatique Fondamentale et Appliquée (LIFAT, EA 6300),
ERL CNRS 7002 ROOT, Tours, France
{olivier.ploton,vincent.tkindt}@univ-tours.fr

Mots-clés : *ordonnancement, algorithmique exponentielle, Inclusion-Exclusion.*

1 Introduction

Dans ce travail nous nous intéressons à deux types de problèmes d’ordonnancement impliquant n travaux dans un environnement à m machines parallèles indépendantes. Chaque travail i , lorsqu’il est traité par la machine j , est défini par une durée opératoire p_{ij} , une date de début r_{ij} et une date de fin impérative \tilde{d}_{ij} . Il lui est associé un coût f_{ij} qui est fonction de la date de fin C_{ij} . L’objectif est de minimiser le maximum ou la somme des coûts. Ces problèmes, notés $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|f_{\max}$ et $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|\sum f_{ij}$ ([3]), sont \mathcal{NP} -difficiles au sens fort.

Nous nous intéressons à la résolution exacte de ces problèmes et notamment à l’établissement de bornes sur les complexités temporelles et spatiales au pire cas. La taille d’une instance est son nombre de travaux n . La mesure d’une instance I est la somme des durées opératoires : $\|I\| = \sum p_{ij}$. De nombreux cas particuliers ont été étudiés, mais il existe peu de résultats dans le cas de fonctions de coûts arbitraires. Il est décrit dans [5] un algorithme résolvant les problèmes $P||f_{\max}$ et $P||\sum f_i$ avec une complexité spatiale et temporelle en $O^*(3^n)$.

Nous nous restreignons à des fonctions de coût régulières, dont le résultat est polynomial en la mesure de l’instance : $f_{ij} = O(\|I\|^{O(1)})$. C’est le cas des fonctions de coût classiques : la date de fin C_{ij} , le retard positif T_{ij} , l’indicateur de retard U_{ij} et n’importe quelle combinaison à coefficients positifs. Nous montrons, grâce à la technique d’Inclusion-Exclusion, que les problèmes $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|f_{\max}$ et $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|\sum f_{ij}$ peuvent être résolus avec une complexité temporelle pire cas en $O^*(2^n \|I\|^{O(1)})$ et en espace pseudo-polynomial.

L’intérêt de la formule d’Inclusion-Exclusion est qu’elle permet de décider si un problème admet une solution sans jamais en expliciter. Cette technique, décrite dans [2], a été appliquée à des problèmes de graphes \mathcal{NP} -difficiles comme les chemins hamiltoniens [1, 4], les arbres de Steiner et les correspondances parfaites [7]. Elle a été peu utilisée en ordonnancement ([4, 6]).

2 La technique d’Inclusion-Exclusion

La formule d’Inclusion-Exclusion peut s’appliquer à des ensembles de listes vérifiant un critère. Chaque ordonnancement S peut se représenter par une double liste $S = (i_{jk})_{j,k}$ constituée des travaux traités par chaque machine j , dans l’ordre chronologique k . Ordonnancer sur des machines parallèles est à la fois un problème d’affectation (machine affectée à chaque travail) et un problème de séquençement (ordre des travaux sur chaque machine).

La technique d’Inclusion-Exclusion se décompose en plusieurs phases. (1) Relâcher le problème en s’autorisant à dupliquer des travaux. (2) Compter le nombre d’ordonnements relâchés quand seulement certains travaux sont autorisés. (3) Appliquer la formule d’Inclusion-Exclusion pour compter le nombre d’ordonnements relâchés où tous les travaux apparaissent. (4) En déduire s’il existe un ordonnancement du problème initial.

Pour un critère de validité $\mathcal{V}(S)$ qui vérifie si l'ordonnancement relâché S a un objectif inférieur ou égal à une limite donnée, notant X l'ensemble des travaux autorisés, et assimilant une liste à l'ensemble de ses éléments, la formule d'Inclusion-Exclusion s'exprime comme suit :

$$\underbrace{\text{card} \{S \mid \mathcal{V}(S) \wedge \{1 \dots n\} \subset S\}}_{\text{nombre de solutions}} = \sum_{X \subset \{1 \dots n\}} (-1)^{n-|X|} \underbrace{\text{card} \{S \mid \mathcal{V}(S) \wedge S \subset X\}}_{N_X \text{ à calculer}} \quad (1)$$

Cette approche a deux avantages. (1) Elle transforme la partie séquençement, dont la résolution est en $O^*(n!)$, en $O^*(2^n)$ problèmes relâchés. (2) Un problème relâché sur m machines parallèles se réduit à m problèmes indépendants à une seule machine, dont chacun est résoluble en temps et espace pseudo-polynomial.

3 Application aux problèmes à machines parallèles

Grâce à la technique d'Inclusion-Exclusion, on résout le problème de décision : étant donné une instance I et une limite ε , déterminer s'il existe ou non un ordonnancement d'objectif ε ou moins. Mais le dénombrement est radicalement différent pour un objectif type maximum et type somme.

- Pour un objectif de type maximum, on détermine classiquement, pour chaque limite ε , le nombre d'ordonnements vérifiant $f_{max} \leq \varepsilon$.
- Pour un objectif de type somme, le dénombrement s'effectue sur tous les ε en même temps, c'est-à-dire sur la série génératrice du nombre d'ordonnements.

À partir du problème de décision, on détermine l'objectif optimum, i.e. la plus petite valeur ε pour laquelle il existe une solution. Puis on détermine une solution optimale comme suit : partir d'un ordonnancement vide. Parmi tous les travaux restant à placer, trouver le premier placement qui conduit à une solution, ce qui revient à décider si une sous-instance a une solution. Continuer jusqu'à ce que tous les travaux aient été placés.

4 Conclusion

L'algorithme présenté montre qu'il est possible de résoudre les problèmes $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|f_{max}$ et $R|r_{ij}, \tilde{d}_{ij}|\sum f_{ij}$ avec une garantie théorique de temps $O^*(2^n||I||^{O(1)})$ et un espace pseudo-polynomial. Cela constitue une première contribution de la formulation par Inclusion-Exclusion par rapport au résultat dans [5].

Références

- [1] E.T. Bax. Inclusion and exclusion algorithm for the Hamiltonian path problem *Information Processing Letters*, 47(4) : 203–207, 1993.
- [2] F.V. Fomin, D. Kratsch. Exact exponential algorithms. Springer, 2010.
- [3] R.L. Graham, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling Problems : a Survey. *Proceedings of the ARI on Discrete Optimization and Systems Applications*, Elsevier, (5) : 287–326, 1979.
- [4] R.M. Karp. Dynamic Processing meets the principle of inclusion and exclusion. *Operational Research Letters*, 1(2) : 49–51, 1982.
- [5] C. Lenté, M. Liedloff, A. Soukhal, V. T'Kindt. Exponential Algorithms for Scheduling Problems. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00944382>.
- [6] J. Nederlof. Inclusion-Exclusion for hard problems. Master Thesis, Utrecht University, 2008.
- [7] J. Nederlof. Fast Polynomial-Space Algorithms Using Inclusion-Exclusion. *Algorithmica*, 65 : 868–884, 2013.