



HAL
open science

Instabilités par couplage de modes d'un système masse ressort en contact frottant : comparaison entre le frottement plan et le frottement rectiligne

Lucien Charroyer, Olivier Chiello, Jean-Jacques Sinou

► To cite this version:

Lucien Charroyer, Olivier Chiello, Jean-Jacques Sinou. Instabilités par couplage de modes d'un système masse ressort en contact frottant : comparaison entre le frottement plan et le frottement rectiligne. CFM 2015 - 22ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2015, Lyon, France. 11 p. hal-03446506

HAL Id: hal-03446506

<https://hal.science/hal-03446506>

Submitted on 24 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Instabilités par couplage de modes d'un système masse ressort en contact frottant : comparaison entre le frottement plan et le frottement rectiligne

L. CHARROYER^{a,b,c}, O. CHIELLO^{b,c}, J-J. SINOU^{a,c}

a. LTDS, UMR 5513, Ecole Centrale de Lyon, 69134 Ecully,

lucien.charroyer@doctorant.ec-lyon.fr, jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr

b. IFSTTAR, AME, LAE, F-69675 Bron, olivier.chiello@ifsttar.fr

c. Centre Lyonnais d'Acoustique, Université de Lyon, F-69622 Lyon

Résumé :

Ce papier propose d'étudier un système amorti simple à trois degrés de liberté en frottement afin de constater les différences de stabilité, liées au couplage de modes, entre le frottement plan et le frottement rectiligne. En calculant les valeurs propres complexes du système linéarisé et en utilisant le critère de Routh-Hurwitz, les zones de stabilité sont tracées en fonction des paramètres du système ainsi que les parties réelles des valeurs propres et les fréquences pour certains cas. Sans amortissement, les résultats montrent que les zones d'instabilité obtenues avec le frottement plan sont plus étendues que celles correspondant au frottement rectiligne mais ce résultat n'est plus vrai lorsque l'on ajoute de l'amortissement. Par ailleurs, quand le système est instable avec les deux hypothèses, les parties réelles des valeurs propres obtenues avec le frottement plan sont plus faibles que celles correspondant au frottement rectiligne ce qui signifie que le système avec frottement plan est moins déstabilisé.

Abstract:

In this paper, the study of a damped system of three degrees of freedom with friction is proposed in order to highlight the differences on mode coupling instabilities between planar and rectilinear friction assumptions. By calculating the complex eigenvalues of the linearized system and by using the Routh-Hurwitz criterion, stability areas, real parts of the eigenvalues and frequencies are plotted against the system parameters. Without damping, the results indicate that the unstable areas obtained with planar friction are generally larger than those corresponding to rectilinear friction but this result is no true with damping. In addition, when the system is unstable for the two assumptions, the real parts of the eigenvalues obtained with planar friction are smaller than those corresponding to rectilinear friction which means that the system with planar friction is less destabilized.

Mots clefs : dynamique des structures, frottement, instabilité, amortissement.

1 Introduction

La détermination du comportement vibratoire de structures déstabilisées par le frottement est au cœur de nombreux problèmes industriels. Dans le domaine des transports par exemple, on peut évoquer les bruits de crissement émis par les systèmes de freinage [1, 2, 3] ou générés dans les courbes au niveau des contacts roue/rail pour ce qui concerne le ferroviaire [4]. La réduction durable de ces bruits et des nuisances occasionnées passe par la compréhension des mécanismes de génération qui leur sont propres, en premier lieu les phénomènes vibratoires d'instabilités et de vibrations auto-entretenues.

Les chemins menant à ce type de vibrations pour les systèmes mécaniques frottant sont multiples et ont été étudiées par de nombreux auteurs [5, 6, 7]. Si l'on s'en tient aux explications purement structurales – c'est-à-dire découplées au maximum des effets tribologiques ou thermiques par exemple – on peut distinguer deux grands types de déstabilisation liée au frottement. Toutes deux peuvent être mises en évidence avec une simple loi de frottement de Coulomb mais l'une nécessite un coefficient de frottement diminuant avec la vitesse de glissement tandis que l'autre se satisfait d'un coefficient de frottement constant. La première peut apparaître dans un système à un seul degré de liberté alors qu'au moins deux degrés de liberté – deux modes – ainsi qu'un couplage intrinsèque entre les dynamiques normales et tangentielles du système sont indispensables à la deuxième : l'instabilité est alors associée à une bifurcation par couplage de modes et c'est ce cas qui nous intéresse ici.

Des modèles minimaux, académiques, exhibant ce type d'instabilité peuvent être trouvés facilement dans la littérature [8, 9, 10]. Ils permettent de comprendre en profondeur les ressorts et les caractéristiques du phénomène avant de passer à des applications plus concrètes. Dans [9] par exemple, Hoffman *et al* étudient ces instabilités pour un système simple à deux degrés de liberté sans amortissement. Dans [8], l'effet de l'amortissement est illustré sur ces instabilités pour un système à deux degrés de liberté. Dans ces travaux, le contact de la masse avec le plan frottant s'effectue par le biais d'une raideur de contact. C'est un choix relativement courant dans ce type de modèle simple, mais aussi dans des modèles plus élaborés, qui peut s'expliquer aussi bien par des considérations physiques (l'élasticité locale du contact) que calculatoires (la force de frottement est directement liée au déplacement normal local ce qui simplifie la mise en équation du problème). Le cas d'un contact imposé de manière cinématique, bilatéral ou unilatéral si l'on souhaite prendre en compte les phénomènes de décollement, a été moins étudié. Par ailleurs, si l'on se restreint, comme dans les modèles cités plus haut, à un degré de liberté tangent au contact, c'est-à-dire à un frottement rectiligne, il n'est pas possible d'expliquer certains phénomènes liés à la nature intrinsèquement plane de la loi de frottement de Coulomb, en particulier le fait que la direction de l'effort de frottement varie avec les vibrations de la structure. Un modèle très simple permettant de combiner ces deux caractéristiques (pas de raideur de contact et frottement plan) est celui proposé par Moiroit dans sa thèse [11]. Pour ce système à trois degrés de liberté (réduit à deux une fois le contact imposé pour l'étude de stabilité), Moiroit étudie les zones d'instabilités par couplage de modes en fonction des différents paramètres, en particulier le coefficient de frottement. Les différences entre le frottement plan et le frottement rectiligne sont mises en évidence mais seulement dans le cas non amorti et en terme de zone d'instabilité ce qui le conduit à conclure à l'effet déstabilisant du frottement plan. Dans d'autres travaux cependant, en particulier pour des modèles plus complexes [12, 13], le frottement plan semble plutôt stabiliser le système.

Dans ce papier, l'objectif est de revenir sur les différences entre les deux hypothèses pour le modèle minimal proposé par Moiroit, mais en comparant les bifurcations résultantes et en ajoutant de l'amortissement dans le modèle ce qui nous conduit à une conclusion plus nuancée. Une description et une mise en équation de la dynamique du système en contact glissant est d'abord présentée. La linéarisation de la loi de frottement et l'imposition du contact permet ensuite d'aboutir à un système

linéaire du deuxième ordre à deux degrés de liberté dont les signes des parties réelles des valeurs propres complexes déterminent la stabilité de l'équilibre glissant. Le critère de Routh-Hurwitz est appliqué afin de déterminer les différentes zones de stabilité du système, amorti ou non amorti, avec l'hypothèse de frottement plan ou de frottement rectiligne. Les graphes de bifurcations du système amorti, en particulier l'évolution des parties réelles des valeurs propres avec le coefficient de frottement, sont enfin présentés pour différentes directions de la vitesse de glissement.

2 Formulation du problème

On considère le système décrit par la Figure 1. Il est composé d'une masse m en contact frottant avec un plan rigide en mouvement rectiligne de vitesse constante V . La masse est maintenue par trois raideurs et serrée contre le plan par un effort imposé F . Un amortissement iso-réparti est intégré au système comme le montre la Figure 1. La direction de la vitesse du frottement \vec{t} par rapport au repère du système est repérée par l'angle θ .

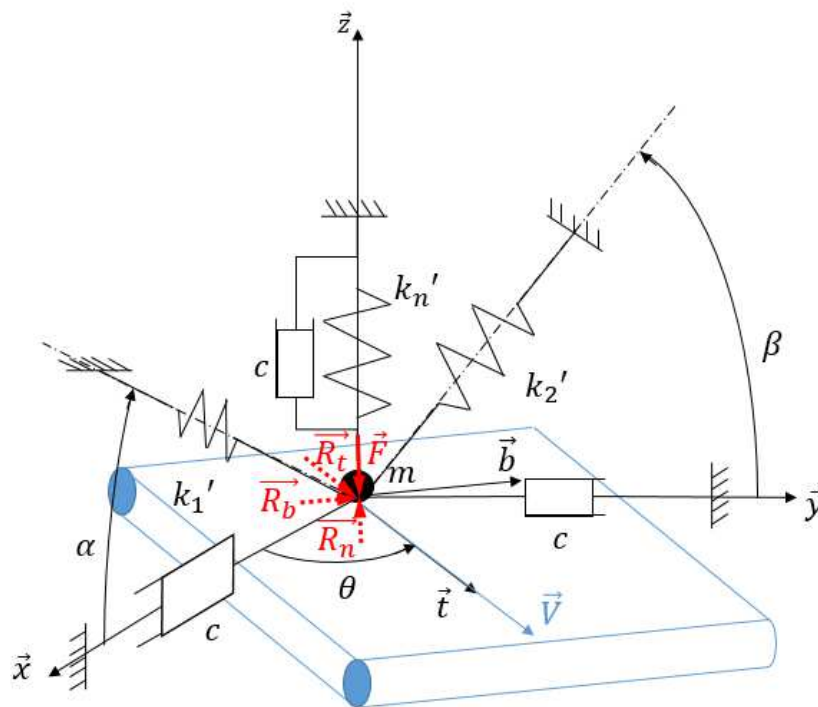


Figure 1 : Description du système mécanique.

On s'intéresse à la dynamique de la masse régie par l'équation :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} + \{F\}$$

où les composantes des vecteurs $\{U\} = (U_x \ U_y \ U_z)^T$ et $\{\dot{U}\}$ et $\{\ddot{U}\}$ sont, respectivement, les déplacements, les vitesses et les accélérations dans les trois directions \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} . Le vecteur $\{R\}$ contient la réaction de contact et l'effort de frottement qui s'appliquent sur la masse. La matrice de masse $[M]$, la matrice d'amortissement $[C]$, la matrice de raideur $[K]$ et le vecteur $\{F\}$ représentant l'effort appliqué sur le système sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_1 \tan \alpha \\ 0 & k_2 & k_2 \tan \beta \\ k_1 \tan \alpha & k_2 \tan \beta & k_n \end{bmatrix} \\
 \{F\} &= (0 \quad 0 \quad F_n)^T
 \end{aligned}$$

avec $k_1 = k'_1 \cos^2 \alpha$, $k_2 = k'_2 \cos^2 \beta$ et $k_n = k'_n + k_1 \tan^2 \alpha + k_2 \tan^2 \beta$. Le couplage entre les degrés de liberté normal et tangentiels est effectué par le biais des angles α et β . C'est une condition nécessaire à l'apparition d'instabilité par couplages de modes. Le choix de raideurs k'_1 et k'_2 orthogonales simplifie la mise en équation et la compréhension des phénomènes. Il permet d'obtenir des équations totalement découplées pour les deux degrés de liberté tangents – les deux modes concernés par le couplage de modes – lorsqu'il n'y a pas de frottement. Ce choix ne restreint pas la généralité des résultats, toute autre configuration pouvant se ramener à celle-ci avec un changement de repère approprié.

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse donc aux oscillations du système autour de la position d'équilibre glissant. Le contact est supposé *a priori* bilatéral et glissant et l'effort de frottement est donné par la loi de Coulomb en glissement avec un coefficient μ constant. Les équations relatives au contact frottant s'écrivent alors :

$$\begin{cases}
 \{R\} = [P_t]^T R_t + [P_b]^T R_b + [P_n]^T R_n \\
 U_z = 0 \\
 \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} = \mu R_n \frac{\begin{Bmatrix} v - \dot{U}_t \\ -\dot{U}_b \end{Bmatrix}}{\left\| \begin{Bmatrix} v - \dot{U}_t \\ -\dot{U}_b \end{Bmatrix} \right\|}
 \end{cases}$$

où $[P_t] = [\cos \theta \quad \sin \theta \quad 0]$, $[P_b] = [-\sin \theta \quad \cos \theta \quad 0]$ et $[P_n] = [0 \quad 0 \quad 1]$. R_t , R_b et R_n sont respectivement les deux composantes de l'effort de frottement et la réaction de contact qui s'exercent sur la masse dans les directions \vec{t} , \vec{b} et \vec{z} . $\dot{U}_t = [P_t]^T \{\dot{U}\}$ et $\dot{U}_b = [P_b]^T \{\dot{U}\}$ sont les vitesses de la masse dans les directions \vec{t} et \vec{b} . Les matrices $[P_t]$, $[P_b]$ et $[P_n]$ permettent de passer des efforts dans le repère local associé au frottement aux efforts dans le repère global. On note que le caractère plan du frottement rend la loi de frottement en glissement non linéaire, la direction de glissement pouvant varier. Dans le cas d'un frottement rectiligne, la composante de l'effort de frottement suivant \vec{b} est nulle et la loi de Coulomb en glissement s'exprime simplement par $R_t = \mu R_n$.

Le calcul de l'équilibre glissant du système (pour $\{\dot{U}\} = \{\dot{U}\} = \{0\}$) consiste à résoudre un système algébrique à trois degrés de liberté et ne pose pas de difficulté particulière. Selon les paramètres, cet équilibre glissant n'existe cependant pas toujours [11].

3 Stabilité de l'équilibre glissant du système frottant

Pour étudier la stabilité du système, il faut donc linéariser des forces de frottement autour de la position d'équilibre, ce qui donne (cf. [11] ou [12] pour plus de détails) :

$$\begin{cases} R_t = \mu R_n \\ R_b = -\mu \frac{R_n^e}{V} \dot{U}_b \end{cases}$$

où R_n^e est la réaction normale à l'équilibre. Dans le cas d'un frottement rectiligne, le terme R_b est alors négligé et on retrouve directement la loi de Coulomb. Le terme $-\mu \frac{R_n^e}{V} \dot{U}_b$, résultant de la linéarisation de la direction de glissement, apporte une contribution en vitesse à la réaction de contact lors d'un frottement plan, c'est-à-dire un terme d'amortissement. Cette contribution, qui augmente avec l'effort appliqué et diminue lorsque la vitesse de glissement augmente, sera par la suite prise en compte au travers de la matrice d'amortissement $[C_b]$.

La suite du calcul consiste à éliminer les autres réactions du problème pour obtenir une formulation uniquement en déplacement, vitesse et accélération dans le plan tangent. La première étape consiste à utiliser la nullité du déplacement normal pour exprimer R_n en fonction de $\{U_p\} = (U_x \ U_y)^T$:

$$R_n = [k_1 \tan \alpha \quad k_2 \tan \beta] \{U_p\}$$

La composante de la force de frottement R_t se déduit simplement de R_n et le système d'équations restreint au plan tangent peut s'écrire finalement :

$$[\tilde{M}] \{\ddot{U}_p\} + ([\tilde{C}] + [C_b]) \{\dot{U}_p\} + ([\tilde{K}] + [K_\mu]) \{U_p\} = 0$$

où $[\tilde{M}]$, $[\tilde{C}]$ et $[\tilde{K}]$ sont les restrictions des matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ au plan tangent, respectivement. Ces matrices sont diagonales : elles caractérisent les deux modes découplés qui conditionnent le comportement du système glissant sans frottement. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} [C_b] &= \mu [\tilde{P}_b]^T \frac{R_n^e}{V} [\tilde{P}_b] \\ [K_\mu] &= -\mu [\tilde{P}_t]^T [k_1 \tan \alpha \quad k_2 \tan \beta] \end{aligned}$$

où $[\tilde{P}_t] = [\cos \theta \quad \sin \theta]$ et $[\tilde{P}_b] = [-\sin \theta \quad \cos \theta]$ sont les restrictions dans le plan tangent de $[P_t]$ et $[P_b]$, respectivement. L'effet du frottement est donc lié aux deux matrices ci-dessus qui conduisent à un couplage des modes sans frottement, d'autant plus important que le coefficient de frottement μ est élevé. On constate que le couplage de modes dépend à la fois de la géométrie du système – le couplage intrinsèque caractérisé par les angles α et β – et de la direction de frottement par rapport au système caractérisé par l'angle θ .

La stabilité du système est analysée en calculant les valeurs propres complexes λ du système linéarisé, ce qui revient à résoudre l'équation caractéristique :

$$\det(\lambda^2 [\tilde{M}] + \lambda([\tilde{C}] + [C_b]) + ([\tilde{K}] + [K_\mu])) = 0$$

Si toutes les parties réelles des valeurs propres restent négative, l'équilibre du système est stable. En revanche, si au moins une des valeurs propres a sa partie réelle positive alors l'équilibre est instable. Les parties imaginaires de ces valeurs propres représentent les fréquences des modes instables et les parties réelles les divergences.

Afin de déterminer les zones de stabilité de l'équilibre du système en fonction des différents paramètres, le critère de Routh-Hurwitz est utilisé [14]. Le développement de l'équation caractéristique permet d'obtenir une équation polynomiale de degré 4.

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

L'application du critère de Routh-Hurwitz explicite le signe de la partie réelle des valeurs propres en fonction des quatre coefficients suivants :

$$\begin{aligned} a &= a_0 \\ b &= a_3 \\ c &= a_2a_3 - a_1 \\ d &= a_1(a_2a_3 - a_1) - a_0a_3^2 \end{aligned}$$

Si $a, b, c, d > 0$ alors $\forall i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ et l'équilibre du système est stable. Si $a, b, c > 0$ et $d = 0$ alors pour $i = (1, 2) \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ $\lambda_i \neq 0$ et pour $i = (3, 4) \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Si $a, b, c > 0$ et $d < 0$ alors pour $i = (1, 2) \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ et pour $i = (3, 4) \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ et l'équilibre du système est instable.

Par cette méthode, on peut déterminer les coefficients de frottement critiques μ_c , tel que $d(\mu_c) = 0$, où l'équilibre du système change de nature, c'est-à-dire passe de stable à instable ou de instable à stable (sans amortissement les expressions analytiques de μ_c sont explicitées dans la thèse de Moiroit [11]). Selon les cas, les coefficients de frottement critiques sont les racines d'un polynôme de degré 1 (frottement plan sans amortissement), de degré 2 (frottement rectiligne avec et sans amortissement) et de degré 4 (frottement plan avec amortissement). On note que dans ces deux derniers cas, si l'on obtient deux racines réelles et positives, il est possible pour le système de se restabiliser après avoir était instable. Les résultats ci-dessous illustrent notamment ce phénomène.

4 Résultats

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord nous intéresser aux zones de stabilité du système sous différentes configurations et ensuite analyser les phénomènes physiques de couplage de modes associés. Les paramètres choisis pour cette étude numérique sont : $m = 0.01 \text{ kg}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $k'_n = 20 \text{ N.m}^{-1}$, $V = 1 \text{ m.s}^{-1}$, $F = (0 \ 0 \ 10)^T \text{ N}$, $\omega_{0,1} = 2\pi \times 100 \text{ rad.s}^{-1}$, $\omega_{0,2} = 2\pi \times 75 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\eta = 0.02$. $\omega_{0,1}$ et $\omega_{0,2}$ sont les deux pulsations propres du système sans frottement dans les directions \vec{x} et \vec{y} . η est le facteur d'amortissement du premier mode. On a alors : $k_i = m \times \omega_{0,i}^2$ ($i = 1, 2$) et $c = m \times \eta \times \omega_{0,1}$.

4.1 Zones de stabilité

Dans cette partie, on s'intéresse aux zones de stabilité de l'équilibre du système tracées en fonction des paramètres μ et θ .

La Figure 2 illustre la différence entre les zones de stabilité pour un système non-amorti dans le cadre d'un frottement rectiligne et d'un frottement plan. Il est clair que le caractère plan du frottement déstabilise le système. En effet pour $\theta \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ le système non amorti avec un frottement rectiligne reste stable, ce qui n'est vrai pas pour le frottement plan. De plus pour $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}; 0\right]$ la zone de stabilité de l'équilibre du système non amorti avec un frottement plan est plus petite que celle avec un frottement rectiligne. Ainsi pour un système non amorti, l'ajout de la matrice $[C_b]$ déstabilise la solution statique de ce système. Dans ce quadrant, il est possible d'interpréter plus en détail le rôle de cette matrice. En effet, la contribution en amortissement apportée sur chacun des deux modes sans frottement diffère fortement en fonction de l'angle θ . On observe que lorsque θ vaut -45° , l'amortissement est iso-réparti et le système se trouve dans la situation « la plus stable » pour ce quadrant (c.a.d. que la valeur du coefficient de frottement qui déstabilise le système correspond à la valeur maximale des différentes configurations sur ce quadrant). Inversement lorsque θ s'approche de 0° et -90° , l'amortissement devient fortement non iso-réparti (l'amortissement apporté est très différent sur les deux modes) et la déstabilisation est maximale ce qui illustre le paradoxe déstabilisant par l'ajout de la contribution de la matrice d'amortissement $[C_b]$. Ces remarques sont en accord avec les conclusions présentées dans [8] sur le rôle de l'amortissement pour les instabilités par couplage de modes.

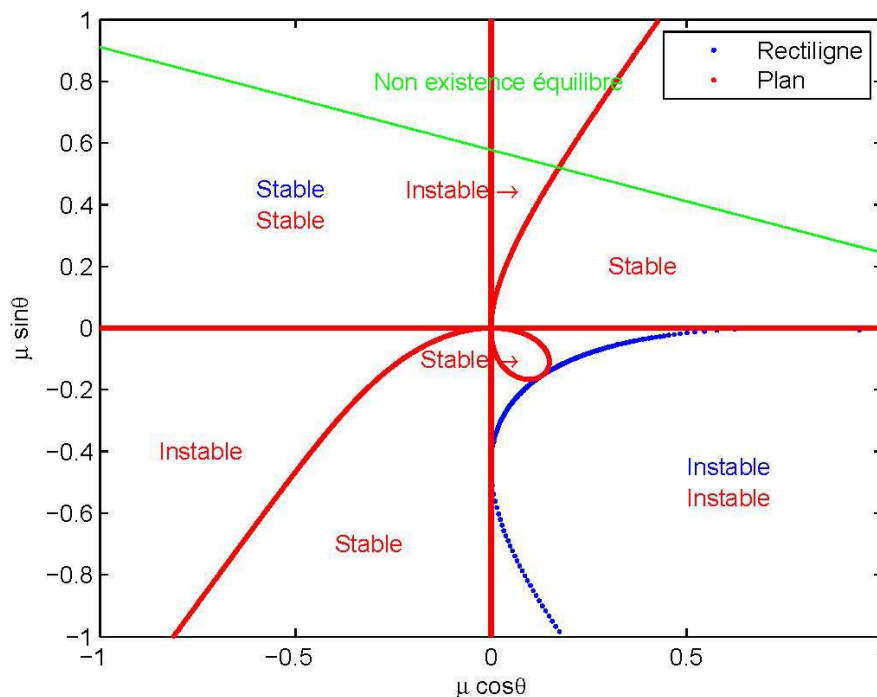


Figure 2 : Comparaison des zones de stabilité du système non amorti pour un frottement rectiligne et un frottement plan.

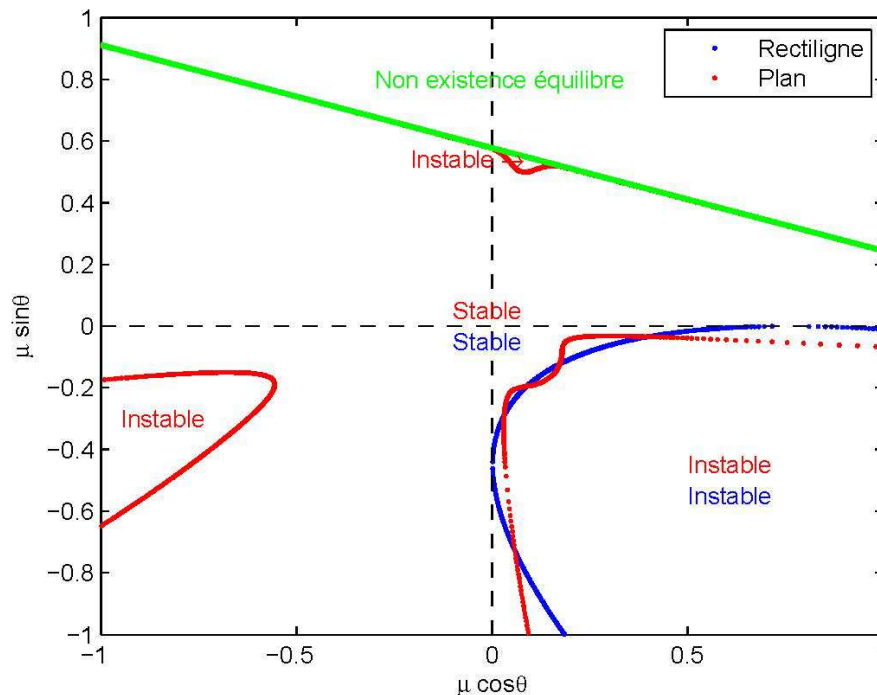


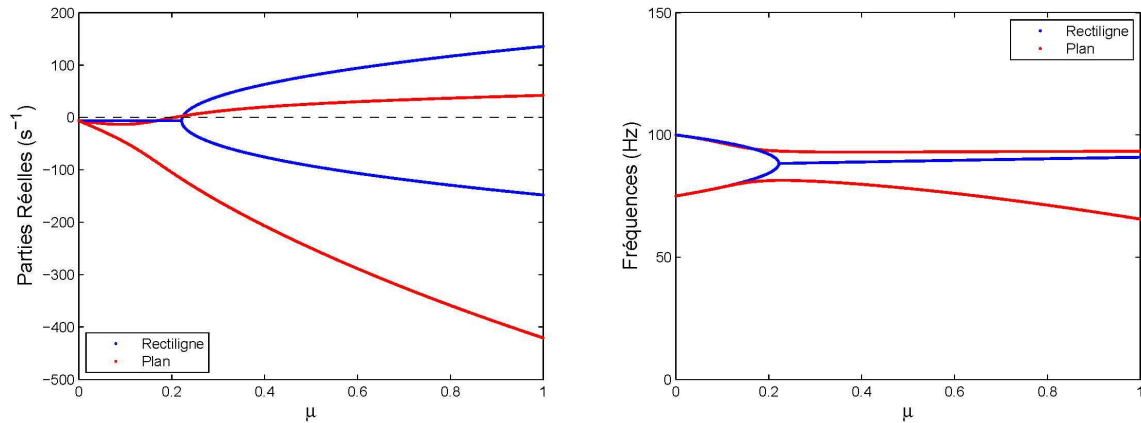
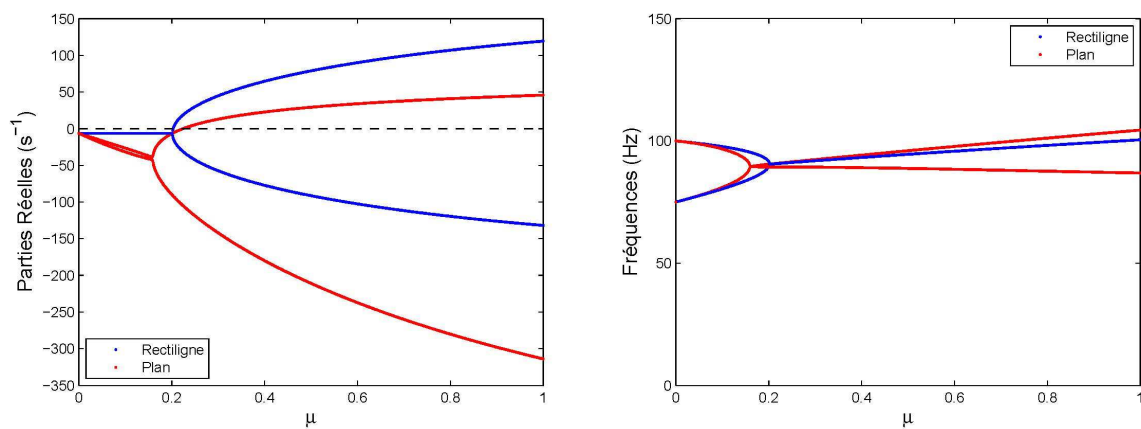
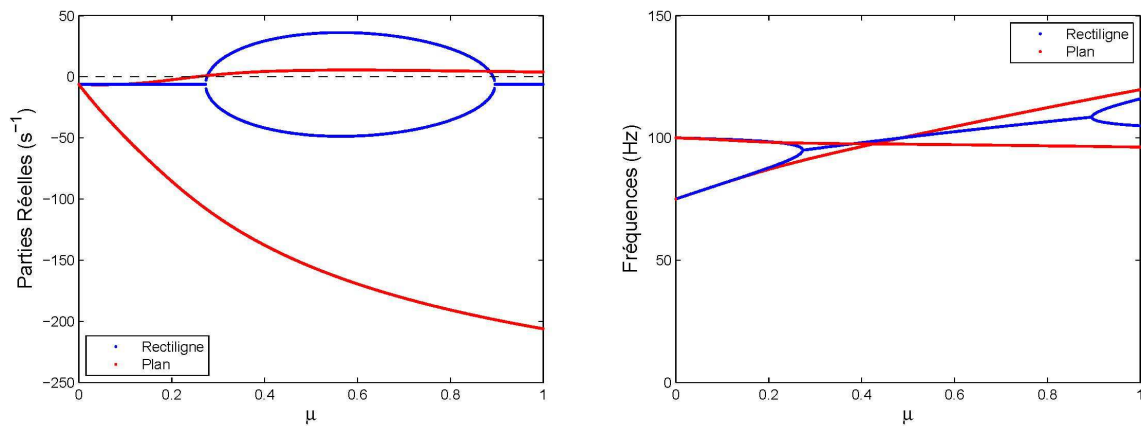
Figure 3 : Comparaison des zones de stabilité du système amorti pour un frottement plan et un frottement rectiligne.

La Figure 3 illustre la différence entre les zones de stabilité pour un système amorti dans le cadre d'un frottement rectiligne et d'un frottement plan. Pour $\theta \in [0; \frac{3\pi}{2}]$ le système amorti avec un frottement rectiligne reste stable, ce qui n'est pas vrai pour le frottement plan. Pour autant, les zones d'instabilités sont réduites comparé au frottement plan sans amortissement. Pour $\theta \in [\frac{-\pi}{2}; 0]$ il est possible de trouver une valeur de l'angle θ pour lequel le caractère plan du frottement est stabilisant comparé à un frottement rectiligne. L'ajout de l'amortissement permet de stabiliser, pour certaines directions de frottement, le système avec un frottement plan comparé au système avec un frottement rectiligne.

4.2 Bifurcations

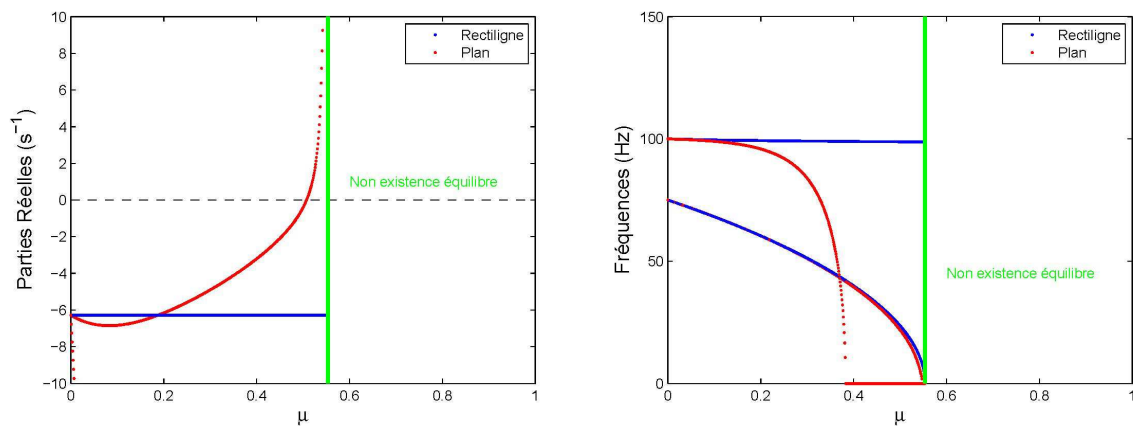
On illustre maintenant les phénomènes constatés dans la partie précédente en se focalisant sur la coalescence des modes. A cet effet, des bifurcations sont tracées pour montrer l'effet stabilisant ou non du caractère plan du frottement comparé au frottement rectiligne pour un système amorti. Pour chacun des graphiques la direction θ de la vitesse du plan est fixée.

Les Figures 4 et 5 représentent l'évolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres en fonction de μ pour $\theta = -30^\circ$ et $\theta = -50^\circ$, respectivement. La Figure 4 illustre l'effet déstabilisant du frottement plan comparé au frottement rectiligne pour un système amorti. En effet, la partie réelle du frottement plan devient positive pour un μ inférieur à celui du frottement rectiligne. Il y a coalescence des fréquences sans que celle-ci se croisent. La Figure 5 illustre l'effet stabilisant du frottement plan pour une direction $\theta = -50^\circ$. Contrairement au cas précédent, la partie réelle devient positive pour un μ supérieur à celui du frottement rectiligne. De plus lors de la coalescence des fréquences, celles-ci se croisent. Dans les deux cas, l'instabilité due au frottement plan et toutefois plus faible que celle due au frottement rectiligne : les parties réelles positives du frottement plan sont nettement inférieures à celle du frottement rectiligne.

Figure 4 : Parties réelles et fréquences pour $\theta = -30^\circ$ Figure 5 : Parties réelles et fréquences pour $\theta = -50^\circ$ Figure 6 : Parties réelles et fréquences pour $\theta = -82^\circ$

La Figure 6 illustre la possibilité de redevenir stable pour le frottement rectiligne avec amortissement. En effet le critère de Routh-Hurwitz, pour ce cas, donne un polynôme de degré 2 en μ avec la possibilité d'obtenir deux racines positives pour certaine direction de la vitesse. Ainsi pour un μ supérieur à la seconde racine, l'équilibre, s'il existe toujours, redevient stable. Sur la Figure 6, on constate qu'il existe un μ à partir duquel les parties réelles redeviennent négatives et les fréquences des modes redeviennent indépendantes.

Enfin, la Figure 7 illustre pour la direction $\theta = 80^\circ$ la possibilité d'obtenir une instabilité de divergence ($\omega = 0$) pour un μ inférieur au μ critique d'existence de l'équilibre. On constate que pour cette configuration l'instabilité de divergence est obtenue directement et non après une instabilité par flottement.

Figure 7 : Parties réelles et fréquences pour $\theta = 80^\circ$

5 Conclusion

Dans ce papier, les instabilités par couplage de modes d'un système frottant à trois degrés de liberté ont été étudiées. Le système proposé permet en particulier de prendre en compte l'aspect plan du frottement contrairement à des systèmes à deux degrés de liberté.

Dans le cas d'un système non amorti, le frottement plan a un caractère déstabilisant comparé au frottement rectiligne et ce dans n'importe quelle direction de glissement. En ajoutant de l'amortissement, le frottement plan devient en revanche stabilisant pour certaines directions. Ces conclusions s'entendent uniquement en termes de zones de stabilité. En effet, dans les zones instables, il apparaît que les parties réelles des valeurs propres complexes obtenues dans le cas d'un frottement plan sont inférieures à celles correspondant au frottement rectiligne, ce qui signifie que la montée initiale en divergence lors de l'apparition de l'instabilité est plus lente.

Par ailleurs, des phénomènes de re-stabilisation ont également été mis en évidence dans les cas d'un frottement plan avec amortissement et d'un frottement rectiligne avec ou sans amortissement.

Références

- [1] D.A. Crolla, A.M. Lang, Brake noise and vibration –state of art, Vehicle Tribology, Tribology Series, n°18, Leeds, England, p165-174.
- [2] N.M. Kinkaid, O.M. O'Reilly, P. Papadopoulos, Automotive disc brake squeal, Journal of Sound and Vibration 267, 2003, p105-166.
- [3] H. Ouyang, W. Nack, Y. Yuan, F. Chen, Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review, International Journal of Vehicle Noise and Vibration 1, 2005, p207-231.
- [4] O. Chiello, J-B Ayasse, N. Vincent, J-R Koch, Curve squeal of urban rolling –Part 3 : Theoretical model, Journal of Sound and Vibration 293, 2006, p710-727.
- [5] R.A. Ibrahim, Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos part II : Dynamics and modelling , Applied Mechanics Review 47, 1994, p227-253.
- [6] J.T Oden, J.A.C Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 52, 1987, p527-634.
- [7] A. Akay, Acoustics of friction, Journal of the Acoustical Society of America 111, 2002, p1252-1548.

- [8] J-J. Sinou, L. Jézéquel, Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping, *European Journal of Mechanics A/Solids*, n°26, 2007, p106-122.
- [9] N. Hoffmann, M. Fischer, R. Allgaier et L. Gaul, A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations, *Mechanics Research Communications*, n°29, 2002, p197-205.
- [10] U. Wagner, D. Hochlenert, P. Hagedorn, Minimal models for disk brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 302, 207, p527-539.
- [11] F. Moiro, Étude de la stabilité d'un équilibre en présence de frottement de Coulomb, Thèse, École Polytechnique, 1998.
- [12] X. Lorang, Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV, Thèse, École Polytechnique, 2004.
- [13] D. Brizard, O. Chiello, J-J. Sinou, X. Lorang, Performances of some reduced bases for the stability analysis of a disc/pads system in sliding contact, *Journal of Sound and Vibration* 330, 2011.p703-720.
- [14] G. Meinsma, Elementary proof of the Routh-Hurwitz test, *Systems and Control Letter* 25, n°4, 1995, p237-242.