



HAL
open science

Stabilisation globale par bouclage de sortie: Observabilité de la non bornitude en plus de l'observabilité

Laurent Praly

► To cite this version:

Laurent Praly. Stabilisation globale par bouclage de sortie: Observabilité de la non bornitude en plus de l'observabilité. [Rapport de recherche] Mines-ParisTech. 2021. hal-03443205

HAL Id: hal-03443205

<https://hal.science/hal-03443205>

Submitted on 23 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilisation globale par bouclage de sortie: Observabilité de la non bornitude en plus de l'observabilité *

Laurent Praly[†]

31 juillet 1996 , Révision 23 novembre 2021

Nous nous intéressons au problème de stabilisation asymptotique globale par bouclage de sortie. Le point clé est que les deux propriétés usuelles de stabilisabilité et observabilité ne suffisent pas.

1 Sur le besoin d'observabilité de la non bornitude.

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2^n + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

où n est un nombre entier, u est la commande, (x_1, x_2) est l'état, y est la sortie. Nous avons (voir [1]) :

Proposition 1 Si $n = 2$, le bouclage stationnaire dynamique :

$$\begin{cases} \dot{\chi} = -(3\chi + 4y) \exp(y) \\ u = -(5\chi + 7y) \exp(2y) \end{cases} \quad (2)$$

est globalement asymptotiquement stabilisant pour le système (1).

Si $n > 2$, pour tout entier k , il n'existe aucunes fonctions $u \in C^0(\mathbb{R}^{k+2}; \mathbb{R})$ et $v \in C^0(\mathbb{R}^{k+2}; \mathbb{R}^{k+1})$ telles que les fonctions $u(y, \chi, \cdot)$ et (v, χ, \cdot) soient bornées pour tout $(y, \chi) \in \mathbb{R}^{k+1}$ et l'origine soit un point asymptotiquement stable de :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2^n + u(x_1, \chi, t) \\ \dot{\chi} = v(x_1, \chi, t) \end{cases} \quad (3)$$

* Cette note est extraite d'une note de travail intitulée **Global attractiveness via output feedback et rédigée en janvier 1993 par Frédéric Mazenc and Laurent Praly.**

[†]MINES ParisTech, PSL Research University, CAS - Centre automatique et systèmes, 35 rue St Honoré 77300 Fontainebleau, France

Dans (2), il est à noter que le terme $\exp(y)$ a pour effet d'accélérer contrôleur et observateur lorsque la mesure est éloignée positivement de son équilibre.

Le problème mis en évidence par le système (1) est la possibilité que l'explosion en temps fini de certaines composantes de l'état puisse ne pas être vue de la sortie et ce bien qu'une observabilité au sens le plus fort¹ soit satisfaite. Ainsi, si $u \equiv 0$ et $x_2(0) > 0$, nous avons :

- Pour $n > 2$ et tout t dans $\left[0, \frac{1}{x_2(0)^{n-1}(n-1)}\right]$,

$$y(t) = x_1(t) = x_1(0) + x_2(0)^{2-n} \frac{1}{n-2} \left[1 - (1 - x_2(0)^{n-1}(n-1)t)^{\frac{n-2}{n-1}}\right], \quad (4)$$

$$x_2(t) = \frac{x_2(0)}{(1 - x_2(0)^{n-1}(n-1)t)^{\frac{1}{n-1}}}. \quad (5)$$

Nous avons donc :

$$\lim_{t \rightarrow 1/x_2(0)^{n-1}(n-1)} \begin{pmatrix} y(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) + x_2(0)^{2-n} \frac{1}{n-2} \\ +\infty \end{pmatrix}. \quad (6)$$

La composante x_2 explose en temps fini, alors que la mesure $y = x_1$ reste finie.

- Pour $n = 2$ et tout t dans $\left[0, \frac{1}{x_2(0)}\right]$, on obtient :

$$y(t) = x_1(t) = x_1(0) - \log(1 - x_2(0)t), \quad (7)$$

$$x_2(t) = \frac{x_2(0)}{(1 - x_2(0)t)}, \quad (8)$$

et donc :

$$\lim_{t \rightarrow 1/x_2(0)} \begin{pmatrix} y(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\infty \\ +\infty \end{pmatrix} \quad (9)$$

Dans ce cas, à la fois x_2 et la mesure y explosent en temps fini.

C'est bien la non observabilité de la non bornitude de x_2 qui est à l'origine des difficultés. En effet, si on ajoute l'information :

$$|x_2(0)| \leq x_{\max}, \quad (10)$$

alors, avec (8) par exemple, nous avons une estimation du temps maximal disponible pour acquérir une approximation suffisante de x_2 . Or nous savons, d'après [4] qu'il existe un bouclage dynamique qui exploite (10) dans le choix des gains et permet d'obtenir une stabilisation semi-globale.

¹Précisément le système est uniformément observable puisque $x_2 = \dot{y}$.

2 Attractivité globale

2.1 Définitions et énoncé

Considérons le système :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad , \quad y = h(x) \quad , \quad (11)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u \in \mathbb{R}^m$ la commande et $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée. Nous supposons que f et h sont des fonctions analytiques. Nous notons $\phi(a, u, t)$ la solution de (11) à l'instant t lorsque la commande est $u : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^m$ et passant par a à l'instant 0. Nous notons $]0, \varpi(a)[$ son intervalle maximal à droite d'existence.

Définition 2 *Le système (11) est dit observable si, pour toute paire (a_1, a_2) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que $a_1 \neq a_2$, il existe un instant T dans $]0, \min\{\varpi(a_1), \varpi(a_2)\}[$ et une commande $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que :*

$$\exists t \in [0, T] : h(\phi(a_1, u, t)) \neq h(\phi(a_2, u, t)) \quad . \quad (12)$$

D'après [3, Theorem 2.1] ou plus précisément [3, Theorem 3.10], l'hypothèse d'analyticité de f et h et la propriété d'observabilité impliquent l'existence d'une commande universelle pour l'observabilité. Précisément, pour tout T_u de $]0, +\infty[$, il existe une fonction $u_u \in C^\omega([0, T_u]; \mathbb{R}^m)$ telle que, pour toute paire (a_1, a_2) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe t dans $]0, \min\{\varpi(a_1), \varpi(a_2), T_u\}[$ tel que :

$$h(\phi(a_1, u_u, t)) \neq h(\phi(a_2, u_u, t)) \quad . \quad (13)$$

Cette commande universelle permet donc de distinguer la condition initiale à partir de tout instant strictement positif. Cependant d'après le paragraphe 1, nous devons nous prémunir contre le fait que, pendant ce temps, même arbitrairement petit, l'état peut exploser sans que ceci soit vu de la sortie.

Définition 3 *Le système (11) est dit avoir la propriété d'observabilité de la non bornitude pour une commande donnée u dans $L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$, avec $T < +\infty$, si, pour toute solution $\phi(a, u, t)$ définie maximale à droite sur $]0, \varpi(a)$ avec $\varpi(a) < T$, nous avons :*

$$\limsup_{t \rightarrow \varpi(a)} |h(\phi(a, u, t))| = +\infty \quad . \quad (14)$$

Théorème 4 *Supposons que, pour le système (11), il existe une entrée universelle u_u . Supposons aussi que le système (11) est globalement stabilisable et a la propriété d'observabilité de la non bornitude pour la commande u_u . Dans ces conditions, il existe des fonctions $\theta_1 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\theta_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que les solutions de (11) en boucle fermée avec :*

$$u = \theta_1(y, \zeta, t) \quad , \quad \dot{\zeta} = \theta_2(y, \zeta, t) \quad , \quad (15)$$

sont bornées et leur composante x tend vers l'origine dans \mathbb{R}^n .

Comme nous le verrons dans sa preuve ce résultat repose sur un bouclage de sortie de dimension dénombrable et dépendant du temps. Il est démontré dans [2] que, si la propriété d'observabilité de la non bornitude vient d'une propriété de détectabilité de la norme de l'état, alors la stabilisabilité globale et l'observabilité globale uniforme en la commande permettent d'obtenir un bouclage de sortie de dimension finie stationnaire stabilisant asymptotiquement globalement l'origine.

2.2 Démonstration du Théorème 4

Cette preuve est divisée en deux parties.

Sans perte de généralité, nous supposons que le support $[0, T_u]$ de u_u contient strictement l'intervalle $[0, 2]$. Notons que l'hypothèse d'observabilité fait que la fonction

$$a \mapsto \phi(a, u_u, t)|_{t \in [0, \min\{2, \varpi(a)\}]}$$

est injective.

Partie 1 : Reconstruction de la condition initiale. Soit $\varpi(a)$ tel que la solution $\phi(a, u_u, t)$ est définie maximale à droite sur $[0, \varpi(a))$. Nous introduisons l'ensemble :

$$\mathcal{D} = \{(a, t) : a \in \mathbb{R}^n, t \in (0, \varpi(a))\} \subset \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \quad (16)$$

et la famille dénombrable de fonctions $k_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^p$:

$$k_i(a, t) = \int_0^t s^i h(\phi(a, u_u, s)) ds . \quad (17)$$

Dénotons par $K(a, t)$ cette famille évaluée en (a, t) . Nous obtenons un autre ensemble :

$$\mathcal{K} = \{(K(a, t), t) : (a, t) \in \mathcal{D}\} \subset (\mathbb{R}^p)^{\mathbb{N}} \times (0, +\infty) . \quad (18)$$

L'injectivité notée ci-dessus, cette définition et le fait que l'algèbre des polynômes soit dense dans $C^0([0, t]; \mathbb{R}^p)$ pour la norme L^2 et pour tout $t > 0$ impliquent l'existence d'une fonction $\theta : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $(a, t) \in \mathcal{D}$, nous ayons :

$$\theta(K(a, t), t) = a . \quad (19)$$

Partie 2 : Écriture d'une loi de commande et analyse de la boucle fermée. Soit \bar{u} la loi de commande stabilisant globalement asymptotiquement l'origine, donnée par l'hypothèse de stabilisabilité. Soient ε_1 et ε_2 les fonctions suivantes de $[0, +\infty)$ sur $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\tau) &= 0 \quad \text{si } \tau < 1 , \\ &= 1 \quad \text{si } 1 \leq \tau , \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\tau) &= 1 \quad \text{si } \tau < 2 , \\ &= 0 \quad \text{si } 2 \leq \tau . \end{aligned} \quad (21)$$

Avec la notation

$$\tau(t) = \min \left\{ 3, \frac{t}{2T_u} + \frac{1}{2} \frac{\sup_{s \in [0, t]} \{|y(s)|\}}{1 + |y(0)|} \right\} ,$$

nous définissons la loi de commande par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} = \varepsilon_2(\tau) \\ \dot{k}_i = \varepsilon_2(\tau) t^i y \\ \dot{x}_0 = \varepsilon_2(\tau) f(\hat{x}, u) \\ \dot{x}_1 = f(\hat{x}, u) \\ \hat{x} = x_1 - x_0 + \phi(\varepsilon_1(\tau)\theta((k_0, k_1, \dots), \sigma), u_u, \sigma) \\ u = [1 - \varepsilon_2(\tau)] \bar{u}(\hat{x}) + \varepsilon_2(\tau) u_u(t) \end{array} \right. , \begin{array}{l} \sigma(0) = 0 \\ k_i(0) = 0 \\ x_1(0) = x_0(0) \end{array} \quad (22)$$

Dans cette loi, τ joue le rôle d'un chronomètre. C'est une fonction strictement croissante de t jusqu'à atteindre le seuil de 3. D'après notre définition de u et avec la propriété d'observabilité de la non bornitude, nous savons que, si, à un instant t , $\tau(t) \leq 2$, alors la commande sur $[0, t[$ est u_u et la solution correspondante de (11) n'a pas encore explosé.

Remarquons que $\theta((k_0, k_1, \dots), 0)$ n'est pas définie. C'est pourquoi nous introduisons la fonction $\varepsilon_1(\tau)$. Ainsi, pour toute condition initiale de (11), la solution correspondante de (11), (22) donne une fonction du temps $\varepsilon_1(\tau(t))\theta((k_0(t), k_1(t), \dots), \sigma(t))$ qui est bien définie puisque $\varepsilon_1(\tau(t))$ est identiquement nulle pour t au voisinage de 0.

Aussi, pour toute solution de (11) issue de a , nous avons :

$$2 \geq \tau(t) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \{t > 0, \quad \theta(k_0(t), k_1(t), \dots, \sigma(t)) = a\} . \quad (23)$$

Soit alors t_0 l'unique instant où $\tau(t) = 2$, nous avons :

$$\sigma(t_0) = t_0 \quad , \quad \hat{x}(t_0) = \phi(\theta((k_0(t_0), k_1(t_0), \dots), t_0), u_u, \sigma(t_0)) = x(t_0) . \quad (24)$$

Puisque, après cet instant,

$$\dot{\sigma} = 0 \quad , \quad \dot{k}_i = 0 \quad , \quad \varepsilon_2 = 0 \quad , \quad \dot{x}_0 = 0$$

et nous nous contentons de recopier le système (11) pour obtenir la dynamique de x_1 nous avons :

$$\hat{x}(t) = x(t) \quad \forall t \geq t_0 . \quad (25)$$

Nous en concluons que la commande u est $u = \bar{u}(x)$, la commande stabilisante. Notre conclusion s'en suit.

References

- [1] F. Mazenc, L. Praly, and W. P. Dayawansa, Global stabilization by output feedback : Examples and Counter-Examples, *Systems & Control Letters* 23 (1994) 119-125
- [2] L. Praly, A. Astolfi, Global asymptotic stabilization by output feedback under a state norm detectability assumption. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, December 2005
- [3] H. Sussmann, Single-input observability of continuous time-systems. *Math. Systems Theory*, 12, 371-393 (1979)
- [4] A. Teel, L. Praly, Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback, *Systems & Control Letters* 22 (1994) 313-325