



HAL
open science

西漢《算數書》中分數的不同表達形式和語境的關係 Rémi Anicotte

► **To cite this version:**

Rémi Anicotte. 西漢《算數書》中分數的不同表達形式和語境的關係. 出土文獻與考古學研究集刊 (第九期), 2019. ⟨hal-03452287⟩

HAL Id: hal-03452287

<https://hal.science/hal-03452287>

Submitted on 22 Dec 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

西漢《算數書》中分數的不同表達形式和語境的關係

安立明 (ANICOTTE Rémi) ①

摘要:張家山漢墓出土的西漢數學文獻《算數書》中表達分數的短語有 300 多例。因為研究這些短語的不同形式有益於了解秦漢文獻表達分數的特征,所以本文全面描述《算數書》中的這些短語,分析不同表達形式和語境的關係,並與傳世數學著作《周髀算經》《九章算術》進行比較。

關鍵詞:《算數書》;分數表達;表數短語;量詞;中文歷史

一、《算數書》中的分數

《算數書》是 1983—1984 年於湖北省張家山二四七號墓出土的數學文獻^②,共 190 條竹簡(收藏於荊州博物館),全書約 7000 個字。根據

①[法]安立明 (ANICOTTE Rémi),[法]東亞語言研究所(CRLAO)準成員。

②《算數書》釋文與注釋發表於江陵張家山漢簡整理小組《江陵張家山漢簡〈算數書〉釋文》,《文物》2000 年第 9 期;蘇意雯等《〈算數書〉校勘》,《HPM 通訊》2000 年第 11 期;張家山漢墓竹簡整理小組《張家山漢墓竹簡(二四七號墓)》,文物出版社,2001 年,頁 247—272;彭浩《張家山漢簡〈算數書〉注釋》,科學出版社,2001 年;郭書春《〈算數書〉校勘》,《中國科技史料》2001 年第 3 期;郭世榮《〈算數書〉勘誤》,《內蒙古師大學報(自然科學漢文版)》2001 年第 3 期;胡憶濤《張家山漢簡〈算數書〉整理研究》,西南大學碩士學位論文,2006 年,等等。《算數書》竹簡圖版可見於《張家山漢墓竹簡(二四七號墓)》,頁 83—98。

同墓出土的《曆譜》^①(公元前 202 年至前 186 年年曆)和《二年律令》^②(呂后二年,即公元前 186 年發佈)來推斷,《算數書》成書年代不晚於公元前 186 年。

楊玲榮女士統計了《算數書》有 328 例表達分數或表達比例的短語^③,而張家山二四七號墓出土的其他文獻(均非數學文獻)中一共只有 58 例。並且在嶽麓書院《數》^④、睡虎地《算術》^⑤兩部出土的秦漢數學文獻和出土的所有非數學秦漢文獻中所呈現的表達分數短語形式,與張家山《算數書》相同。綜上所述,《算數書》在研究西漢分數表達方面具有很大的價值。

《算數書》表達的分數類型均是真分數(即分子小於分母)和帶分數(即一個整數與一個真分數的和),表達的分數值較豐富,例如《算數書》簡 4 上有 $1/50$ 、簡 55 有 $12/18$ 、簡 92 有 $47/98$ 、簡 20 有 $162/2016$ 。這裏我用了阿拉伯數字來寫分數,但是簡文不使用任何表達數字的符號,而只用了屬於自然語言的短語。

一般來說,如果想表達一個分數 a/b ,那麼要說出它的分母 b 和分子 a 兩個整數,因此構成包含兩個整數名的短語,我將該形式定義為“二維”短語。不過,如果分子是 1,或者說要表達的分數是單位分數 $1/b$,則文中可以使用表達分子“一”的二維短語,或者可以使用只表達分母 b 的簡略短語。由於這些簡略短語只包含一個數名,因此我將該形式定義為“一維”短語。不管是一維或二維短語,分母 b 後一般會出現一個“分”字,因此構成“ b 分”^⑥。短語“ b 分”正好是單位分數 $1/b$ 的一維表

①《曆譜》竹簡圖版與釋文分別可見於張家山漢墓竹簡整理小組《張家山漢墓竹簡(二四七號墓)》,頁 3—4 和頁 127—130。

②《二年律令》竹簡圖版與釋文分別可見於《張家山漢墓竹簡(二四七號墓)》,頁 7—50 和頁 131—210。

③楊玲榮《張家山漢簡數量詞與稱數法研究》,華東師範大學博士學位論文,2008 年。

④肖燦《嶽麓書院藏秦簡〈數〉研究》,湖南大學博士學位論文,2010 年。

⑤《算術》圖版和釋文目前未公佈。參見熊北生、楊文清、陶漢橋等《湖北云夢睡虎地 M77 發掘簡報》,《江漢考古》2008 年第 4 期。

⑥我們較難判斷“分”在短語“ n 分”中的語法作用,所以也許最好先將它看作虛詞。

達形式。表達分子的那個整數名“a”必放在“b分”後面。如果是二維短語，則構成“b分a”形式的短語。另外，根據語境，“之”字可以出現在“b分”和分子“a”之間，即構成“b分之a”形式的短語。除了一、二維短語之外，文獻還呈現出三個專門用於表達 $1/2$ 、 $1/3$ 和 $2/3$ 的短語，分別是“半”“少半”和“大半”。

《算數書》中表達分數 a/b 的二維短語有一個值得關注的特征，它們是離合短語，如果有量詞^①或名詞，那麼要出現在“b分”和分子a之間，構成短語“分母b分+名詞或量詞+分子a”。這個短語形式與現代漢語的一般表達形式很不一樣，現在要表達分數 $2/5$ 即說“五分之二”，量詞和名詞只能放在短語前後，比如“總數的五分之二”“五分之二升水”。但是，《算數書》中的二維短語不一定會出現“之”字，如果出現，那麼必放在名量詞和分子a之間，這樣構成短語“b分+名詞或量詞+之a”。

郭書春先生^②和楊玲榮女士^③在他們各自的研究中提到了《算數書》中表達分數的短語形式，但是沒有分析各個短語形式出現的條件。本文要補充這一點，全面描述《算數書》中表達分數的短語形式，並且研究這些短語形式的出現和語境的關係。我將彭浩先生2010年分享的《算數書》釋文的電子文本直接資料化，然後用軟件搜索“分”“之”和“半”這三個字在《算數書》中出現的所有情況。我通過研究分析把所有例句和短語分類並且淘汰非短語形式出現的情況，比如“分”字的名詞和動詞用法（分別意為分數和分割）或“之”字的第三人稱代詞用處。除

①《算數書》中的量詞是計量單位。長度單位有寸、尺、步、丈和里，也有韋（圍），圓周長計量單位，1韋（圍）是直徑為1尺的圓周長。還有面積計量單位畝和頃（《算數書》中1頃=100畝），在一些語境當中長度單位可以用於計量面積，比如“一尺”可指一平方尺。容量計量單位有升、斗和石。《算數書》中唯一出現的體積計量單位是尺，在有關語境中“一尺”指的是一立方尺。重量單位有朱（銖）、兩、斤、鈞和石。可見“石”字可指最大的重量單位和最大的容量單位，似乎要等王莽掌權年代才會開始用斛代替石作為最大容量單位。

②郭書春《試論〈算數書〉的理論貢獻與編纂》，《法國漢學》2002年第6期。

③楊玲榮《張家山漢簡數量詞與稱數法研究》，華東師範大學博士學位論文，2008年。

此之外,本人精讀整個電子文本,發現了一些短語形式的特殊情況,將在下文作詳細解釋,並且通過上述方法確定半自動化的研究方法沒有出現漏洞^①。

二、分數 $1/2$ 、 $1/3$ 和 $2/3$ 的兩種表達形式

《算數書》中表達 $1/2$ 只有“半”字,整個文本中沒有出現“二分”這個詞組。但是,表達 $1/3$ 和 $2/3$ 時,分別使用詞彙化短語“少半”和“大半”,也可以選擇使用含短語“三分”的一般表達形式。

“半”“少半”和“大半”三個詞彙化詞組分別表達 $1/2$ 、 $1/3$ 和 $2/3$ 三個精確數值,這一點由例句(1)–(3)證明。另外,例句(4)證明它們可以出現在表達帶分數的短語裏。在這種情況下沒有固定的順序,例如《算數書》簡 26 可見“半少半”順序(即 $1/2$ 與 $1/3$ 的和),簡 23 卻是“少半半”順序(即 $1/3$ 與 $1/2$ 的和)。另外,例句(5)和(6)證明了這些詞組具有動詞功能,表達所說的分數值乘後敘的數^②。而例句(7)–(10)證明了它們可以直接出現在量詞前邊。

(1)一半乘一,半也,乘半,四分之一也(《算數書》簡 3,意為“1 乘 $1/2$ 等於 $1/2$, $1/2$ 乘 $1/2$ 等於 $1/4$ ”)

(2)少半乘少半,九分一也(《算數書》簡 8,意為“ $1/3$ 乘 $1/3$ 等

^① ANICOTTE, Rémi(安立明)“Fractions in the Suan Shu Shu (China, Beginning of the 2nd Century BCE)”(《西漢出土文獻〈算數書〉分數表達》),《中國語言學報》(香港中文大學) 2017 年第 1 期。另外, ANICOTTE, Rémi(安立明)“Bidimensional Expressions Of Fractions in Chinese”(《中文表達分數的二維短語》), *Cahiers de Linguistique Asie Orientale*, Leiden: Brill, 2015。此文介紹過漢語表達分數的一、二維短語的特征和歷史演變。

^② 秦漢整數名也有這個語法功能,這裏不詳談,可參見 ANICOTTE, Rémi(安立明)“Chinese Names for Integers”(《中文稱整數法》), XU Dan(徐丹)、FU Jingqi(傅京起), *Space and Quantification in Languages of China*, Berlin: Springer, 2015, pp. 117–138。

於 $1/9$ ”)

(3) 少半乘大半，九分二也(《算數書》簡 8，意為“ $1/3$ 乘 $2/3$ 等於 $2/9$ ”)

(4) 五人分三有(又)半少半各受卅(三十)分之廿(二十)三(《算數書》簡 26，意為“五個人[平]分 $3+1/2+1/3$ ，各個得到 $23/30$ ”^①)

(5) 可半，半之(《算數書》簡 17，意為“可以乘以 $1/2$ 的數即以 $1/2$ 乘它”^②)

(6) 半母亦半子(《算數書》簡 19，意為“將分母乘以 $1/2$ ，同樣也將分子乘以 $1/2$ ”^③)

(7) 半步乘半步四分一(《算數書》簡 8，意為“ $1/2$ 步乘以 $1/2$ 步等於 $1/4$ [平方步]”)

(8) 二斗泰(大)半斗(《算數書》簡 52，意為“2 斗又 $2/3$ 斗”)

(9) 粟十六斗泰(大)半斗(《算數書》簡 88，意為“有粟 16 斗又 $2/3$ 斗”)

(10) 米六斗泰(大)半斗(《算數書》簡 89，意為“有米 6 斗又 $2/3$ 斗”)

表達 $1/3$ 和 $2/3$ 使用了“三分”，參見例句(11)和(12)，前者沒有量詞，後者反而有。

(11) 三分而乘一，三分一也(《算數書》簡 3，意為“ $1/3$ 乘 1 等於 $1/3$ ”)

(12) 七斗三分升一(《算數書》簡 119，意為“7 斗又 $1/3$ 升”)

表達 $1/3$ 的短語一共有 43 例。包含“少半”的短語有 24 例，其中有 15 例是和名詞或量詞一起出現的。包含“三分”的短語有 19 例，其中有 2 例短語是和計量單位一起出現的。

① 分數 $23/30$ 是 $(3+1/2+1/3) \div 5$ 的結果。

② 或者說“可以除以 2 的數即將它除以 2”，是約分時候使用的運算。

③ 或者說“將分母除以 2，同樣也將分子除以 2”。

表達 $2/3$ 的短語一共有 7 例。包含“大半”的短語有 4 例，見上文例句(3)(8)(9)(10)，其中(8)－(10)3 例和量詞一起出現。包含“三分”的短語有 3 例，其中有 2 例和量詞一起出現。

所以，綜上所述《算數書》中有 50 例表達 $1/3$ 或 $2/3$ 的短語，其中有 28 例使用了詞彙化短語，22 例使用了包含“三分”的非詞彙化短語，見表 1。

表 1:《算數書》中表達 $1/3$ 和 $2/3$ 的不同形式

	少半和大半	三分	
有名詞或量詞	18	4	22
無名詞或量詞	10	18	28
總數	28	22	50

根據表 1 的數據顯示，當表達 $1/3$ 或 $2/3$ 的短語不和名詞或量詞一起出現時，約有 64% 處使用了“三分”，當表達 $1/3$ 或 $2/3$ 的短語和名詞或量詞一起出現時，約有 82% 處使用了“少半”或“大半”。以上概率數據突出了詞彙化短語和非詞彙化短語的分佈與語境有一定的關聯。

三、單位分數 $1/n$ 的一般表達形式

(一)一維短語“n 分”表達單位分數

單位分數是 $1/n$ 形式的分數，它們的分子為 1，分母可以為任何一個整數。《算數書》和其他秦漢出土文獻表達單位分數時，一般使用“n 分”形式的短語^①，而分子 1 可以省略。該書中表達單位分數的 131 例

^①《算數書》中有且只有兩處直接使用了整數名表達了分數，分別是簡 9 上的“四乘五分廿(二十)分一”(意為“ $[1/4]4$ 乘 $1/5$ 等於 $1/20$ ”)用了四表達四分；簡 9—10 上的“六分乘七卅(四十)二分一”(意為“ $1/6$ 乘 $[1/7]$ 等於 $1/42$ ”)用了七表達七分。“分”字省略了，但是語境使得我們理解。

短語中有 83 例(即約 63%)省略了分子 1,便形成了一維短語。

《算數書》中有 82 例一維短語表達單位分數(包含重複的一維短語),其中有 8 例跟名詞或量詞一起出現,分別是:“三分寸”1 例,意為“ $1/3$ 寸”,見《算數書》簡 2;“八分寸”1 例,意為“ $1/8$ 寸”,見簡 2;“四分寸”1 例,意為“ $1/4$ 寸”,見簡 4;“五分寸”1 例,意為“ $1/5$ 寸”,見簡 4;“六分寸”1 例,意為“ $1/6$ 寸”,見簡 4;“六分尺”1 例,意為“ $1/6$ 尺”,見簡 4;“九分朱(銖)”1 例,意為“ $1/9$ 銖”,見簡 29。其餘 75 例不跟名詞或量詞一起出現,分別是:“三分”16 例,意為“ $1/3$ ”,見簡 3、5、6、24、27、139、168、169、170、171、172、174、176 及 179;“四分”15 例,意為“ $1/4$ ”,見簡 3、5、6、9、14、27、169、171、172、174、176 和 179;“五分”14 例,意為“ $1/5$ ”,見簡 5、6、8、9、14、170、171、172、174、176 和 179;“六分”10 例,意為“ $1/6$ ”,見簡 9、10、171、172、174、176 及 179;“七分”9 例,意為“ $1/7$ ”,見簡 5、9、10、172、174、176 和 179;“八分”5 例,意為“ $1/8$ ”,見簡 10、174、176 和 179;“九分”2 例,意為“ $1/9$ ”,見簡 176、177;“十分”2 例,意為“ $1/10$ ”,見簡 179、180;“百分”2 例,意為“ $1/100$ ”,見簡 14、16。

(二)“分母 + 分(+ 量詞)(+ 之) + 一”二維短語

《算數書》中有 48 例表達單位分數 $1/n$ 的二維短語(包含重複的短語),其中有:1. “n 分 + 一”共 25 例^①;2. “n 分 + 名詞或量詞 + 一”共 12 例;3. “n 分 + 名詞或量詞 + 之 + 一”共 11 例。據我觀察《算數書》中沒有“n 分 + 之 + 一”形式的短語出現,但是在其他秦漢出土文獻中卻有出現,比如嶽麓書院《數》簡 0778 有“卅(三十)分之一”,意為“ $1/30$ ”^②。

1. 形式“n 分 + 一”有 25 例,有的相同:“三分一”1 例,意為“ $1/3$ ”,

①張家山二四七號漢墓竹簡整理小組《張家山漢墓竹簡(二四七號墓)》、彭浩《張家山漢簡〈算數書〉注釋》和胡憶濤《張家山漢簡〈算數書〉整理研究》,都認為“分母 n + 分 + 一”一些短語中的“分”字後脫了一個名量詞,然後他們在釋文裏補充恰當的名量詞。如果是論語義,那麼可以接受這些觀點和做法。但是,如果是論原文句法的正確性,那麼我們不必做任何修正,而要接受在秦漢的漢語裡,“分母 n + 分 + 一”作為一個又普遍又完整的分數表達形式。楊玲榮《張家山漢簡數量詞與稱數法研究》頁 17—19,已經提出了這一點。

②肖燦《嶽麓書院藏秦簡〈數〉研究》,湖南大學博士學位論文,2010 年,頁 51。

見《算數書》簡 3;“四分之一”3 例,意為“ $1/4$ ”,見簡 3、4 與 8;“五分之一”1 例,意為“ $1/5$ ”,見簡 5;“六分之一”2 例,意為“ $1/6$ ”,見簡 3、8;“八分之一”1 例,意為“ $1/8$ ”,見簡 46;“九分之一”2 例,意為“ $1/9$ ”,見簡 3、8;“十分之一”1 例,意為“ $1/10$ ”,見簡 5;“十二分之一”1 例,意為“ $1/12$ ”,見簡 5;“十五分之一”1 例,意為“ $1/15$ ”,見簡 6;“十六分之一”2 例,意為“ $1/16$ ”,見簡 5、9;“廿(二十)分之一”2 例,意為“ $1/20$ ”,見簡 6、9;“廿(二十)五分之一”2 例,意為“ $1/25$ ”,見簡 6、8—9;“卅(三十)分之一”1 例,意為“ $1/30$ ”,見簡 9;“卅(三十)分六一”1 例,意為“ $1/36$ ”,見簡 9;“卅(四十)二分一”1 例,意為“ $1/42$ ”,見簡 10;“卅(四十)九分一”1 例,意為“ $1/49$ ”,見簡 9;“五十六分之一”1 例,意為“ $1/56$ ”,見簡 10;“𠄎(七十)八分一”1 例,意為“ $1/78$ ”,見簡 5。簡 46 上的“八分之一”是動詞“得”的賓語的一個成分^①。其他 24 例都是乘法的結果,一般這些結果後面有“也”字(有 4 例除外),這樣乘法和乘積構成判斷句,可見以上例句(1)(2)(7)(11)。

2. “n 分十名量詞十一”共 12 例,包含重複,見例句(13)–(24)。前 7 例都是乘法的結果,都出現在“也”字前邊,都與在它們前邊的計算構成判斷句。(22)中的分數是名量判斷句的謂語。而(20)(21)(23)(24)中的分數都出現在動詞賓語中。

(13)十分尺一也(《算數書》簡 1,意為“是 $1/10$ 尺”)

(14)廿(二十)分尺一也(《算數書》簡 1,意為“是 $1/20$ 尺”)

(15)卅(三十)分尺一也(《算數書》簡 2,意為“是 $1/30$ 尺”)

(16)八十分尺一也(《算數書》簡 2,意為“是 $1/80$ 尺”)

(17)卅(四十)分尺一也(《算數書》簡 4,意為“是 $1/40$ 尺”)

(18)五十分尺一也(《算數書》簡 4,意為“是 $1/50$ 尺”)

(19)六十分尺一也(《算數書》簡 4—5,意為“是 $1/60$ 尺”)

(20)得一錢五分錢一(《算數書》簡 33,意為“得到 1 錢又 $1/5$ 錢”)

^①該“八分之一”出現於“得十三錢八分一”中,意為“得 13 錢又 $1/8$ 錢”,也就是說它是動詞“得”賓語中的一個成分。

(21) 爲三百廿(二十)三、八分簡一^①(《算數書》簡 71, 意爲“生產 323 又 $1/8$ 簡”)

(22) 挈脂十斤十二兩十九銖(銖)五分朱(銖)一(《算數書》簡 79, 意爲“有挈脂 10 斤 12 兩 19 銖又 $1/5$ 銖”)

(23) 直(置)十升以乘七步四分步一(《算數書》簡 86—87, 意爲“[把算籌]放下[用于表示]10 升乘 7 步又 $1/4$ 步”)

(24) 精之爲七斗三分升一(《算數書》簡 119, 意爲“精磨它產出 7 斗 $1/3$ 升”)

3. 形式“n 分 + 量詞 + 之 + 一”共 11 例, 包含重複, 見例句(25) — (30), 都分別和在它們前邊的名詞構成名量判斷句。

(25) 稗五分升之一(《算數書》簡 100, 意爲“有稗 $1/5$ 升”)

(26) 稗米四分升之一(《算數書》簡 101—102 共有 4 例, 意爲“有稗米 $1/4$ 升”)

(27) 毀(穀)米四分升之一(《算數書》簡 102 和 104 共有 2 例, 意爲“有穀米 $1/4$ 升”)

(28) 毀(穀)四分升之一(《算數書》簡 103 有 2 例, 意爲“有穀 $1/4$ 升”)

(29) 米六升四分升之一(《算數書》簡 121, 意爲“有米 6 升又 $1/4$ 升”)

(30) 從(縱)一步六分步之一(《算數書》簡 162, 意爲“長爲 1 步又 $1/6$ 步”)

(三) 表達單位分數時選擇一維或二維短語的原因

秦漢出土文獻中, 當單位分數是一個計算的結果時, 分子 1 經常會出現。但是, 當單位分數是一個乘法運算中的因數時, 分子 1 經常被省略, 我們可以比較以上例句(1)(2)(7)(11)和以下例句(31)(32)的乘法

^① 表達帶分數時, 整數部分與真分數之間經常會出現名詞、量詞或“又”字。但是這裏沒有任何字來分開整數 323 和分數 $1/8$ 的分母 8, 於是在釋文裡加上了一個頓號, 以便減少閱讀障礙。

運算中的因數和積的不同表達形式推測該結論。

(31)四分乘四分,十六分一(《算數書》簡 9,意為“ $1/4$ 乘 $1/4$ 等於 $1/16$ ”)

(32)五分寸乘尺,五十分尺一也(《算數書》簡 4,意為“ $1/5$ 寸乘[1]尺等於 $1/50$ [平方]尺”^①)

四、表達非單位分數的二維短語

表達非單位分數時,一般需要表達分母和分子兩個整數,所以只能使用二維形式^②,是因為無法省略分子。

《算數書》中有 97 例二維短語表達非單位分數(包含重複),其中有:1. 形式“分母+分+分子”共 12 例^③;2. 形式“分母+分+名詞或量詞+分子”共 42 例;3. 形式“分母+分+之+分子”共 7 例^④;4. 形式“分母+分+名詞或量詞+之+分子”共 36 例。

短語中名詞或量詞的出現跟要表達的信息有關,更值得關注的是名詞或量詞在短語中的位置。還有一個值得研究的問題是,為什麼有時會出現一個“之”字?

另外,除了表達分數的二維短語,《算數書》中也有一些表達比例的

①可以理解成一個面積的計算,或者兩個計量單位換算的一種表達方式。

②只有 $2/3$ 可以使用二維形式或者選擇使用詞彙化的特殊短語“大半”來表達。

③我認為楊玲榮《張家山漢簡數量詞與稱數法研究》頁 17—19 所提出的觀點是正確的,不要在“分母+分+分子”形式的一些短語中加上語境所提供的一個名詞或量詞。我認為“分母+分+分子”是秦漢語言的正常表達形式。我放棄了張家山二四七號漢墓竹簡整理小組《張家山漢墓竹簡(二四七號墓)》、彭浩《張家山漢簡〈算數書〉注釋》、胡憶濤《張家山漢簡〈算數書〉整理研究》對原文的有關修正方案的建議。

④與上同理,我認為不要在“分母+分+之+分子”形式的短語中添加語境所提供的名詞或量詞。

二維短語：“名詞₁ + 整數₁ + 名詞₂ + 整數₂”，見下文例句(33)和(34)^①。我認爲不能把這些表達比例的二維短語看作分數的一種表達形式，兩者的區別在於分數是獨立的一個數，而比例是兩個獨立數之間的關係。例句(33)的意思是 2 石草料中，有 3 份芻和 2 份稟。如果用分數來表達，可以解釋爲 2 石草料中有 $\frac{3}{5}$ 芻和 $\frac{2}{5}$ 稟。例句(34)的意思是 10 斗糧食中有 1 份米和 2 份粟。若用分數來表達，也可以說 10 斗糧食中有 $\frac{1}{3}$ 米和 $\frac{2}{3}$ 粟。但是，原文沒有選擇使用分數來表達這些代表比例的數值，所以我認爲不能把這類表達形式和分數的表達形式混合在一起。

(33) 芻稟二石，今芻三而稟二(《算數書》簡 52，意爲“有 2 石草料，其中有 3 份芻和 2 份稟”)

(34) 米一粟二凡十斗(《算數書》簡 119，意爲“1 份米和 2 份粟湊成了 10 斗糧食”)

(一) 表達非單位分數的“分母 + 分 + 分子”形式的 12 例短語

有“九分二”表達“ $\frac{2}{9}$ ”，1 例，見簡 8。

有“五分二”表達“ $\frac{2}{5}$ ”、“六分三”表達“ $\frac{3}{6}$ ”、“三分二”表達“ $\frac{2}{3}$ ”、“十分八”表達“ $\frac{8}{10}$ ”、“十二分七”表達“ $\frac{7}{12}$ ”，共 5 例，見簡 22—23，表達了一則加法運算的五個項。

(35) — (40) 例句中有 6 例。其中(35)(36)(40)例句中有 3 例是動詞(包括“曰”字)的賓語，而(37) — (39)例句中有 3 例均是名量判斷句的謂語。

(35) 益之幾何而爲九分七(《算數書》簡 30，意爲“要加上多少纔能湊成 $\frac{7}{9}$?”)

(36) 狐出十二、**𠂔**(七十)二分十一，狸出八、分卅(四十)九，犬出四、分十二(《算數書》簡 36—37，意爲“以狐皮的名義付出 12 又 $\frac{11}{72}$ ，以狸皮的名義付出 8 又 $\frac{49}{72}$ ，以犬皮的名義付出 4 又 $\frac{4}{72}$ ”)

^①《算數書》還有 13 例該形式短語，本文沒有列出，可以參見楊玲榮《張家山漢簡數量詞與稱數法研究》頁 15—16。

12/[72]”)①

(37)禾租四斗卅(四十)七分十二,麥租三斗、分九,荅租二斗、分廿(二十)六(《算數書》簡 43—44,意為“禾稅為 4 斗又 12/47 [斗],麥稅為 3 斗又 9/[47][斗],荅稅為 2 斗又 26/[47][斗]”)②

(38)稗七斗五分三(《算數書》簡 135,意為“有稗 7 斗又 3/5 [斗]”)

(39)糲二斗五分二(《算數書》簡 136,意為“有糲 2 斗又 2/5 [斗]”)

(40)曰:四韋(圍)二寸廿(二十)五分十四(《算數書》簡 154,意為“答案為 4 圍 2 寸又 14/25[寸]”)

(二)表達非單位分數的短語形式“分母 + 分 + 名詞或量詞 + 分子”42 例

一共 42 例均列在以下(41)–(81)例句中,其中有 15 例是名量判斷句中的謂語,有 27 例作為動詞的賓語(包括有 8 例出現在“曰”字後)。

(41)曰:二錢六十分錢五十七(《算數書》簡 23,意為“答案為 2 錢又 57/60 錢”)

(42)得一錢卅(三十)分錢十七(《算數書》簡 23—24,意為“得到 1 錢又 17/30 錢”)

(43)金三朱(銖)九分朱(銖)五(《算數書》簡 28,意為“有金 3 銖又 5/9 銖”)

(44)今欲出其七分朱(銖)六(《算數書》簡 28,意為“現在要出其中的 6/7 銖”)

①只有第一個分句“狐出十二_卅(七十)二分十一”包含一個普通的二維短語表達分數 11/72,而後兩個分句裏又省略了分母 72,“分卅(四十)九”和“分十二”分別表達 49/72 和 12/72。我只統計了完整的第一個短語。

②只有第一個分句“禾租四斗卅(四十)七分十二”包含一個普通的二維短語表達分數 12/47,而後兩個分句省略了分母 47,“分九”和“分廿(二十)六”分別表達 9/47 和 26/47。我只統計了完整的第一個短語。

(45) 金二朱(銖)六十三分朱(銖)卅(四十)四(《算數書》簡 28, 意為“有金 2 銖又 $44/63$ 銖”)

(46) 益之六十三分朱(銖)廿(二十)二(《算數書》簡 30, 意為“給它加上 $22/63$ 銖”)

(47) 得五分錢四(《算數書》簡 33, 意為“得到 $4/5$ 錢”)

(48) 犬出十五錢七分六, 狸出卅(三十)一錢分五, 狐出六十三錢分三(《算數書》簡 34—35, 意為“犬皮納稅 15 錢又 $6/7$ 錢, 狸皮納稅 31 錢又 $5/[7]$ 錢, 狐皮納稅 63 錢又 $3/[7]$ 錢”)①

(49) 始織一寸六十二分寸卅(三十)八(《算數書》簡 40, 意為“第一天織 1 寸又 $38/62$ 寸”)

(50) 次三寸六十二分寸十四(《算數書》簡 40—41, 意為“第二天[織]3 寸又 $14/62$ 寸”)

(51) 次六寸六十二分寸廿(二十)八(《算數書》簡 41, 意為“第二天[織]6 寸又 $28/62$ 寸”)

(52) 次尺二寸六十二分寸五十六(《算數書》簡 41, 意為“第二天[織][1]尺 2 寸又 $56/62$ 寸”)

(53) 次尺五寸六十二分寸五十(《算數書》簡 41, 意為“第二天[織][1]尺 5 寸又 $50/62$ 寸”)

(54) 曰: 二斗三升十一分升八(《算數書》簡 48, 意為“答案為 2 斗 3 升又 $8/11$ 升”)

(55) 曰: 一兩十一朱(銖)百卅(四十)四分朱(銖)九十二(《算數書》簡 50, 意為“答案為 1 兩 11 銖又 $92/144$ 銖”)

(56) 得一錢百一十四分錢卅(七十)一(《算數書》簡 57, 意為“得到 1 錢又 $71/114$ 錢”)

(57) 有卅(四十)分斗五(《算數書》簡 59, 意為“有 $5/40$ 斗”)

(58) 得四錢八分錢三(《算數書》簡 59, 意為“得到 4 錢又 $3/8$ 錢”)

① 只有第一個分句“犬出十五錢七分六”包含一個普通的二維短語表達分數 $6/7$, 但後兩個分句省略了分母 7, “分五”和“分三”分別表達 $5/7$ 和 $3/7$ 。我只統計了完整的第一個短語。

(59)曰:八寸十一分寸二(《算數書》簡 61—62,意為“答案為 8 寸又 $2/11$ 寸”)

(60)賈(價)十八錢十一分錢九(《算數書》簡 62,意為“價格為 18 錢又 $9/11$ 錢”)

(61)曰:廿(二十)五分錢廿(二十)四(《算數書》簡 64,意為“答案為 $24/25$ 錢”)

(62)漆(漆)卅(三十)七分升卅(三十)(《算數書》簡 66,意為“有漆(漆) $30/37$ 升”)

(63)水二升卅(三十)七分升七(《算數書》簡 66—67,意為“有水 2 升又 $7/37$ 升”)

(64)曰:七步卅(三十)七分步廿(二十)三(《算數書》簡 68,意為“答案為 7 步又 $23/37$ 步”)

(65)為二百五簡八分簡七(《算數書》簡 70,意為“生產 205 簡又 $7/8$ 簡”)

(66)負十七筭(算)二百六十九分筭(算)十一(《算數書》簡 73,意為“付 17 算又 $11/269$ 算”)

(67)曰:百三錢四百卅(三十)分錢九十(《算數書》簡 76,意為“答案為 103 錢又 $90/430$ 錢”)

(68)水三斗四分升三(《算數書》簡 80—81,意為“有水 3 斗又 $3/4$ 升”)

(69)減田十一步有(又)九十七分步 **𠂔**(七十)九步(《算數書》簡 84,意為“減田為 11 步又 $79/97$ 步”^①)

(70)減田十一分步五(《算數書》簡 85,意為“減田為 $5/11$ 步”)

(71)得十一步有(又)九十八分步卅(四十)七(《算數書》簡 92,意為“得到 11 步又 $47/98$ 步”)

(72)曰:九步五分步三(《算數書》簡 96,意為“答案為 9 步又 $3/5$ 步”)

^① 例句裏的第三個“步”字似乎是多餘的,不過這一點並不影響該短語的類型。

(73) 稗卅(三十)二分升九(《算數書》簡 103, 意為“有稗 $9/32$ 升”)

(74) 米七分升六(《算數書》簡 113, 意為“有米 $6/7$ 升”)

(75) 粟七分升六(《算數書》簡 115, 意為“有粟 $6/7$ 升”)

(76) 米一升七分升三(《算數書》簡 115, 意為“有米 1 升又 $3/7$ 升”)

(77) 積二千五十五尺卅(三十)六分尺廿(二十)(《算數書》簡 149, 意為“體積為 2055 [立方]尺又 $20/36$ [立方]尺”)

(78) 大四章(圍)二寸廿(二十)五分寸十四(《算數書》簡 153, 意為“大為 4 圍 2 寸又 $14/25$ 寸”^①)

(79) 方七寸五分寸三(《算數書》簡 153 和 154, 2 例, 意為“方為 7 寸又 $3/5$ 寸”)

(80) 從(縱)九十七步有(又)百卅(四十)七分步百卅(四十)一(《算數書》簡 171—173^②, 意為“長為 97 步又 $141/147$ 步”)

(81) 方十五步卅(三十)一分步十五(《算數書》簡 185, 意為“方為 15 步又 $15/31$ 步”)

(三) 表達非單位分數的短語形式“分母 + 分 + 之 + 分子”7 例

一共 7 例均列在以下(82)—(87)例句中。其中(82)裏第一個表達分數的短語是句中的主題, (87)是一個名量判斷句中的謂語, 其他都是動詞的賓語。

(82) 二千一十六分之百六十二, 約之百一十二分之九(《算數書》簡 20, 包含 2 例, 意為“有分數 $162/2016$, 把它約分得到 $9/112$ ”^③)

(83) 各受卅(三十)分之廿(二十)三(《算數書》簡 26, 意為“各個得到 $23/30$ ”^④)

① 這裏“大”指的是圓周長。“圍”是用於衡量圓周長的計量單位, 1 圍是直徑為 1 尺的圓周長, 參見彭浩《張家山漢簡〈算數書〉注釋》, 頁 82。

② 簡的準確順序是 171—173—172。

③ 例句中分數“百一十二分之九”是分句“分之”的謂語。

④ 例句中的帶分數“卅(三十)分之廿(二十)三”是動詞“受”的賓語。

(84)得_脂(脂)^①九分之五(《算數書》簡 82,意為“得到脂肪 5/9”^②)

(85)為十三盧唐四分之三(《算數書》簡 129—130,意為“生產竹筒 13 個又 3/4”^③)

(86)求田七分之四(《算數書》簡 162,意為“求面積為 4/7”^④)

(87)其從(縱)廿(二十)一分之十六(《算數書》簡 162,意為“它的長為 16/21”^⑤)

(四)表達非單位分數的短語形式“分母十分十名詞或量詞十之十分子”³⁶ 例

一共 36 例均列在以下(88)—(123)例句裏面。其中,有 3 例分別是動詞的賓語,33 例分別是名量判斷句中的謂語。

(88)金七分朱(銖)之三(《算數書》簡 30,意為“有金 3/7 銖”)

(89)長者受十六尺有(又)十八分尺之十二(《算數書》簡 55,意為“長者得到 16 尺又 12/18 尺”)

(90)少者受八尺有(又)十八分尺之六(《算數書》簡 55,意為“少者得到 8 尺又 6/18 尺”)

(91)稗十分升之三(《算數書》簡 98,意為“有稗 3/10 升”)

(92)米十五分升之四(《算數書》簡 98,意為“有米 4/15 升”)

(93)粟廿(二十)七分升之十(《算數書》簡 99,意為“有粟 10/27 升”)

①參見彭浩《張家山漢簡〈算數書〉注釋》,頁 76。

②例句中的名量短語“_脂(脂)九分之五”是動詞“得”的賓語。

③例句中的分數“十三盧唐四分之三”是動詞“為”的賓語。

④例句中的名量短語“田七分之四”是動詞“求”的賓語。根據上下文得知該短語指的是 4/7 平方步的面積,但是,例句未出現計量單位,所以可以判斷該語的形式是“分母十分十名詞或量詞十之十分子”。

⑤例句中的分數“廿(二十)一分之十六”和“其縱”構成了主謂語法關係。根據上下文得知該短語指的是 16/21 步,但是,例句未出現計量單位,所以可以判斷該語的形式是“分母十分十之十分子”。

- (94) 米九分升之二(《算數書》簡 99, 意為“有米 $2/9$ 升”)
- (95) 毀(穀)卅(四十)五分升之八(《算數書》簡 100, 意為“有穀 $8/45$ 升”)
- (96) 粟五十四分升之廿(二十)五(《算數書》簡 101, 意為“有粟 $25/54$ 升”)
- (97) 米十八分升之五(《算數書》簡 101, 意為“有米 $5/18$ 升”)
- (98) 毀(穀)米九分升之二(《算數書》簡 102, 意為“有穀米 $2/9$ 升”)
- (99) 麥十二分升之五(《算數書》簡 102, 意為“有麥 $5/12$ 升”)
- (100) 米十六分升之五(《算數書》簡 102—103, 意為“有米 $5/16$ 升”)
- (101) 麥卅(三十)二分升之十五(《算數書》簡 103, 意為“有麥 $15/32$ 升”)
- (102) 粟卅(四十)八分升之廿(二十)五(《算數書》簡 104, 意為“有粟 $25/48$ 升”)
- (103) 粟七百八十九分升之五百(《算數書》簡 105, 意為“有粟 $500/789$ 升”)
- (104) 粟一升二百六十三分之二百卅(三十)七(《算數書》簡 105—106, 意為“有粟 1 升又 $237/263$ 升”)
- (105) 粟一斗九升有(又)二百六十三分升之三(《算數書》簡 106, 意為“有粟 1 斗 9 升又 $3/263$ 升”)
- (106) 粟十九斗有(又)二百六十三分升之卅(三十)(《算數書》簡 106, 意為“有粟 19 斗又 $30/263$ 升”)
- (107) 粟百 𠄎 (七十)一分升之百(《算數書》簡 107, 意為“有粟 $100/171$ 升”)
- (108) 粟一升有(又)二百八十五分升之二百 𠄎 (七十)五(《算數書》簡 107, 意為“有粟 1 升又 $275/285$ 升”)
- (109) 粟十七升有(又)二百八十五分升之百五十(《算數書》簡

108, 意為“有粟 17 升又 $150/285$ 升”)

(110) 粟十七斗五升有(又)二百八十五分升之百廿(二十)五
(《算數書》簡 108, 意為“有粟 17 斗 5 升又 $125/285$ 升”)

(111) 米卅(四十)六石廿(二十)七分石之八(《算數書》簡 146,
意為“有米 46 石又 $8/27$ 石”)

(112) 廣八分步之六(《算數書》簡 162, 意為“寬為 $6/8$ 步”)

(113) 廣七分步之三(《算數書》簡 162, 意為“寬為 $3/7$ 步”)

(114) 求田四分步之二(《算數書》簡 162, 意為“求面積為 $2/4$
[平方]步”)

(115) 從(縱)百卅(三十)步有(又)十一分步之十(《算數書》簡
168, 意為“長為 130 步又 $10/11$ 步”)

(116) 從(縱)百一十五步有(又)廿(二十)五分步之五(《算數
書》簡 169, 意為“長為 115 步又 $5/25$ 步”)

(117) 從(縱)百五步有(又)百卅(三十)七分步之十五(《算數
書》簡 170, 意為“長為 105 步又 $15/137$ 步”)

(118) 從(縱)九十二步有(又)千八十九分步之六百一十二
(《算數書》簡 172—183^①, 意為“長為 92 步又 $612/1089$ 步”)

(119) 從(縱)八十八步有(又)二千二百八十三分步之六百九
十六(《算數書》簡 175, 意為“長為 88 步又 $696/2283$ 步”)

(120) 從(縱)八十四步有(又)七千一百廿(二十)九分步之五
千七百六十四(《算數書》簡 177—178, 意為“長為 84 步又 $5764/7129$
步”)

(121) 從(縱)八十一步有(又)七千三百八十一分步之六千八
百三十九(《算數書》簡 180—181, 意為“長為 81 步又 $6839/7381$
步”)

(122) 廣七步卅(四十)九分步之□□□□□□(《算數書》簡

①簡的準確順序是 172—183。

183, 意為“長為 7 步又 $\square^{\text{①}}$ /49 步”)

(123) 為 $\square^{\text{②}}$ 六十四步有(又)三百卅(四十)三分步之二百卅(七十)三(《算數書》簡 183, 意為“做 64 步又 $273/343$ [平方] 步的 [面積]”)

五、表達分數形式的選擇和語法的關係

《算數書》中的二維短語“分母 + 分(+ 名詞或量詞)(+ 之) + 分子”表達單位分數(分子為“一”字, 有 48 例)和非單位分數(分子為不等於 1 的整數, 有 97 例)一共 145 例, 其中有 54 例使用了一個“之”字。我沒有發現“之”字和量詞的出現有什麼聯繫, 但是卻發現了“之”字的出現和表達分數的短語在句中所起的語法作用似乎有一些聯繫。

表 2 列出了幾項互斥的語境, 還列出了例句中“之”字在各個語境中出現的次數。

表 2 《算數書》中表達單位和非單位分數的二維短語

	無“之”字	有“之”字	
分句做主題: “主題, 約之……”	0	1	1
乘法運算的因數	0	0	0
加法運算中的項	5	0	5
乘法運算的積	32	0	32
動詞(包括“曰”字)的賓語	34	8	42
名量判斷句的謂語	20	45	65
總數	91	54	145

① 因為是真分數, 所以這裏只能是 1 到 48 的整數。

② 根據語境, 我猜測這裏應該是一個“積”字, 指的是面積。

我發現,當表達分數短語是名量判斷句的謂語時,約有 70% 的概率出現“之”字;當表達分數短語是動詞的賓語時,約有 80% 的概率出現“之”字。綜上所述,我認為“之”字的出現和語法有一定的聯繫,但由於當時的語言文化所導致語句的未規範化,使得“之”字的使用以及分佈比較靈活。

六、與傳世文獻進行比較

《周髀算經》和《九章算術》是漢代成書的兩部傳世數學著作。兩部書中也出現了分別表達 $1/2$ 、 $1/3$ 和 $2/3$ 的特殊短語“半”“少半”和“大半”。而表達分數短語的一般形式為“分母+分(+名詞或量詞)+之+分子”。該形式的特征是:1. 必定包含“之”字;2. 單位分數的分子 1 不能省略;3. 名詞和量詞必定出現在“分”字後面。這些特征和秦漢出土文獻中表達分數的形式有一些共同點。其一,短語“n 分”是不可分割的,甚至可以說是一個完整的數名,可以直接出現在名詞和量詞前面。其二,分別表達 $1/2$ 、 $1/3$ 和 $2/3$ 的特殊短語“半”“少半”和“大半”和“n 分”短語一樣也可以直接出現在名詞或量詞前面。其三,表達分數的二維短語中的名詞或量詞都出現在“分”字後面,分子放在最後。但是,與傳世文獻比起來,出土文獻中的分數表達形式更加豐富,例如“之”字的用法、單位分數中省略分子的做法(特別是運算的結果中)、例句(36)(37)(48)中一些分數的表達形式省略了分母的做法,以及帶分數中可選性地使用或不使用“又”字連接整數部分與真分數部分的做法。

在秦漢出土文獻的語言中似乎存在着一個規律:當表達分數短語是名量判斷句的謂語時,“之”字即經常出現;而當表達分數短語是一個動詞的賓語時,“之”字卻較少出現。怎麼解釋這個現象呢?公認短語中的“之”字會強調該短語的分句性,於是我推測當時的人們根據語法

環境靈活地選擇是否使用“之”字來使判斷句或動賓句的表達更加順暢。

《周髀算經》與《九章算術》全部採用二維形式短語，包括了單位分數，另外所有短語都使用了“之”字。我認爲是作者有意將表達分數的形式規範化，而並不是因爲語言的演變。數學術語表達的規範化也許讓人們的表達或者理解過程更加簡潔，也有可能方便了當時的教學事業。但是不要誤解，出土文獻已經可以證明秦漢人對分數的理解和運用已經相當成熟，表達形式的規範化並不意味着概念上的演化，更談不上進化，而是語言標準化和規範化的一個表現。