



**HAL**  
open science

# Recalage en temps réel de modèle mécanique par couplage entre filtre de Kalman, erreur en relation de comportement modifiée et réduction de modèle

Basile Marchand, Ludovic Chamoin, Christian Rey

► **To cite this version:**

Basile Marchand, Ludovic Chamoin, Christian Rey. Recalage en temps réel de modèle mécanique par couplage entre filtre de Kalman, erreur en relation de comportement modifiée et réduction de modèle. CFM 2015 - 22ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2015, Lyon, France. hal-03444871

**HAL Id: hal-03444871**

**<https://hal.science/hal-03444871>**

Submitted on 23 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Recalage en temps réel de modèle mécanique par couplage entre filtre de Kalman, erreur en relation de comportement modifiée et réduction de modèle

B. Marchand<sup>a</sup>, L. Chamoin<sup>a</sup>, C. Rey<sup>b</sup>

a. LMT-Cachan/ENS-Cachan/CNRS/Université Paris-Saclay,  
{marchand,chamoin}@lmt.ens-cachan.fr  
b. Safran Tech, christian.rey@safran.fr

## Résumé :

*Dans ce travail on propose une nouvelle approche de l'identification et du recalage en temps réel de modèle de mécanique des structures. L'idée principale est d'introduire l'Erreur en Relation de Comportement modifiée (ERCm) dans une méthode d'assimilation de données bien connue dans le cadre des problèmes inverses, le filtre de Kalman. L'intérêt est alors que : (i) l'introduction de l'ERCm permet une robustesse notable vis-à-vis des bruits de mesure; (ii) le filtre de Kalman peut être reformulé afin d'en réduire le coût de calcul; (iii) on peut introduire une méthode de réduction de modèle, la Proper Generalized Decomposition (PGD), par le biais de l'Erreur en Relation de Comportement modifiée, afin d'accélérer le processus de recalage.*

## Abstract :

*In this work we propose a new identification and mechanical model-updating strategy for real-time applications. The main idea is to introduce the modified Constitutive Relation Error in a well-known data assimilation method, the Kalman filter. The interest of this approach comes from the fact that : (i) the mCRE introduction offers a robustness gain; (ii) we can reformulate the Kalman filter in order to reduce its computation cost; (iii) a model reduction method, denoted Proper Generalized Decomposition, can be introduced through the modified Constitutive Relation Error.*

**Mots clefs :** Identification, temps-réel, filtre de Kalman, erreur en relation de comportement modifiée, Proper Generalized Decomposition.

## 1 Introduction

Depuis maintenant une dizaine d'années le paradigme DDDAS (ou dialogue essais-calcul) reçoit un intérêt croissant dans le domaine de l'ingénierie mécanique [4]. L'idée fondamentale est de créer un échange entre un système physique et le modèle numérique qui lui est associé. Cela permet alors : (i) de contrôler l'évolution du système à l'aide de la prédiction réalisée par le modèle numérique; (ii) de recalibrer le modèle numérique par le biais des observations réalisées sur le système. Un exemple d'application, étant d'ailleurs la finalité de ce travail, est l'identification et le contrôle en temps-réel de l'évolution de l'endommagement dans les structures composites [11].

Nous nous focalisons ici sur la phase d'identification et de recalibrage de modèle. Cette étape s'avère relativement délicate puisqu'elle nécessite la résolution d'un problème inverse qui, classiquement, est un problème mal posé. Afin de passer outre cette difficulté, différentes approches sont possibles [7], soit déterministes basées sur la minimisation d'une fonctionnelle associée à une méthode de régularisation, ou bien stochastiques basées sur l'inférence bayésienne.

Nous proposons de mettre en place une méthode d'identification couplant une approche stochastique, le filtre de Kalman [8], et une approche déterministe, l'Erreur en Relation de Comportement modifiée [5]. D'une part, le filtre de Kalman est une méthode d'assimilation de données bien connue dans le domaine des problèmes inverses et permettant une prédiction de l'état du système à partir d'un nombre réduit d'observations. D'autre part, l'Erreur en Relation de Comportement modifiée est un outil puissant d'identification et de recalage de modèle, basé sur le concept de dualité et la définition d'une fonctionnelle énergétique. De plus l'Erreur en Relation de Comportement modifiée s'avère être une méthode relativement robuste vis-à-vis des mesures corrompues [10]. Afin de permettre une identification en temps réel, l'Erreur en Relation de Comportement modifiée est ici associée à une méthode de réduction de modèle, la *Proper Generalized Decomposition* [3, 2].

L'approche proposée est mise en œuvre sur différents problèmes dans le cadre de la thermique instationnaire avec identification de l'évolution temporelle de conditions aux limites, localisation de sources de chaleur, ou identification de paramètres matériaux.

## 2 Démarche proposée

### 2.1 Approche classique basée sur le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman [8] est une méthode d'assimilation de données basée sur l'inférence bayésienne et reposant sur la définition d'un système dynamique (1) dans un cadre probabiliste.

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathcal{M}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{e}_M \\ \mathbf{s}^{(k)} = \mathcal{H}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{e}_S \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système à l'instant  $t^{(k)}$ ,  $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est l'opérateur de modèle,  $\mathbf{e}_M \in \mathbb{R}^{(n)}$  est l'erreur de modèle assimilée à un bruit blanc gaussien,  $\mathbf{s}^{(k)} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des observations, l'opérateur  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est l'opérateur d'observation, et  $\mathbf{e}_S \in \mathbb{R}^m$  est l'erreur sur les observations, i.e. l'erreur de mesure, elle aussi considérée comme un bruit blanc gaussien.

L'idée du filtre de Kalman est alors de chercher l'état du système  $\mathbf{u}^{(k)}$  comme étant celui qui va maximiser la densité de probabilité *a posteriori*  $\pi(\mathbf{u}^{(k)} | \mathbf{s}^{(k)})$  en utilisant le système dynamique (1), le tout dans le cas de densité de probabilité gaussienne. Le filtre de Kalman peut alors se résumer aux deux étapes suivantes :

**Prédiction :** on réalise une estimation *a priori*, notée  $\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{2})}$  de l'état du système

**Correction :** à partir des observations  $\mathbf{s}^{(k)}$  et de l'estimation *a priori* on détermine la meilleure estimation *a posteriori*  $\mathbf{u}_a^{(k+1)}$  de l'état du système

Afin de résoudre un problème inverse à l'aide du filtre de Kalman il est nécessaire dans un premier temps d'introduire le vecteur des paramètres du modèle  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ . Sans connaissance *a priori* sur l'évolution temporelle des paramètres on fait une hypothèse de stationnarité de ces derniers; on vient néanmoins perturber cette hypothèse par une erreur sur les paramètres  $\mathbf{e}_P$  qui est un bruit blanc gaussien.

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \simeq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \mathbf{e}_P$$

On définit alors un vecteur d'état étendu,  $\bar{\mathbf{u}}^{(k)} = [\mathbf{u}^{(k)} \quad \mathbf{p}^{(k)}]^T$  permettant ainsi de reformuler le système dynamique (1) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \bar{\mathcal{M}}^{(k)} \bar{\mathbf{u}}^{(k)} + \bar{\mathbf{e}}_M \\ \mathbf{s}^{(k)} = \bar{\mathcal{H}}^{(k)} \bar{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{e}_S \end{cases} \quad (2)$$

La résolution du problème d'identification associé au système dynamique (2) se fait alors en utilisant une version non-linéaire du filtre de Kalman; nous avons considéré ici l'*Unscented Kalman Filter* (UKF) [6]. Cette approche, bien que performante et simple à mettre en œuvre, présente deux inconvénients majeurs : (i) la

méthode est peu robuste vis-à-vis des données corrompues; (ii) le coût de calcul est élevé, une analyse de complexité montrant que le filtre de Kalman est en  $O((n + n_p)^3)$ .

## 2.2 Apport de l'Erreur en Relation de Comportement modifiée

L'Erreur en Relation de Comportement modifiée (ERCm) correspond à l'extension aux problèmes d'identification du concept d'Erreur en Relation de Comportement initialement développé dans le cadre des estimateurs d'erreur *a posteriori* [9]. L'Erreur en Relation de Comportement modifiée est donc une méthode déterministe, basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique, de résolution des problèmes inverses [5, 10].

Dans le cadre de la thermique instationnaire, la fonctionnelle associée se définit de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_m^2(u, \mathbf{q}; \mathbf{p}, s) = \frac{1}{2} \int_{I_t} \int_{\Omega} (\mathbf{q} - \mathcal{K} \nabla u) \mathcal{K}^{-1} (\mathbf{q} - \mathcal{K} \nabla u) d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2} \frac{r}{1-r} \int_{I_t} \|\Pi u - s\|^2 dt$$

où  $u$  est le champ de température,  $\mathbf{q}$  le flux thermique et  $\mathcal{K}$  l'opérateur de conductivité thermique.  $(u, \mathbf{q}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}$  avec les espaces d'admissibilité définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{u \in H^1(\Omega) \otimes L^2(I_t) \mid u = u^d \forall (x, t) \in \partial\Omega_u \times I_t, u = u^0 \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \{0\}\} \\ \mathcal{S} &= \{\mathbf{q} \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{q} = \mathbf{q}^d \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_q \times I_t, \dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} = f \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times I_t\} \end{aligned}$$

La solution du problème d'identification se formule alors sous la forme d'un problème d'optimisation (3).

$$\mathbf{p}_{sol} = \underset{\xi \in \mathcal{P}}{\operatorname{argmin}} \min_{(u, \mathbf{q}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}} \mathcal{E}_m^2(u, \mathbf{q}; \xi, s) \quad (3)$$

En pratique la résolution de la double minimisation (3) se fait à l'aide d'un algorithme de type point fixe, en réalisant une minimisation alternée.

$$\mathbf{M1} \text{ Minimisation sur } \mathcal{V} \times \mathcal{S} : (u_{ad}, \mathbf{q}_{ad}) = \underset{(u, \mathbf{q}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{E}_m^2(u, \mathbf{q}; \mathbf{p}, \mathbf{s})$$

$$\mathbf{M2} \text{ Minimisation sur } \mathcal{P} : \mathbf{p} = \underset{\xi \in \mathcal{P}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{E}_m^2(u_{ad}, \mathbf{q}_{ad}; \xi, \mathbf{s})$$

L'étape la plus coûteuse numériquement est la première minimisation, c'est-à-dire le calcul des champs admissibles. En effet cette minimisation nécessite la résolution d'un problème "classique" et d'un problème couplé adjoint rétrograde en temps. Afin de résoudre ce problème couplé plusieurs approches globales en temps ou incrémentales sont possibles [1].

L'approche que l'on propose ici, et que l'on nommera *Modified Kalman Filter* (MKF), consiste à introduire l'ERCm dans le système dynamique (1). On définit alors le nouveau système dynamique (4).

$$\begin{cases} \mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \mathbf{e}_P \\ \mathbf{s}^{(k)} = \mathcal{H}_m(\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k-1:k)}) + \mathbf{e}_S \end{cases} \quad (4)$$

où l'opérateur  $\mathcal{H}_m : \mathbb{R}^{n_p} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{H}_m(\mathbf{p}, \mathbf{s}) := \mathcal{H} \circ \text{mCRE}_1(\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k-1:k)})$$

avec  $\text{mCRE}_1$  l'application retournant le champs admissible  $u_{ad}$  issu de la minimisation **M1**. L'avantage de cette reformulation du système dynamique est de trois sortes :

1. Le processus d'assimilation de données devient robuste par rapport aux bruits de mesure et aux données corrompues;
2. Le coût de calcul est fortement réduit puisque l'on passe de  $O((n + n_p)^3)$  à  $O(n_p^3)$ ;

3. L'état du système étant maintenant déterminé par le biais de l'ERCm il est tout à fait possible d'y introduire une réduction de modèle par *Proper Generalized Decomposition*. Une telle application de la PGD est réalisée dans le cadre de l'élasticité linéaire dans [2].

## 2.3 Ajout d'une réduction de modèle par la technique PGD

Le temps d'exécution du processus d'identification par la méthode couplée filtre de Kalman/ERCm peut être réduit en introduisant une méthode de réduction de modèle, la *Proper Generalized Decomposition* (PGD) [3]. L'idée de base de la PGD est de rechercher la solution d'un problème variationnel sous la forme d'une somme de fonctions à variables séparées (5).

$$u \simeq u_M = \sum_{i=1}^M \phi_i(\mathbf{p}) \cdot \lambda_i(t) \cdot w(\mathbf{x}) \quad (5)$$

où les fonctions  $\phi_i$ ,  $\lambda_i$  et  $w_i$  sont respectivement les modes en paramètres, temps et espace.

La PGD offre l'avantage que l'on peut déterminer la solution du problème sous forme paramétrique dans une phase *offline* et ainsi durant la phase *online* il ne reste plus qu'à évaluer cette solution. Dans le cadre de l'approche que l'on propose ici il est donc nécessaire de déterminer deux décompositions PGD simultanément ( $u^{(k-1:k)}$ ,  $v^{(k-1:k)}$ ), l'avantage étant qu'ici la décomposition espace-temps permet de réduire significativement le coût de calcul associé initialement au problème couplé direct/rétrograde. Néanmoins, étant donné le caractère itératif de la démarche d'identification proposée, il n'est pas possible de calculer les champs admissibles dans une phase *offline*. Cela provient du fait que l'on a pour chaque pas de temps une condition initiale hétérogène qui à ce jour peut très difficilement être prise en compte comme extra-coordonnée dans la décomposition PGD des champs admissibles. L'idée est donc d'utiliser la PGD uniquement dans une phase *online* en tirant partie de la forme à variables séparées afin de dissocier problème en espace et problème en temps (direct/rétrograde) et d'introduire également les paramètres  $\mathbf{p}$  que l'on cherche à recalculer; ainsi pour chaque interval  $I_t^{(k)}$  on recherche les champs admissibles sous la forme suivante :

$$u^{(k-1:k)} \simeq u_M = \sum_{i=1}^M \phi_i(\mathbf{p}) \cdot \lambda_i(t) \cdot w(\mathbf{x}) ; \quad v^{(k-1:k)} \simeq v_M = \sum_{i=1}^M \tilde{\phi}_i(\mathbf{p}) \cdot \tilde{\lambda}_i(t) \cdot \tilde{w}(\mathbf{x})$$

La procédure de calcul des modes PGD, donnée dans [3], nécessite ici l'utilisation de méthodes numériques spécifiques à cause notamment du problème couplé direct/rétrograde en temps.

## 3 Illustration

La méthode proposée (MKF) est appliquée à différents problèmes dans le cadre de la thermique instationnaire et comparée à l'approche classique (UKF) basée sur le Unscented Kalman Filter. Sur la Figure 1 on peut observer les résultats obtenus pour le recalage d'une condition aux limites de Neumann évolutive et sur la Figure 2 il s'agit de l'identification de quatre paramètres matériaux indépendant du temps (seule le résultat pour  $\kappa_1$  est montré mais l'identification des autres paramètres est de la même qualité).

Pour conclure, en comparant l'approche MKF que l'on propose à l'approche classique UKF nous avons pu observer : (i) un gain de robustesse significatif du processus d'identification et ainsi de meilleurs résultats; (ii) un gain de temps significatif grâce à l'introduction de la PGD.

La prochaine étape de ce travail consiste à étendre l'approche proposée ici aux comportements non-linéaires avec notamment l'endommagement, et à introduire une stratégie adaptative de recalage.

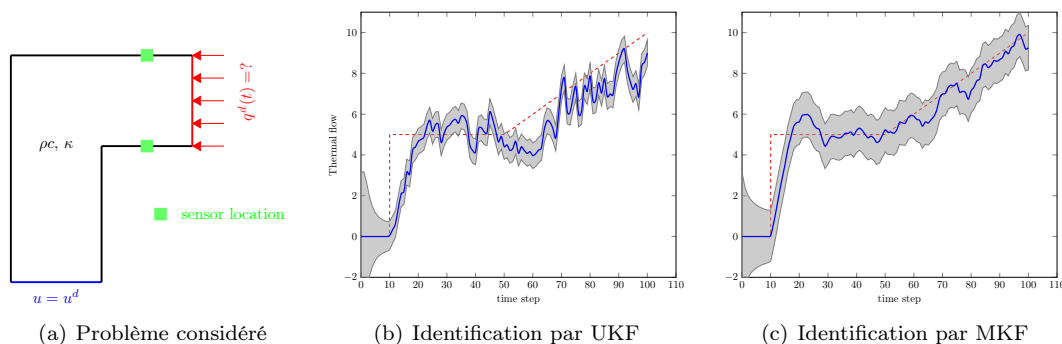


Figure 1: Identification d'une condition aux limites de Neumann en utilisant les approches UKF et MKF (pointillé : valeur réelle; bleu : moyenne; gris : variance) avec un bruit de mesure de 20%

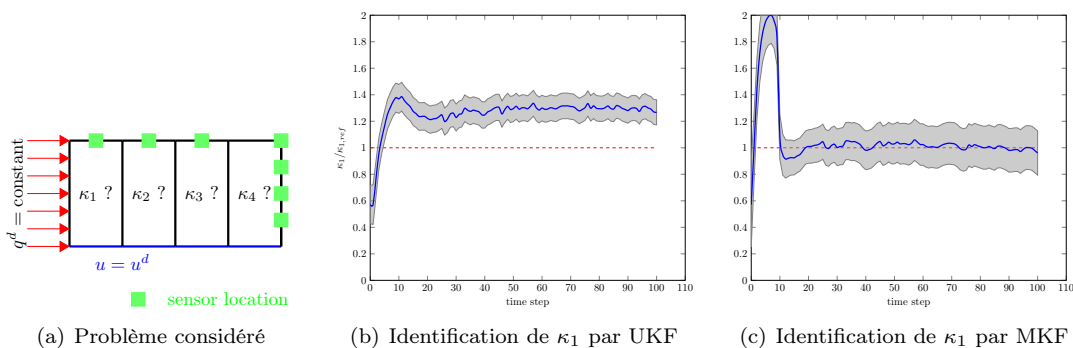


Figure 2: Identification de conductivités thermique en utilisant les approches UKF et MKF (pointillé : valeur réelle; bleu : moyenne; gris : variance) avec un bruit de mesure de 10%

## References

- [1] O. Allix, P. Feissel, H. Nguyen. *Identification strategy in the presence of corrupted measurements*, Engineering Computations, 487-504, 2005.
- [2] R. Bouclier, F. Louf, L. Chamoin. *Real-time validation of mechanical models coupling PGD and constitutive relation error*, Computational Mechanics, 861-883, 2013.
- [3] F. Chinesta, R. Keunings, A. Leygue. *The Proper Generalized Decomposition for advanced Numerical Simulations*, Springer, 2014.
- [4] F. Darema. *Dynamic Data Driven Applications Systems : A new paradigm for applications simulations and measurements*, Computational Science-ICCS 2004: 4th International Conference, Springer, 662-669, 2004.
- [5] A. Deraemaeker, P. Ladevèze. *A constitutive relation error model-updating method in structural dynamics with uncertain measurements*, Inverse Problems in Engineering Mechanics, 273-283, 2003.
- [6] S. Julier, J. Uhlmann. *New extension of the kalman filter to nonlinear systems*, Proc. SPIE, 182-193, 1997.
- [7] J. Kaipio, E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer, 2006.
- [8] R. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Journal of Basic Engineering, 35-45, 1960.

- [9] P. Ladevèze, J. Pelle. *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*, Springer, 2005.
- [10] H. Nguyen, O. Allix, P. Feissel. *A robust identification strategy for rate-dependent models in dynamics*, Inverse Problems, 2008.
- [11] E. Prudencio, P. Bauman, D. Faghihi, K. Ravi-Chandar, J. Oden. *A computational framework for dynamic data driven material damage control, based on bayesian inference and model selection*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014.