



**HAL**  
open science

## Estimation du critère de plasticité de monocristaux poreux

Joseph Paux, Renald Brenner, Djimedo Kondo

► **To cite this version:**

Joseph Paux, Renald Brenner, Djimedo Kondo. Estimation du critère de plasticité de monocristaux poreux. CFM 2015 - 22ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2015, Lyon, France. hal-03446482

**HAL Id: hal-03446482**

**<https://hal.science/hal-03446482v1>**

Submitted on 24 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Estimation du critère de plasticité de monocristaux poreux

**J. Paux, R. Brenner, D. Kondo**

Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, UMR 7190,  
Institut Jean le Rond d'Alembert, F-75005, Paris, France  
joseph.paux@etu.upmc.fr

## **Résumé :**

*L'objectif de ce travail est de déterminer un critère de plasticité approché pour un monocristal poreux et de le comparer avec des résultats numériques pour une microstructure avec une répartition périodique de pores. A partir d'une forme régularisée du critère de Schmid, nous avons dérivé un critère phénoménologique en adoptant une approche cinématique d'analyse limite. Par ailleurs, des calculs numériques utilisant la méthode FFT ont été réalisés pour des microstructures poreuses soumises à des chargements axisymétriques et en faisant varier l'orientation cristalline. Les résultats obtenus pour des monocristaux cubiques et hexagonaux sont satisfaisants.*

## **Abstract :**

*This study is devoted to the derivation of a yield function for voided single crystals and to confront it with numerical calculus on periodic microstructure. By making use of a regularized form of the Schmid law, a phenomenological yield function has been obtained by a kinematic limit-analysis approach. Numerical calculus using the FFT-method has been carried out for axisymmetric loadings and different crystalline orientations. Comparison between yield function and numerical results lead to a good agreement.*

**Mots-clefs : Monocristal, Porosité, Analyse limite, Homogénéisation**

## périodique, Méthode FFT

### 1 Introduction

Ce travail est une contribution à l'étude de la rupture ductile de matériaux métalliques. La description de ce mode de rupture, contrôlé par la croissance de micro-cavités, nécessite de connaître la loi de comportement plastique de milieux cristallins poreux. Dans cette optique, la prise en compte de l'anisotropie plastique du monocristal apparaît essentielle. Le but de notre étude est de proposer un critère de plasticité analytique pour un matériau monocristallin contenant des trous de forme sphérique. Il existe actuellement un nombre assez restreint de travaux sur ce sujet [1, 2, 3].

L'approche que nous proposons repose sur l'utilisation d'une forme régularisée de la loi de Schmid (critère de plasticité du monocristal sain). Ceci nous permet de nous appuyer sur une forme de critère anisotrope existant issu d'une approche par analyse limite [4]. Une extension phénoménologique de ce critère est proposé en considérant le cas de chargements purement sphérique et déviatorique.

Afin d'évaluer la pertinence de ce critère, nous avons effectué des calculs numériques avec la méthode FFT [5] pour des monocristaux élastoplastiques avec une répartition périodique de trous sphériques. L'intégration de la loi constitutive élastoplastique est effectuée en ayant recours à un problème de minimisation pour déterminer l'état de contraintes plastiquement admissible et l'incrément de déformation plastique correspondant. Afin d'envisager différentes anisotropies plastiques, nous avons étudié des monocristaux de structure cubique et hexagonale.

### 2 Loi de Schmid régularisée

On considère un monocristal se déformant plastiquement par glissement de dislocations sur des plans cristallins particuliers. Le cristal présente  $K$  systèmes de glissement définis par un plan et une direction de glissement. Selon la loi de Schmid, le domaine de plasticité  $C$  du monocristal est défini par à l'aide d'une fonction seuil multi- critères

$$C = \{\boldsymbol{\sigma}, f_k(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, k = 1, \dots, K\}$$

avec  $f_k(\boldsymbol{\sigma}) = |\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mu}_k| - \tau_k^c$ .  $\boldsymbol{\mu}_k$  est le tenseur de Schmid du système de glissement

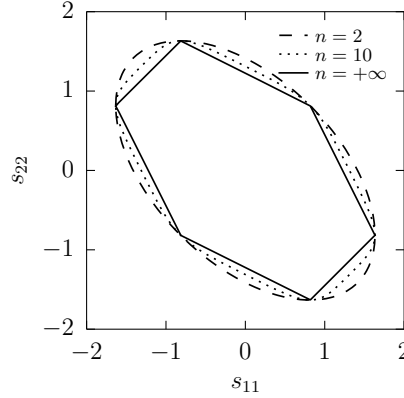


Figure 1: Coupe de la surface de plasticité dans le plan des contraintes déviatoriques ( $s_{11}$ ,  $s_{22}$ ). Le critère de Schmid  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  est en trait plein et le critère régularisé  $f_{reg}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ , pour différentes valeurs de  $n$ , en trait discontinu.

$k$  et  $\tau_k^c$  la cisssion critique associée. Le critère de plasticité du monocristal s'écrit donc

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sup_k f_k(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (1)$$

La régularisation de la loi de Schmid consiste à approcher la fonction seuil multi-critères  $f(\boldsymbol{\sigma})$  par une fonction différentiable et strictement convexe  $f_{reg}(\boldsymbol{\sigma})$  [6]

$$f_{reg}(\boldsymbol{\sigma}) = \left( \sum_k \left( \frac{|\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mu}_k|}{\tau_k^c} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \leq 0, \quad n \geq 2.$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la fonction  $f_{reg}(\boldsymbol{\sigma})$  tend vers  $f(\boldsymbol{\sigma})$ . Ce type de régularisation est illustré sur la Figure .

### 3 Approche par analyse limite

Afin d'obtenir un critère de plasticité approché pour le monocristal poreux, on propose de déterminer la contrainte maximale que peut supporter une sphère creuse monocristalline contenant un trou sphérique en son centre. Pour cela, nous adoptons la démarche d'analyse limite avec une approche cinématique suivant [7].

### 3.1 Présentation du problème

On considère une sphère creuse de volume  $\Omega$  et de porosité  $p$  (Figure 2) soumise sur sa surface externe  $\partial\Omega$  à un champ de vitesse de déformation homogène:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\cdot\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

avec  $\mathbf{v}$  le champ de vitesses et  $\mathbf{D}$  le tenseur de taux de déformation macroscopique imposé.

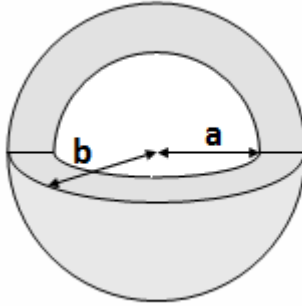


Figure 2: Cellule considérée pour l'analyse limite du monocristal poreux

Cette sphère est constituée d'une matrice monocristalline obéissant à la loi de Schmid régularisée. Dans la suite, nous illustrons notre démarche dans le cas particulier de monocristaux de symétrie cubique avec une cission critique égale sur tous les systèmes  $\tau_0^c$ . Il faut cependant noter que l'approche proposée est applicable au cas de monocristaux avec plusieurs familles de systèmes de glissement. Ce cas n'est pas détaillé ici mais sera illustré dans la Section 5.

### 3.2 Critères proposés

#### 3.2.1 Critère quadratique

En adoptant une régularisation quadratique de la loi de Schmid ( $n = 2$ ), le problème obtenu est un cas particulier de l'étude de [4] sur l'extension du modèle de Gurson à une matrice anisotrope obéissant au critère orthotrope de Hill. Ce

modèle peut donc être utilisé, en première approximation, pour décrire la surface de plasticité d'un monocristal poreux. Il s'écrit

$$\left( \frac{\sqrt{\Sigma : M : \Sigma}}{\tau_0^c} \right)^2 + 2p \cosh \left( \kappa \frac{\Sigma_m}{\tau_0^c} \right) - 1 - p^2 = 0 \quad (2)$$

avec  $\Sigma$  le tenseur des contraintes macroscopiques et  $\Sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \Sigma$ .  $M$  est un tenseur de symétrie cubique lié à l'anisotropie plastique du monocristal et  $\kappa$  un coefficient d'anisotropie pour la partie hydrostatique du critère. Il a été montré que ce critère est insuffisant pour décrire correctement l'ensemble de la surface de plasticité du monocristal [8].

### 3.2.2 Critère généralisé

En se fondant sur la forme du critère anisotrope proposé par Benzerga et Besson [4], qui correspond à une régularisation particulière de la loi de Schmid, nous en proposons une généralisation phénoménologique. Celle-ci est obtenue à l'aide de l'analyse limite pour deux chargements particuliers (purements déviatorique et purements sphérique) en considérant un ordre de régularisation  $n$  de la loi de Schmid arbitrairement grand. Pour le chargement déviatorique, l'analyse a été effectuée en considérant un champ de vitesses de déformation uniforme au sein de la sphère. Ceci correspond au modèle de Taylor en plasticité. Ce modèle simple peut convenir a priori pour les faibles porosités. Pour le chargement hydrostatique, l'analyse limite a été menée en adoptant comme champ d'essai le champ de vitesses correspondant à une dilatation isotrope de la sphère. Ceci permet de déterminer la valeur du coefficient d'anisotropie  $\kappa$  affectant la partie sphérique du critère. Le critère généralisé que l'on propose s'écrit [8]

$$\left( \frac{(\sum_k |\sigma : \mu_k|^n)^{\frac{1}{n}}}{\tau_0^c} \right)^2 + 2qp \cosh \left( \kappa' \frac{\Sigma_m}{\tau_0^c} \right) - 1 - (qp)^2 = 0 \quad (3)$$

$q \geq 1$  est un paramètre heuristique introduit par Tvergaard [9]. Il permet d'ajuster la valeur de la porosité lorsque le critère est utilisé pour des microstructures autres que la sphère creuse (microstructures périodiques notamment). Ce paramètre est le seul coefficient ajustable du critère.

## 4 Calculs numériques

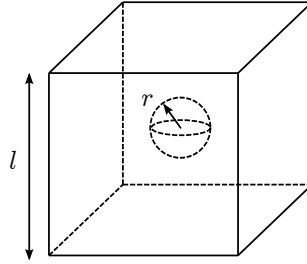


Figure 3: Cellule unitaire de la microstructure périodique

## 4.1 Présentation du problème

La cellule unitaire de la microstructure est un cube contenant un vide sphérique (Figure (3)).

Le problème local à résoudre sur cette structure consiste donc à déterminer le champ de taux de déplacements  $\mathbf{v}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad} \mathbf{v} + {}^T\mathbf{grad} \mathbf{v}) \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \\ \mathbf{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}'(\mathbf{x}), \mathbf{v}' \text{ périodique} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique} \end{array} \right. \quad (4)$$

où  $\mathbf{D}$  est le champ de taux de déformation moyen imposé et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la surface de la cellule. La méthode FFT a été mise en œuvre pour résoudre ce problème. Pour déterminer la surface de plasticité, le chargement est piloté en déformation en imposant la direction de la contrainte macroscopique comme décrit dans [5].

## 4.2 Méthode FFT

La méthode FFT consiste à introduire un milieu de référence homogène de tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}^0$  et de réécrire le problème initial sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}) \\ \mathbf{div} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})) = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

A un instant donné, il correspond donc à un problème d'élasticité homogène avec un champ de polarisation  $\hat{\tau}$  (problème de type thermoélastique). Dans l'espace de Fourier, sa solution s'écrit

$$\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) = -\hat{\Gamma}^0(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\tau}(\boldsymbol{\xi}), \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) = \mathbf{D} \quad (6)$$

avec  $\Gamma^0$  l'opérateur de Green du milieu de référence. Le champ de polarisation  $\hat{\tau}$  est lui-même fonction du champ de taux déformation solution  $\dot{\varepsilon}$  (5). Ce problème peut se résoudre par une méthode de point fixe [5]. Des version "accélérées" de cet algorithme ont également été proposées [10, 11]. Dans cette étude, nous avons mis en œuvre la méthode proposée par Eyre et Milton [10]. Afin de résoudre le problème d'élastoplasticité, un schéma d'intégration temporelle des équations constitutives est nécessaire.

### 4.3 Calcul élastoplastique

On cherche à déterminer numériquement la contrainte d'écoulement plastique de la cellule monocristalline poreuse. Cette contrainte d'écoulement correspond à la contrainte maximale supportable par le monocristal poreux. Pour une direction de chargement donnée, elle est obtenue en résolvant de manière incrémentale le problème d'élastoplasticité parfaite (pas d'écrouissage) jusqu'à ce que la contrainte macroscopique n'évolue plus ( $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$ ). En pratique, nous avons utilisé le critère  $\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}/\bar{\boldsymbol{\sigma}}\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} < 10^{-3}$ . Pour chaque incrément de déformation, la méthode FFT est utilisée pour déterminer les champs solutions  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$  au sein du monocristal.

#### 4.3.1 Intégration de la loi constitutive élastoplastique

A un instant donné  $t^n$  et en chaque point de la cellule unitaire, on suppose connu l'état de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^n$  et l'on impose un incrément de déformation totale  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ . On cherche à déterminer le nouvel état de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$  ainsi que l'incrément de déformation plastique  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ . L'approche classique consiste à supposer que l'incrément de déformation est purement élastique puis à projeter l'état de contraintes obtenu sur la surface de plasticité, si ce dernier n'est pas plastiquement admissible. En introduisant le *prédicteur élastique*  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (7)$$



la loi de comportement élastoplastique incrémentale conduit à

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (8)$$

Le terme  $\mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  est appelé *correcteur plastique*. La loi de Schmid définissant une fonction seuil  $f$  multi-critères, l'incrément de déformation plastique  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  obéit à la règle de normalité généralisée

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) = \sum_k \lambda_k \boldsymbol{\mu}_k, \quad \lambda_k \geq 0. \quad (9)$$

Des méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème en déterminant les systèmes de glissement actifs de manière combinatoire [12, 13]. On propose ici une autre méthode de résolution en le réécrivant sous la forme d'un problème de minimisation.

L'état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$  est solution du problème défini par (1), (8) et (9). En introduisant la fonction  $g(\boldsymbol{\sigma})$  telle que

$$-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) = \mathbf{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (10)$$

on établit que  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$  est, de manière équivalente, solution du problème de minimisation sous contraintes suivant

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\sigma}} g(\boldsymbol{\sigma}) & \text{avec } f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \\ g(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) : \mathbf{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}). \end{cases} \quad (11)$$

En effet, au point minimisant  $g$ ,  $\nabla g = -\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  est orthogonal à la surface de plasticité définie par  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ . C'est donc l'état de contrainte solution  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ .

La fonction  $f$  étant un multicritère, il en découle  $K$  contraintes d'inégalité

$$f_k(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (12)$$

Le problème de minimisation s'écrit donc également (conditions de Karush-Kuhn-Tucker)

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \lambda_k) & \text{avec } \lambda_k \geq 0 \text{ et } \lambda_k f_k(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \forall k \\ \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \lambda_k) = g(\boldsymbol{\sigma}) + \sum_k \lambda_k f_k(\boldsymbol{\sigma}). \end{cases} \quad (13)$$

### 4.3.2 Algorithme de gradient projeté

Pour résoudre le problème de minimisation (13), on se propose d'utiliser l'algorithme de minimisation sous contraintes linéaires proposé par Rosen [14]. Les contraintes linéaires sont

$$S = \{ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mu}_k - \tau_k^c \leq 0, k = 1, \dots, K \} \quad (14)$$

$S$  est donc un polyèdre dans l'espace des contraintes déviatoriques (espace de dimension 5). Partant d'un état de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_0$  sur une face du polyèdre correspondant au système de glissement  $k$  (Figure 4), le gradient de  $g$  en  $\boldsymbol{\sigma}_0$  est

$$\nabla g(\boldsymbol{\sigma}_0) = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_0) = \mathbf{C}^{-1} : (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_0) \quad (15)$$

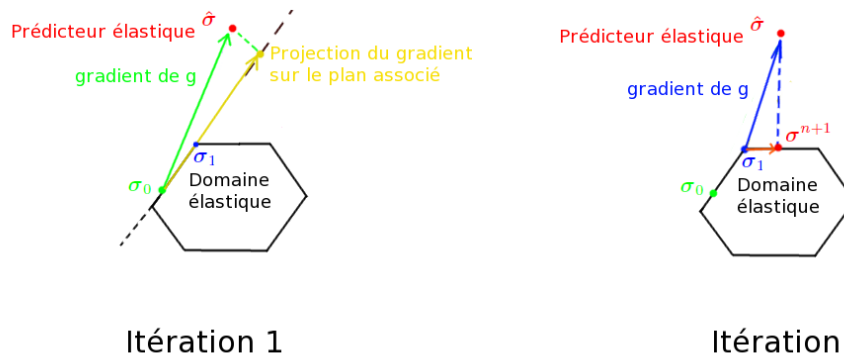


Figure 4: Illustration en 2D de l'algorithme de Rosen [14].

Le polygone correspond à la surface de plasticité définie par les fonctions seuil des différents systèmes de glissement :  $f_k = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mu}_k - \tau_k^c = 0$ . L'élasticité étant isotrope, le gradient  $\nabla g(\boldsymbol{\sigma})$  est colinéaire à  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}$ .

A l'itération 1, le minimiseur de  $g(\boldsymbol{\sigma}_0 - \gamma \mathbf{P}_k \nabla g(\boldsymbol{\sigma}_0))$ ,  $\gamma \geq 0$ , (point jaune) n'est pas sur la surface de  $S$  (Cas 2) et  $\boldsymbol{\sigma}_1$  est le dernier point sur la surface de  $S$  dans cette direction. A l'itération 2, le minimiseur est sur la surface de  $S$ , c'est la solution cherchée  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ .

La projection  $\mathbf{P}_k \nabla g(\boldsymbol{\sigma}_0)$  de ce gradient sur le plan  $\mu_k$  donne la direction pour minimiser  $g$  tout en restant sur  $S$ . Deux cas doivent être considérés :

- *Cas 1* : Le minimiseur de  $g(\boldsymbol{\sigma}_0 - \gamma \mathbf{P}_k \nabla g(\boldsymbol{\sigma}_0))$ ,  $\gamma \geq 0$ , appartient à la surface de  $S$ . C'est alors l'état de contraintes solution  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ .

- *Cas 2* : Le minimiseur de  $g(\boldsymbol{\sigma}_0 - \gamma \mathbf{P}_k \nabla g(\boldsymbol{\sigma}_0))$ ,  $\gamma \geq 0$ , n'appartient pas à la surface de  $S$ . Il faut alors considérer l'état de contraintes correspondant au dernier point de la demi-droite  $\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_0 - \gamma \nabla g(\boldsymbol{\sigma}_0)$ ,  $\gamma \geq 0$ , qui correspond à l'activation d'un nouveau système de glissement. Pour l'itération suivante, on effectue alors le même procédé, avec cette fois les projecteurs  $\mathbf{P}_{k'}$  correspondant à tous les systèmes de glissement actifs  $k'$ .

Une illustration de cet algorithme en 2D est donnée sur la Figure 4 dans le cas d'une élasticité isotrope.

## 5 Résultats et discussion

Afin d'évaluer le critère analytique que nous avons proposé, nous avons effectué des comparaisons avec des calculs numériques par FFT sur une cellule unitaire cubique contenant un trou sphérique. Nous avons considéré un état de chargement axisymétrique dans le repère macroscopique  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \eta(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)] \quad (16)$$

en considérant différentes orientations cristallines et en faisant varier le paramètre de chargement  $\eta$  de  $-0.5$  (chargement déviatorique) à  $1$  (chargement hydrostatique).

Deux types de structure cristalline sont étudiées : cubique à faces centrées (CFC) et hexagonal compact (HC). Ce choix est motivé par le fait que de nombreux alliages métalliques d'usage courant se présentent sous ces formes (CFC : Al, Cu etc. et HC : Ti, Mg, Zn, etc.). Par ailleurs, le cas de la structure cubique centrée (CC) est proche, du point de vue de l'anisotropie, de la structure CFC. Les conclusions pour cette dernière seront donc valables pour la structure CC.

Les structures CFC et HC présentent une anisotropie plastique très différente : dans le cas de la structure cubique, il n'y a qu'une famille de systèmes de glissement (plans octaédriques) avec la même cission critique, alors que pour la structure hexagonale, il existe différentes familles de systèmes de glissement avec des cissions critiques distinctes. Dans ce dernier cas, l'anisotropie est en grande partie contrôlée par les rapports des cissions critiques entre les différentes familles. Pour cette structure, nous avons considéré trois types de glissement : prismatique (Pr), basal (Ba) et pyramidal (Pyr) avec des rapports de cission représentatifs des

alliages de titane [15]

$$\tau_{Ba}^c/\tau_{Pr}^c = 5 \quad \tau_{Pyr}^c/\tau_{Pr}^c = 8 \quad (17)$$

Le paramètre  $q$  de notre critère a été déterminé afin de minimiser l'écart avec les résultats numériques pour l'ensemble des orientations cristallines et des types de chargement considérés. Nous avons obtenu  $q \simeq 1.9$  pour le cristal CFC et  $q \simeq 2.2$  pour le cristal HC. Pour une porosité allant de 1% à 10%, nous avons constaté que le paramètre  $q$  peut être considéré constant. Les résultats pour différentes valeurs du paramètre  $\eta$  sont représentés dans le triangle standard des structures cubique et hexagonale pour une porosité de 1% (Figures 5 et 6). Pour chaque valeur de  $\eta$  considérée, cette représentation indique la valeur de la contrainte d'écoulement plastique normalisée ( $\sigma/\tau_0^c$  pour le cubique et  $\sigma/\tau_{Pr}^c$  pour l'hexagonal) pour différentes orientations de l'axe de chargement par rapport au repère du cristal. Les comparaisons avec les résultats numériques montrent que le critère proposé reproduit correctement la dépendance à l'orientation cristalline de la contrainte d'écoulement plastique. Pour la grande majorité des cas considérés, l'erreur relative est inférieure à quelques pourcents. On note cependant que pour le cas de la structure hexagonale, qui présente une forte anisotropie, une erreur maximale de 15% est atteinte, pour  $\eta = 0.8$ , dans la zone du triangle standard correspondant à la transition entre une contribution majoritaire du glissement prismatique et une contribution majoritaire du glissement pyramidal. Une prise en compte de l'anisotropie plastique dans le choix du champ de vitesses de déformation utilisé paraît donc nécessaire. On peut noter par ailleurs que, du fait de la périodicité de la microstructure, le calcul numérique pour le chargement hydrostatique conduit à une petite variation de la contrainte d'écoulement avec l'orientation cristalline. Au contraire, le critère proposé est indépendant de l'orientation cristalline pour le chargement hydrostatique puisqu'il dérive de l'étude par analyse limite sur une sphère creuse.

## 5 Conclusion

Ce travail constitue une contribution à l'étude du comportement des matériaux cristallins poreux. A partir d'une version régularisée de la loi de Schmid, nous avons dérivé par analyse limite un critère semi-analytique pour le monocristal poreux.

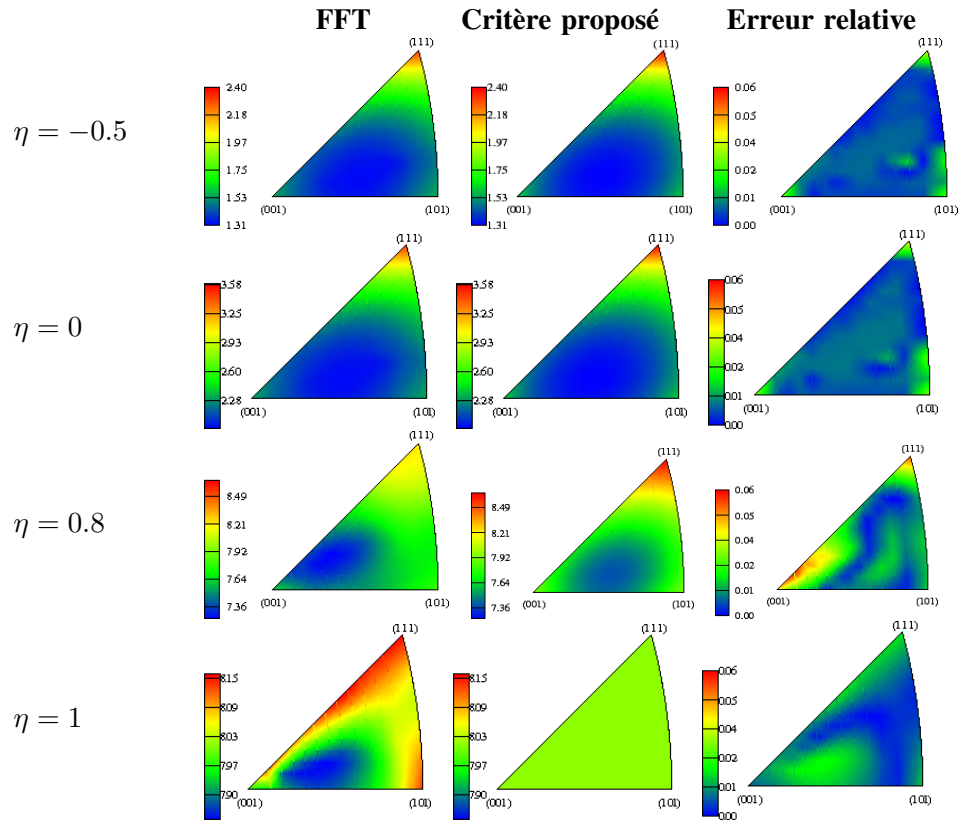


Figure 5: Contrainte d'écoulement plastique normalisée  $\sigma/\tau_0^c$  pour le monocristal CFC avec une porosité de 1%. Confrontation entre les résultats numériques par FFT et le critère phénoménologique.

Pour tester la validité de ce critère, des calculs numériques sur des microstructures périodiques ont été réalisés à l'aide de la méthode FFT. Deux structures cristallines représentatives d'alliages métalliques courants ont été testées. Des calculs pour des chargements axisymétriques ont été réalisés pour différents taux de triaxialité et différentes orientations cristallines, de manière à caractériser l'anisotropie plastique du monocristal poreux.

La confrontation entre le critère proposé et les calculs numériques conduit à une bonne correspondance globale. Dans le cas d'une forte anisotropie plastique, nos comparaisons montrent un moins bon accord à fort taux de triaxialité pour certaines orientations. Ceci est vraisemblablement dû au champ test utilisé

(dilatation isotrope).

## Références

- [1] M. I. Idiart, P. Ponte Castañeda, Variational linear comparison bounds for nonlinear composites with anisotropic phases. I. General results, *Proc. R. Soc. Lond. A*463 (2007) 907–924.
- [2] X. Han, J. Besson, S. Forest, B. Tanguy, S. Bugat, A yield function for single crystals containing voids, *Int. J. Solids Struct.* 50 (2013) 2115–2131.
- [3] A. Mbiakop, A. Constantinescu, K. Danas, A model for porous single crystals with cylindrical voids of elliptical cross-section, *Int. J. Solids Struct.* (2015) in press.
- [4] A. A. Benzerga, J. Besson, Plastic potentials for anisotropic porous solids, *Eur. J. Mech. A/Solids* 20 (2001) 397–434.
- [5] H. Moulinec, P. Suquet, A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 157 (1998) 69–94.
- [6] M. Arminjon, A regular form of the schmid law. Application to the ambiguity problem., *Texture Microstruct.* 14-18 (1991) 1121–1128.
- [7] A. Gurson, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media., *J. Eng. Mater. Technol.* 99 (1977) 1–15.
- [8] J. Paux, L. Morin, R. Brenner, D. Kondo, An approximate yield criterion for porous single crystals, *Eur. J. Mech. A/Solids* 51 (2015) 1–10.
- [9] V. Tvergaard, On localization in ductile materials containing spherical voids, *Int. J. Fract.* 18 (1982) 237–252.
- [10] D. J. Eyre and G. W. Milton, A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement, *J. Phys.* III 6 (1999) 41–47.

- [11] H. Moulinec and F. Silva, Comparison of three accelerated FFT-based schemes for computing the mechanical response of composite materials, *Int. J. Num. Meth. Engng* 97 (2014) 960–985.
- [12] A. M. Cuitiño and M. Ortiz, Computational modelling of single crystals, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 1 (1992) 225–263.
- [13] C. Miehe and J. Schröder, A comparative study of stress update algorithms for rate-independent and rate-dependent crystal plasticity, *Int. J. Num. Meth. Engng* 50 (2001) 273–298.
- [14] J. B. Rosen, The gradient projection method for nonlinear programming. Part I. Linear constraints, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 8 (1960) 181–217.
- [15] J. J. Fundenberger, M. J. Philippe, F. Wagner, and C. Esling, Modelling and prediction of mechanical properties for materials with hexagonal symmetry zinc, titanium and zirconium alloys, *Acta Mater.* 45 (1997) 4041–4055.

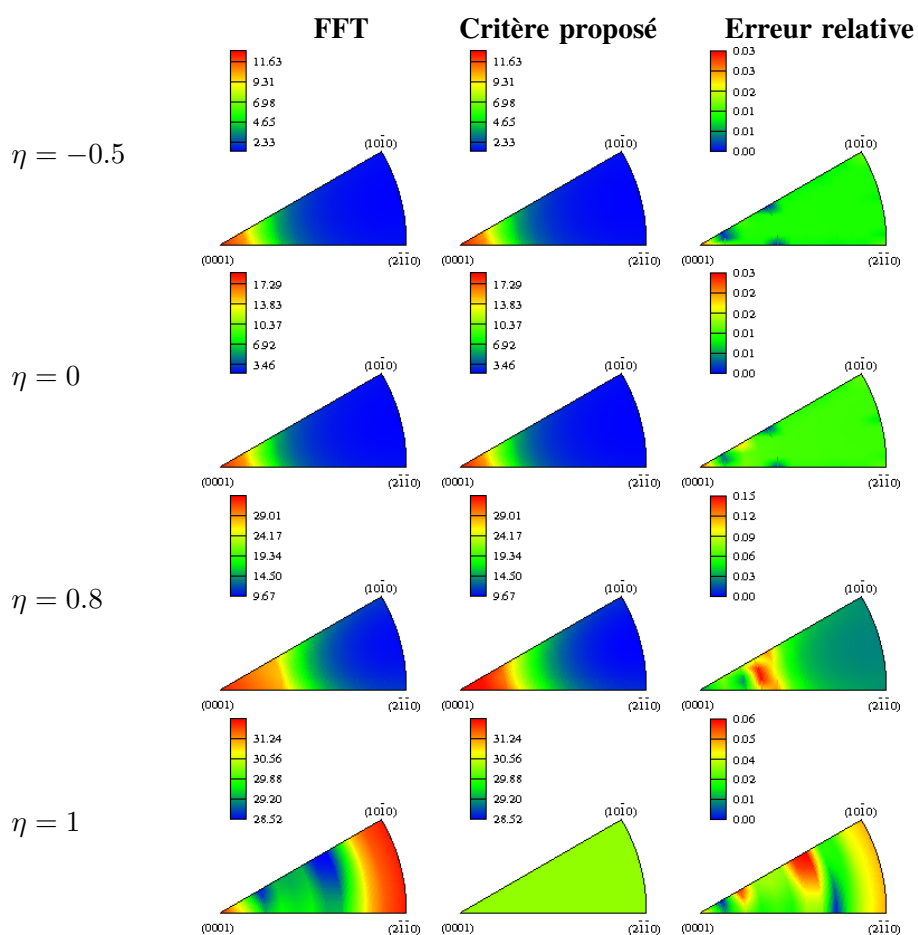


Figure 6: Contrainte d'écoulement plastique normalisée  $\sigma/\tau_{Pr}^c$  pour le monocristal HC avec une porosité de 1%. Confrontation entre les résultats numériques par FFT et le critère phénoménologique.