



HAL
open science

J.D. Nystuen et M.F. Dacey, 1961, A Graph Theory Interpretation of Nodal Regions, Version bilingue et commentée

John D. Nystuen, Michael F. Dacey, Françoise Bahoken, Laurent Beauguitte

► **To cite this version:**

John D. Nystuen, Michael F. Dacey, Françoise Bahoken, Laurent Beauguitte. J.D. Nystuen et M.F. Dacey, 1961, A Graph Theory Interpretation of Nodal Regions, Version bilingue et commentée. 2021. hal-03443034

HAL Id: hal-03443034

<https://hal.science/hal-03443034>

Submitted on 23 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

John D. Nystuen and Michael F. Dacey, 1961,
A Graph Theory Interpretation of Nodal Regions
Papers of the Regional Science Association,
7(1): 29-42.
Version bilingue et commentée

groupe f.m.r.



Automne 2021

Version traduite et commentée par Françoise Bahoken (Université Gustave-Eiffel) et Laurent Beauquitte (CNRS, UMR Géographie-cités)

Présentation

Cet article de Nystuen et Dacey est à notre connaissance le premier en géographie où l'expression *graph theory* apparaît dans le titre, il est publié un an après celui de William Garrison qui mobilisait pour la première fois la théorie des graphes (1960). Si les deux jeunes étudiants sont fortement influencés par William Garrison, professeur de géographie à l'Université de Washington, seul Nystuen voit sa thèse dirigée par ce dernier, celle de Dacey étant dirigée par Edward Ullman, spécialiste des transports et de science régionale (Haining et Hudson, 2009).

Contrairement à Garrison (*ibid.*) ou à Kansky deux ans plus tard, les auteurs travaillent ici sur une matrice de flux origine-destination et non sur un réseau d'infrastructures. L'article propose une méthode de filtrage des flux permettant de produire une régionalisation et une partition hiérarchisée des villes.

La méthode a été appliquée en France quinze ans plus tard (Dumolard, 1975), grâce à la traduction française de l'ouvrage de Peter Haggett (1973) qui favorisa son appropriation.

Les termes utilisés par les auteurs peuvent surprendre les géographes quantitativistes contemporaines qui utilisent toujours cette méthode : il est très rarement question dans le texte de « flux majeur » ou de « flux dominant » (même si le terme *dominance* apparaît, l'expression *largest flow* est privilégiée); les auteurs évoquent les *associations* plutôt que les *relations* entre les villes. Si nous avons adapté le texte afin de le rendre plus fluide par endroits, nous avons conservé les termes originaux.

Références

Dumolard, Pierre, 1975, Région et régionalisation une approche systémique, *L'Espace géographique* 4(2) : 93-111.

Garrison, William L., 1960, Connectivity of the Interstate Highway System, *Papers and Proceedings of the Regional Science Association* 6 : 121-37.

Haggett, Peter, 1973, *L'analyse spatiale en géographie humaine*, Collection U, Armand Colin.

Haining, Robert P. et John C. Hudson, 2009, Michael Francis Dacey : A Tribute, *Geographical Analysis*, 41(4) : 346-351.

Les numéros entre crochets dans la version anglaise correspondent à la pagination de l'article paru en 1961. Toutes les notes en bleu dans la traduction française sont des traductrices.

A GRAPH THEORY INTERPRETATION OF NODAL REGIONS

By John D. Nystuen and Michael F. Dacey

The authors are, respectively, Assistant Professor of Geography in the University of Michigan and Assistant Professor of Regional Science in the University of Pennsylvania. This study was formulated and the computations were obtained while both authors were at the University of Washington, Seattle. Professor Nystuen has been the primary contributor to the present statement, The responsibility for this statement is, of course, shared jointly.

THE PURPOSE OF THIS PAPER is to describe a procedure for ordering and grouping cities by the magnitude and direction of the flows of goods, people, and communications between them. Current theories of nodal regions and central place hierarchies provide the bases for the recognition of region-wide organization of cities into networks. These two theories were developed by students who recognized that the direction and magnitude of flows associated with social processes are indicators of spatial order in the regional structure of urban society. Whether the flow is local and to the city's hinterland, or regional and to the rank ordering of cities, the notion of central or nodal point is dependent upon the levels of strongest associations within the total flow.¹

The present problem is to develop a method capable of quantifying the degree of association between city pairs in a manner that allows identification of the networks of strongest association. These associations may be in terms of interactions that occur directly between two cities, or indirectly through one or more intermediary cities. The magnitude of the combined direct and indirect associations is measured by an index that is related to certain concepts of graph theory. This index is used to identify the degree of contact between city pairs and it provides a quantitative basis for grouping cities. The resulting sub-groups of cities are analogous to nodal regions. When each city in a study region is assigned to a subgroup, it is possible to specify the rank ordering of cities and to evaluate the functional relations of the nodal hierarchy.

In this paper, pertinent geographic and graph theoretic concepts are discussed and are then used as a basis for deriving the method of isolating nodal regions. While this method is illustrated by the use of intercity telephone calls in Washington state, the techniques are quite general and may be adapted to [30] many types of phenomena. A particular phenomenon is

1. Berry, B.J.L. and W.L. Garrison, "A Note on Central Place Theory and the Range of a Good," *Economic Geography*, Vol. 34 (1958), pp. 304-311. Ullman, E.L., "A Theory for Location of Cities," *American Journal of Sociology*, Vol. 46 (1941), pp. 853-864. Whittlesey D., "The Regional Concept and the Regional Method," *American Geography: Inventory and Prospect*, (P.C. James and C.F. Jones, eds.) Syracuse University, Syracuse, 1954.

suitable for this type of analysis when it may be viewed as a relationship or flow that links objects that are properly mapped as points. In the present illustration, cities are conceptualized as punctiform elements in a telephone network. Other suitable areas of application include the flow of information or material products between business firms in a metropolitan area, the flow of mail or freight between cities in a region, the interpersonal relations between the inhabitants of a city or the political structure that connects federal, state and local governments.

Relationship to Existing Theory

Cities may be viewed as nuclei of specialized activities which are spatially concentrated and functionally associated. Each activity has its own set of associations outside the city. To account for the many different external connections of each specialization, general statements concerning urban associations must be multi-dimensional. Accordingly, urban hinterlands are normally defined by establishing a boundary from a composite of the spatial range of several central place functions, such as the trade area of the local newspaper, the extent of wholesale drug distribution, bus passenger volumes, governmental jurisdiction, and similar indices of central place functions.

Long-distance telephone communications may be considered a single index of this multi-dimensional association among cities. A grouping of cities on the basis of telephone data defines only a network of telephone traffic centers. The validity of interpreting these telephone traffic centers as an accurate indicator of multifunctional associations depends upon a correspondence of the hinterlands which are developed with those obtained from studies which evaluate many types of contacts. The authors are willing to accept that telephone flows are one of the best single indices of all functional contacts. It has an advantage over the use of a series of indices because it obviates weighing the individual contributions of the several indices.²

The Nodal Region or Hinterland

Nodal regions are defined by evaluating the external contacts of small areal units. Each of these areal units is assigned to that place with which it has the dominant association. Usually, this will be a nearby city, and this city is defined as the central place or nodal point for the unit areas oriented to it. The aggregation of these unit areas, in turn, is called the nodal region.

This does not deny the existence of other flows or associations to and from each areal unit. Such flows do exist so that each areal unit is connected to many other cities. Newspaper circulation, for example, may be dominated by the local daily while the nearest metropolitan paper may also be well represented, and *The New York Times* may find its way into a few homes

2. Hammer, C. and F.C. Iklé, "Intercity Telephone and Airline Traffic Related to Distance and the 'Propensity to Interact'," *Sociometry*, Vol. 20 (1957), pp. 306-316. Harris, C.D., *Salt Lake City : A Regional Capital*, University of Chicago, Chicago, 1940. Ullman, E.L., *Mobile : Industrial Seaport and Trade Center*, University of Chicago, Chicago, 1940.

in the area. Also, many sporadic contacts with former hometown papers may be present. [31] Nevertheless, the “dominant association” remains the critical concept in defining a nodal structure. The remaining non-dominant associations are not used, even though the magnitudes of some of these associations may be relatively large.

The Hierarchy of Cities

The nodal region describes the relationship between the hinterland, which is areal, and the central or nodal city, which is punctiform. Clearly, there is no loss of generality by considering only paired contacts between points. In the hinterland concept, the areal units may be abstracted to the level of points so that the association is in terms of many points being linked to a single central point.³

The hinterland of a major metropolitan center, such as Chicago, may encompass a large region and incorporate many of the region’s functions. The strongest of the flows between Chicago and its hinterland are point to point associations of the cities within the region. At this scale, the relationship between nodal regions and the hierarchy of central places becomes clear. The major hinterland of Chicago is defined by its dominant association with many smaller metropolises. Each of these centers, in turn, is the focus of association from other, smaller centers within its immediate vicinity. These associations incorporate lower-order functions than those establishing direct associations to Chicago. In this fashion city regions are nested together, intimately dependent upon the range of the functions which define the associations at each level.

A hierarchy of cities of this type may be reduced to an abstract network of points and lines. The points represent the cities while the lines represent the functional associations. Though a myriad of lines exists in the network, there is present a basic structure of strongest associations which creates the nested nodal regions and the hierarchy of cities. Both the direct and indirect associations are important in these intercity structures. In terms of the direct associations, for example, a wholesale establishment may receive orders directly and ship directly to some points within the system. Alternately, the associations are indirect when the orders are accumulated at various levels of the hierarchy and proceed upward to the regional headquarters. In the same manner, the outbound shipments from the central city proceed down the ranks to intermediary levels through middlemen, rather than directly to every point in the region.

Many associations are of this indirect type. For instance, political control moves up and down the ranks, rather than through direct communication between the national party leaders and the ward leaders. Most commodities

3. For example see : Isard, W. and D.J. Ostroff., “General Interregional Equilibrium,” *Journal of Regional Science*, Vol. 2 (1960) pp. 67-74.

are assembled and distributed through a hierarchical structure within the organization. This results, in part, from the economies of moving large lots over long distances and, in part, from the better control it affords over the operation. In evaluating the entire fabric of urban society, it is evident that subtle, indirect influences and associations are frequently exerted by one location on another. A system of analysis which accounts for both the direct and the indirect as-[32]sociations between cities is appropriate.

In summary, the nodal region is defined on the basis of the single strongest flow emanating from or moving to each of the unit areas in the vicinity of a central place. The region is delimited by the aggregation of these individual elements. The hierarchy of central places is determined by the aggregation of the smallest central places which are dependent upon a single, larger center for the functions they lack. This nesting of cities defines the organization of networks of cities and the position of each city within the network. Such nesting depends upon the available bundle of functions and the relative dominance of bundles.

In this study we start with the cities and towns of a large area. Then, the structure of association among the cities is specified by assigning each city to one of several subgroups. By considering the system as a set of points and lines, where the lines represent the association between points, certain theorems of linear graphs become available for the analysis of the functional association of cities within an area.

A GEOGRAPHICAL APPLICATION OF SOME GRAPH THEORY CONCEPTS

Graph theory is a mathematics of relations. By specifying certain properties of the relations between cities and accepting the point-line abstraction of graph theory, certain theorems become available for analyzing intercity flows.⁴ Consider the cities in a region as a set of points. Consider, also, a line joining a pair of points whenever there exists a certain flow between the cities they represent. The finite collection of points and lines, where each line contains exactly two points, is a linear graph of the relations established by the flows.

Some Characteristics of Linear Graphs

A point is called *adjacent* to another point if it is connected to it by a line. The network of lines is the only information contained within the graph.

4. Some general statements of graph theory are : König, D., *Theorie der Endlichen und Unenlichen Graphen*. Leipzig, 1936 (reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, 1950); Berge, C., *Theorie des Graphes et Ses Applications*. Dunod, Paris, 1958; Harary, F., "Unsolved Problems in the Enumeration of Graphs," *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, Vol. 5 series A (1960) pp. 63-95;—, "Some Historical and Intuitive Aspects of Graph Theory," *Siam Review* Vol. 2 (April 1960) pp. 123-131. The utility of graph theory for geographic analysis has been demonstrated by Garrison, W.L., "Connectivity of the Interstate Highway System," *Papers and Proceedings of The Regional Science Association*, Vol. 6 (1960) pp. 121-187.

Scalar distance and direction, the most striking aspects of geographical maps, are not defined for a graph. If the relationship is of equal value for every connected pair, the graph is a *binary graph*. Most graph theory relates to this type of construction which simply indicates whether a line (a relation) exists or does not exist between any pair of points. The connections, however, may be considered to have intensity. *Intensity* is displayed on the graph by assigning a value to the lines.

Orientation of a relation between two points is displayed on the graph by an arrowhead $a \rightarrow b$, and read “ a is related to b .” A graph which specified [33] orientation is called a *directed graph* or *digraph*. The relationship between two points on a directed graph need not be symmetrical and, when intensity of the connection is defined, the intensity may be different for each direction.

A path from the points a to e is a collection of points and lines of the form, $a, a \rightarrow b, b \rightarrow c, \dots, d, d \rightarrow e, e$, where the points a, b, \dots, e , are distinct. A *sequence* is a collection of points and lines from a to e in which the intermediate points need not be distinct. A graph is *weakly connected* if there exists a path between each pair of points, disregarding orientation. The points in a *component* of a graph are weakly connected and are not connected to any other points in the graph. The *degree* of a point is the number of points to which it is adjacent. In a directed graph a point has an out-degree and an in-degree depending on the orientation of the lines incident to it.

Matrix Notation

For every linear graph there is an *adjacency matrix* which completely describes the graph, and *vice versa*. The matrix notation is convenient for arithmetic manipulation. Every point in a graph is represented by a row and a column of the matrix. The element, x_{ij} , of the adjacency matrix takes the value of the line ; if it exists, between the points i and j ; if the line does not exist, the value of the x_{ij} is 0.

The diagonal elements, x_{ii} , of the adjacency matrix represent the relation of each point to itself. This relationship may or may not be defined. When it is not defined, all elements of the main diagonal are, by convention, put equal to zero.

Properties of the Dominant Relations Between Cities

The geographic theory reviewed above suggests that within the myriad relations existing between cities, the network of largest flows will be the ones outlining the skeleton of the urban organization in the entire region. The term “largest” implies an oriented relation because a flow between a pair of cities may be the largest in terms of one city but not necessarily in terms of the other city. The relation “largest flow” may have various definitions, such as the largest out-flow, in-flow, or total flow. The present example uses the number of out-going intercity telephone messages from each city to every

other city in the study area. It is possible to construct a directed graph of these relations. Using the principle of dominant association, a single out-directed line is assumed to be associated with each point. When number of telephone messages are used to measure intensity of intercity associations, this assumption is easily accepted because for any city the largest volume to any one city is typically several times greater than the next largest message flow. An assumption of this type is tenable only for intercity relations which may be ranked or have a unique, largest interaction. In other situations, nodal region is most likely an inappropriate concept.

The collection of largest flow lines between city pairs defines a network of orientation among the points. Where each point has a largest flow, that largest flow may be found by simple inspection of a matrix of flows between [34] all pairs, and it is the maximum element in each row when the matrix displays number of messages from the row city to the column city. The present intention is to use this notion of largest flow to aggregate cities associated with a central place. The resulting aggregation is said to be composed of the “subordinates” of the central city. The problem is the recognition of a “central city.” In order to establish a “dominate center” three additional properties of the “largest flow” relation are now identified.

One property states that a city is “independent” if its “largest flow” is to a “smaller city.” A small city remote from large metropolitan centers may display this type of independence because its largest flow is to an even smaller, nearby city. Conversely, in the same region a large satellite city closely associated with a metropolitan center does not have this independence because its largest flow is to the metropolis. So, to identify independent cities a measure of size is required. Size may be externally assigned, e.g., by population of each city ; or it may be internally assigned, e.g., by the total volume of messages to or from all cities in the region. In the example below size is assigned in accordance with the total in-message flow from all cities in the study region. This value is the column total of the matrix of flows between all pairs of cities. In these terms, an “independent” or “central city” is defined as one whose largest flow is to a smaller city : A subordinate city is a city whose largest flow is to a larger city. This assumes no ambiguities arise to obscure the dominate (largest) city of a pair. This occurs when largest flows are reflexive, that is, two cities whose largest out-connections are to each other.

A second property is transitivity. This property implies that if a city a is subordinate to city b and b is subordinate to c , then a is subordinate to c .

A third property stipulates that a city is not a subordinate of any of its subordinates. A graph showing this relation is called *acyclic*. It is easily seen that an acyclic graph contains a *hierarchy*.

Two Theorems

The largest flow from every subordinate city is called the *nodal flow*. These flows form the *nodal structure* of the region and (for the particular relation under study) this skeleton displays the functional association of the cities in a region. This structure is analogous the nodal region and contains a hierarchy of centers. It is important to recognize that in this nodal structure the out-contact from at least one point is zero. This particular case is called a *terminal point* and in terms of an urban structure, this type of point is interpreted as a central city.

The following statements are useful deductions concerning the graph of a nodal structure. Figure 1 illustrates the resulting concepts.

- (1) The components of a nodal structure partition the set of cities.

Proof. Each city is represented by a point in a graph of a nodal structure. Each point is weakly connected to every point in its component and to no point not in its component. A trivial component is an isolated point. Each point is, therefore, assigned to one and only one component. Such an assignment of a set is a partitioning.

- (2) Each component of a nodal structure has a unique central city (terminal [35] point).

Proof. Every path has at least one subordinate point and also a point to which all points on the path are subordinate by the transitive property of the relation. If this point is subordinate it must be adjacent to a point not on the path because the relation is acyclic. Upon extending the path, an end point with zero out-degree will be found in the component because at least one point is in the component and is not subordinate.⁵ This end point is the only terminal [36] point to which all points on the related paths are subordinate because no branching occurs on any path (every subordinate point has an out-degree of one).

Now assume distinct paths in a component and extend the paths to their terminal points. Any other point connected to a point in one extended path has no other connection because each point has an out-degree no greater than one. If their terminal points were distinct, the subgraphs associated with distinct paths by the method described would not be connected in any way. This contradicts the fact that all elements in a component are weakly connected. Therefore, each extended path must have the same terminal point.

Interpretation of the Nodal Structure

The nodal structure may be used to distinguish groups of cities that have maximum direct linkages and the rank order of these cities may be calculated. The hinterland of the central city may also be determined by mapping the cities in a nodal structure and then drawing a line just beyond the cities which are most distant from the central city. In accordance with existing theory, the hinterland or nodal region contains the area in which the

5. Here, only finite graphs are considered.

FIGURE 1 – Graph of a Nodal Structure in a Region. (Hypothetical)

MATRIX OF NUMBER OF MESSAGES BETWEEN CITY-PAIRS

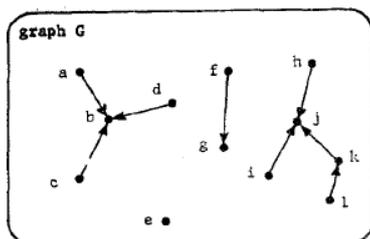
		TO CITY											
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
FROM CITY	a	0	73	15	20	28	2	3	2	1	20	1	0
	b*	69	0	45	50	58	12	20	3	6	35	4	2
	c	5	51	0	12	40	0	6	1	3	15	0	1
	d	19	67	14	0	30	7	6	2	11	18	5	1
	e*	7	40	48	26	0	7	10	2	37	39	12	6
	f	1	6	1	1	10	0	27	1	3	4	2	0
	g*	2	16	3	3	13	31	0	3	18	8	3	1
	h	0	4	0	1	3	3	6	0	12	38	4	0
	i	2	28	3	6	43	4	16	12	0	68	13	1
	j*	7	40	10	8	40	5	17	34	98	0	35	12
	k	1	8	2	1	18	0	6	5	12	36	0	15
	l	0	2	0	0	7	0	1	0	1	6	17	0
	Column Total		113	337	141	128	290	71	118	65	202	311	91

Largest flow circled.
Largest flow determined by the number of out-going messages.

*Largest flow from these cities is to a "smaller" city where "size" is determined by the column totals.

GRAPH OF THE NODAL STRUCTURE BETWEEN CITIES

Graph of a, b, ..., l cities in Region G.



Adjacency Matrix of Graph G

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a	1											
b		1										
c			1									
d				1								
e					1							
f						1						
g							1					
h								1				
i									1			
j										1		
k											1	
l												1

Blank spaces represent zero elements.

*Terminal point. **Trivial terminal point.

maximum association or flow is toward the central or nodal city. In addition, this plotting shows the hierarchy over which the central city is dominant.

An Extension of the Theory to Indirect Associations

The operations and structure that has been described evaluates only direct contacts between city-pairs. It does not incorporate the indirect associations, and these, conceivably, could be very influential in determining functional associations. Admittedly, direct contacts should receive the greater weight, but some evaluation of the indirect channels between city-pairs would seem appropriate because of the indirect associations which occur within a hierarchy. Indirect associations may be evaluated by using matrix manipulations to adjust the nodal structure. It is postulated that the in-

crement of indirect association or influence decreases with increases in the length of the channel.

Power Series of the Adjacency Matrix

The first step in accounting for indirect influence is to adjust the raw data matrix so that the direct association between each city-pair is some proportion of the total association of the largest center in the area. This is accomplished by obtaining the maximum column total of the adjacency matrix ($\max \sum_j x_{ij}$) and dividing every x_{ij} element by this summation. Put : $y_{ij} = x_{ij}/\max \sum_j x_{ij}$. The following inequalities result for a graph of n points :

$$\begin{aligned} (1) \quad & 0 \leq y_{ij} \leq 1 && (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ (2) \quad & 0 \leq \sum_j y_{ij} \leq 1 && (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

The maximum column total equals 1.

The linear graph corresponding to this adjacency matrix has the appropriate, positive, decimal loading. Let the adjacency matrix be called Y . In terms of [37] linear graphs, the power expansions of Y have interesting interpretations. The matrix Y^2 , which is obtained by $Y \cdot Y$ under usual matrix multiplication, describes a graph when all sequences have a length of 2. The length of a sequence is the number of lines it contains. Further, the loading of the lines of each sequence of length 2 are obtained by multiplication. Since the initial loadings are decimal values, an attenuated value is associated with a contact that proceeds from point i to j through a sequence of length 2. The sum of all such two-step sequences from i to j is the value of all possible indirect contacts of length 2.

This assertion may be demonstrated as true by considering the meaning of the summation :

$$(3) \quad a_{ij} = \sum_k y_{ik}y_{kj} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

and where a_{ij} is an element in Y^2 .

The y_{ik} is the loading on the line from point i to point k in the graph and the y_{kj} has the same meaning for the link from k to j . The only terms which enter the summation are those where a sequence of length 2 exists. When a link from or to the k th point does not exist, the whole term is zero. The a_{ij} is the total value of all sequences of length 2. In a similar manner it may be shown that the elements of Y^3 specify the attenuated value of all sequences of length 3, and so on. The meaning of the following summation is clear :

$$(4) \quad B = Y + Y^2 + Y^3 + \dots + Y^n + \dots$$

The element, b_{ij} , of B represents the total direct and indirect influence from i to j .

Some examples may be useful. Given the cities a, b, \dots, n , a typical sequence from a to e might be $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$. Imagine an activity in city a as having influence on a respondent in b , this b in turn contacts a

respondent in c , and continuing until a small response in e is affected. The probability of such a chain of occurrence depends, in part, on the magnitude of the flows in every link of the sequence. In general, the longer the sequence, the more remote is the probability of a response and when a response occurs it is less intense.

Alternatively, the flow of influence may be re-channeled through the same city more than once. For example, a sequence may have the form $a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow e$. All such summations are included in the matrix B .

The summation of the power expansion of Y is not demonstrated to be the correct form of the attenuation of flows in a sequence. It is extremely doubtful that the matrix B is the most appropriate measurement of the total direct and indirect influences. It is essentially a measure of chance indirect contact. The distribution of actual indirect association is very likely not at all random but rather concentrated in certain flow channels, in which case the matrix B would be an underestimate of indirect influence. It does, however, have a greater appeal than the matrix Y which incorporates only the direct influences. The choices of the particular power expansion is dictated by the ease of its computation. Several other methods may also be appropriate.⁶

Computation of the Power Series of the Adjacency Matrix

A convenient method of computing the matrix B is to use the following identity :

$$(5) (I - Y)^{-1} = I + Y + Y^2 + \dots + Y^n + \dots$$

and then :

$$(6) B = (I - Y)^{-1} - I,$$

where the I is the identity matrix. The inverse, $(I - Y)^{-1}$, is known to exist if the inequalities (1) and (2) hold.

The Nodal Structure of Matrix B

The nodal structure of matrix B is established by isolating the network of largest flows in the same manner as was described for the direct associations. Because the associations enumerated in matrix B are adjusted for both direct and indirect flows, it is expected that a more reasonable structure is obtained.

AN EXAMPLE

Washington State was chosen as the study area. The utility of the nodal structure concept is evaluated by choosing a set of cities in this area and then determining the nodal structure that prevails. The nodal structure which emerges should resemble the known hinterland and ranking of the major cities in the area. Certain cities outside of the State were included in

6. For examples see, Luce, R.D. and D. Perry, "A Method of Matrix Analysis of Group Structure," *Psychometrika*, Vol. 14 (1949) pp. 95-116; and Katz, L., "A New Status Index Derived from Sociometric Analysis," *Psychometrika*, Vol. 18 (1953) pp. 39-44.

the study in order to examine the role they play in the network of city associations. Portland, Oregon and Vancouver, British Columbia were especially important additions.

The associations were defined by the number of long distance telephone messages between city-pairs during one week in June, 1958.⁷ Certain cities were omitted from the study due to characteristics of the data and in order to limit the size of the study.

Many pairs of neighboring cities have direct dialing service and in these instances the intercity calls were not recorded in long distance data. Dormitory towns for Seattle and several “twin cities” such as Aberdeen-Hoquiam, Chehalis-Centralia and Pasco-Kennewick had direct-service exchange. This is not a serious deficiency in the data because such cities very likely function as a single point in the state-wide network, and one of the “twin cities” in each pair could be used in the study. Certain fairly large cities north of Seattle and along the Puget Sound were omitted for lack of data. These cities were serviced by a different telephone company. Because each year the telephone companies simultaneously take a one-week’ sample of intercity telephone calls, comparable data exist but there was no attempt to obtain them. Finally, all cities above a certain population size were not included in order to restrict the size of the study. Some small towns were chosen, however, in an effort to obtain samples of hierarchies with directed paths of length 2 or more. The map in Figure 2 identifies the cities in the study. With the advantage of hind-sight, it might have been preferable to have included more small towns in the study.

7. We are indebted to the Pacific Bell Telephone and Telegraph Company and especially to Mr. Homer Moyer, a Seattle officer of that company, for this information.

FIGURE 2 – Nodal Structure Based on Telephone Data, State of Washington, 1958

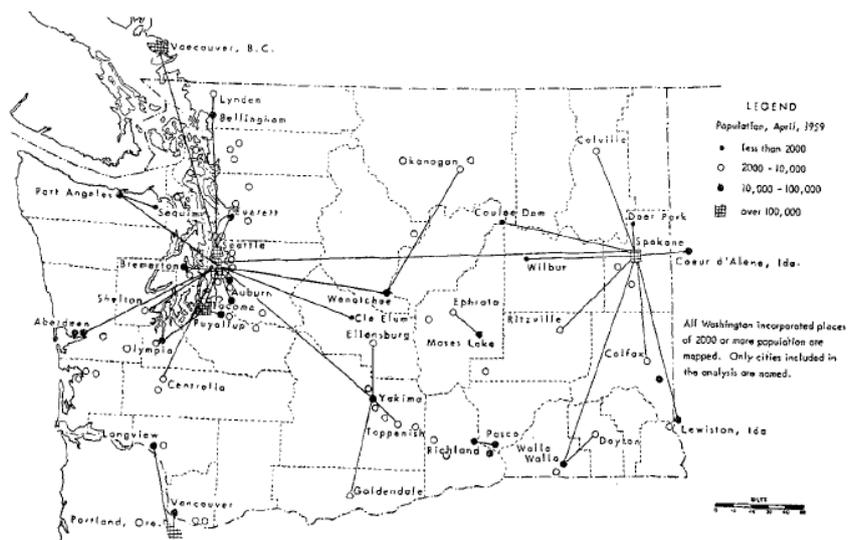


TABLE 1 – Portion of the 40 x 40 Table of Number of Messages Between City-Pairs, for One Week of June 1958.

From City	Code	To City												
		01	02	03	04	08	13	26	27	40				
Aberdeen	01	—	24	50	0	246	3 671	54	4	1 005				
Auburn	02	26	—	35	0	8	7 654	42	0	163				
Bellingham	03	55	27	—	782	24	2 494	101	3	356				
Lynden	04	4	0	2 250	—	4	357	9	0	110				
Longview	08	329	15	32	0	—	1 911	87	4	4 773				
...														
Seattle	13	3 427	4 579	3 843	308	1 268	—	6 168	269	16 781				
...														
Spokane	26	61	32	119	6	85	9 991	—	3 842	3 838				
Couer d'Alene	27	0	4	4	0	6	254	5 104	—	141				
Portland, Ore.	40	802	210	304	22	4 190	22 179	3 310	98	—				
Largest column total—Seattle 154,192.														

[40] Certain channels of communication are omitted because they are not recorded in the long distance data. Direct-line calls are an example. Probably the only large volume, direct-line in the state links Seattle with Olympia, the state capital. If these data were included, the maximum association of Olympia might shift from Tacoma to Seattle. Though beyond the scope of this study, interesting results could be obtained if all channels of communication were included, such as radio, telegraph, mail and messenger service.

Table I is an example of the raw data tabulations. Forty cities were used in the study.⁸ The entire table is the adjacency matrix of the almost completely connected graph of associations —there are a few zero entries. The row totals are the total out-contacts while the column totals are the total in-contacts. The direction of the message flow is read from the “row” city to the “column” city. The main diagonal entries are zero by convention.

8. A copy of the entire matrix shown in Table I may be obtained from John D. Nystuen, Department of Geography, University of Michigan.

TABLE 2 – A Portion of the Matrix B (Direct and Indirect Associations)

From City	Code	01	02	To 03	City 04	08	13	26	27	40
Aberdeen	01	—	.248(4)	.395(4)	.551(6)	.166(3)	.245(2)*	.479(4)	.325(5)	.726(3)
Auburn	02	.303(4)	—	.364(4)	.109(5)	.108(4)	.508(2)*	.500(4)	.107(5)	.171(3)
Bellingham	03	.402(4)	.232(4)	—	.513(3)	.180(4)	.165(2)*	.739(4)	.247(5)	.254(3)
Lynden	04	.328(5)	.790(6)	.148(2)*	—	.307(5)	.239(3)	.716(5)	.689(7)	.753(4)
Longview	08	.221(3)	.150(4)	.252(4)	.341(6)	—	.131(2)	.699(4)	.325(5)	.316(2)*
...										
Seattle**	13	.227(2)	.303(2)	.253(2)	.204(3)	.870(3)	—	.409(2)	.188(3)	111(1)
...										
Spokane	26	.568(4)	.421(4)	.953(4)	.536(5)	.688(4)	.649(2)*	—	.252(2)	.260(2)
Couer d'Alene	27	.650(6)	.332(5)	.340(5)	.560(7)	.459(5)	.191(3)	.335(2)*	—	.103(3)
Portland, Ore.**	40	.563(3)	.185(3)	.237(3)	.176(4)	.278(2)	.14001	.224(2)	.725(4)	—
Column Total		.548(2)	.588(2)	.613(2)	.866(3)	.585(2)	.102(0)	.229(1)	.311(2)	.563(1)

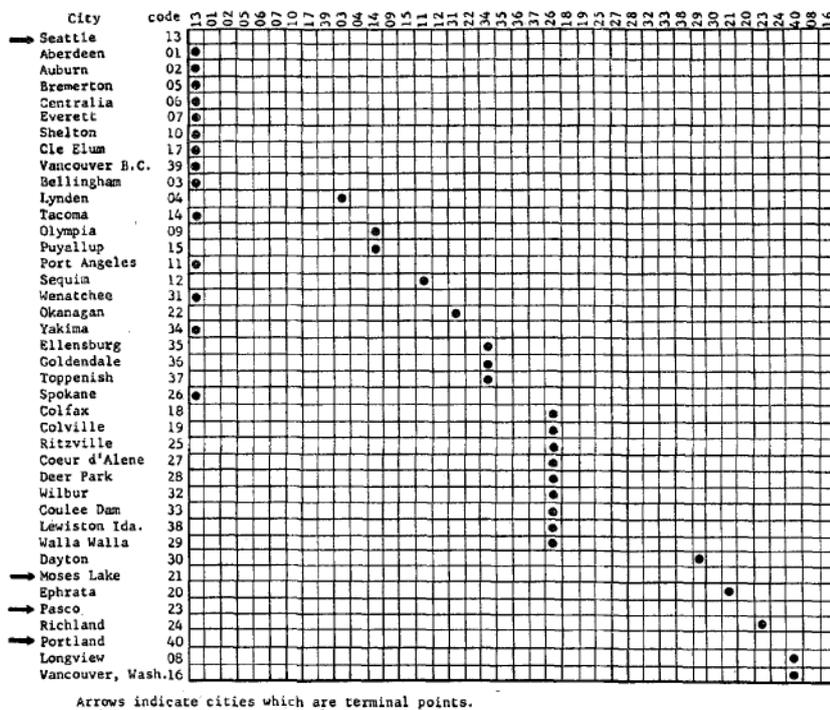
**Terminal point. *Nodal flow.

Remark : Figures are rounded to three significant digits. Data were processed to 8 significant figures. The value in parentheses represents the number of zeros before the first significant digit.

Table II is the adjacency matrix B which evaluates both the direct and indirect associations between the cities.⁹ The nodal structure contained in this matrix was determined by (1) identifying the nodal flow, (2) ranking the cities by their total incoming associations (column totals), (8) assigning an orientation from cities with smaller total associations to one with a larger total association and (4) identifying the non-oriented cities as the center of its hierarchy. Figure 2 shows the results. Figure 3 is the adjacency matrix of the nodal structure derived from the direct and indirect associations.

[41]

FIGURE 3 – Matrix of the Nodal Structure



CONCLUSIONS

The techniques defined in this paper will divide a set of cities into subgroups which specify a central place and its subordinate hierarchy. The association between cities is not the only system which may be defined as a network of points and lines. Nations or states may be thought of as points with migrations or commodity flows as lines. The important step in the employment of abstract linear graph analysis is the assignment of plausible meaning to the points and lines, preferably in terms of some real world phenomena.

9. The computations were made possible by a grant of computer time from Western Data Processing, University of California at Los Angeles.

The usefulness of the attributes and the interpretation of the resulting hierarchy depends on the correspondence between an empirical example using graph theory analysis and other knowledge of the phenomena. The procedure described in this paper may be employed in a variety of ways, but the application is valid only when significant theoretical conclusions are produced and verified empirically.

Implications of the Nodal Structure in Washington State

The nodal regions that are suggested by the nodal structure agree, in general, with expectation. Seattle is the dominant center with nested hierarchies [42] defined around Spokane and Yakima. Portland forms a system of its own by capturing nearby Washington State cities. The two small but independent hierarchies defined on Pasco and Moses Lake are most interesting.

Ephrata and Moses Lake are located on the boundary between two large hinterlands where it is postulated that self-reliance or independence is most likely to appear.¹⁰ In addition, these two cities constitute an anomaly because, while Ephrata is an old city, Moses Lake was recently created by government fiat.

The small hierarchy with Pasco as the central point was : anticipated by Ullman when he evaluated the growth centers of the western United States :¹¹

“One hypothesis that occurs to me for the future is that Pasco-Ken-neick-Richland . . . might develop as the subregional shopping center, supplanting the dominance of older (and more attractive) Yakima and Walla Walla.”

The effect of the national border is clear. Vancouver is subordinate to Seattle and it does not dominate any city in the study, even though it is a large city and is much nearer to Lynden and Bellingham than is Seattle. It is probable that Vancouver would have been a terminal point if other Canadian cities had been included within the study. This is not a defect in the method. The results are only an evaluation of the associations between the cities in the study.

The nodal region of Tacoma, a large city south of Seattle, is also anticipated by theory. Tacoma is dominant in a nearby region. This region is off-center, in the direction away from the larger city of Seattle. The dominance of Seattle re-asserts itself at even greater distances so that Aberdeen and Centralia are directly associated with Seattle, rather than by a two-link

10. Hoover, E.M., *The Location of Economic Activity*, McGraw-Hill, New York, 1948. Isard, W., *Location and Space Economy*, John Wiley and Sons, New York, 1956. Lösch, A., *The Economics of Location*, Yale University, New Haven, 1954.

11. Ullman, E.L., *Growth Centers of the West*, University of Washington, Seattle, 1955, p. 48.

path through the closer and larger city of Tacoma¹². This and the other agreements with existing theory and accepted empirical evidence demonstrate the utility of the nodal structure for analyzing city associations.

Further Graph Theory Applications

Given a set of cities in an area and a measure of association between them, a set of hierarchies has been obtained. Even more information is desirable. Spokane is obviously the second most important central place in Washington state, yet it is subordinate to Seattle in a hierarchy while the much smaller places of Moses Lake and Pasco dominate their respective systems. Intuitively, a second in command position in a large organization is more important than the primary position in a tiny organization. Some measure of this difference in status is desirable. A further application of graph theory to this problem is suggested in a paper by Harary.¹³ His ideas are adapted to this problem by the present authors in a further study of city associations.

12. Hoover, E.M., *op. cit.* Isard, W., *op. cit.* Lösch, A., *op. cit.*

13. Harary, F., "Status and Contrastatus," *Sociometry*, Vol. 22 (1959) pp. 23-43.

UNE INTERPRÉTATION DES RÉGIONS NODALES PAR LA THÉORIE DES GRAPHES

John D. Nystuen et Michael F. Dacey

Les auteurs sont respectivement professeur adjoint de géographie à l'Université du Michigan et professeur adjoint de science régionale à l'Université de Pennsylvanie. Cette étude a été conçue et les calculs ont été effectués alors que les deux auteurs étaient à l'Université de Washington, Seattle. Le professeur Nystuen a été le principal contributeur de cet article. La responsabilité de cet article est, bien entendu, partagée conjointement.

L'OBJECTIF DE CET ARTICLE est de décrire une procédure permettant de classer et de regrouper les villes en fonction de l'ampleur et de la direction de flux de marchandises, de personnes et de communications entre elles. Les théories actuelles des régions nodales et des hiérarchies de lieux centraux fournissent les bases de la reconnaissance de l'organisation régionale des villes en réseaux. Ces deux théories ont été élaborées par des chercheurs qui ont montré que la direction et l'ampleur des flux associés aux processus sociaux sont des indicateurs de l'ordre spatial dans la structure régionale de la société urbaine. Que le flux soit local et concerne l'arrière-pays de la ville ou régional et concerne la hiérarchisation des villes, la notion de point central ou nodal dépend des niveaux des associations les plus fortes au sein du flux total¹.

Le problème actuel est de mettre au point une méthode permettant de quantifier le degré d'association entre des paires de villes d'une manière qui autorise l'identification des réseaux d'association les plus forts. Ces associations peuvent être exprimées en termes d'interactions se produisant directement entre deux villes ou indirectement *via* une ou plusieurs villes intermédiaires. L'intensité des associations directes et indirectes est mesurée par un indice lié à certains concepts de la théorie des graphes. Cet indice est utilisé pour identifier le degré de contact entre les paires de villes et fournit une base quantitative pour leur regroupement. Les sous-groupes de villes qui en résultent sont analogues aux régions nodales. Lorsque chaque ville d'une région d'étude est assignée à un sous-groupe, il est possible de spécifier le rang des villes et d'évaluer les relations fonctionnelles de la hiérarchie nodale.

Dans cet article, des concepts géographiques et issus de la théorie des graphes sont discutés puis utilisés pour construire une méthode d'identification des régions nodales. Bien que cette méthode soit illustrée par l'utilisation

1. Berry, B.J.L. et W.L. Garrison, « A Note on Central Place Theory and the Range of a Good », *Economic Geography*, Vol. 34 (1958), pp. 304-311. Ullman, E.L., « A Theory for Location of Cities », *American Journal of Sociology*, Vol. 46 (1941), pp. 853-864. Whittlesey D., « The Regional Concept and the Regional Method », *American Geography : Inventory and Prospect*, (P.C. James et C.F. Jones, eds.) Syracuse University, Syracuse, 1954.

des appels téléphoniques interurbains dans l'État de Washington, les techniques sont assez générales et peuvent être adaptées à de nombreux phénomènes. Un phénomène donné se prête à ce type d'analyse lorsqu'il peut être considéré comme une relation ou un flux reliant des objets cartographiés par des points. Les villes sont ici conceptualisées comme des éléments ponctuels d'un réseau téléphonique. D'autres domaines d'application comprennent le flux d'informations ou de produits matériels entre les entreprises d'une zone métropolitaine, le flux de courrier ou de fret entre les villes d'une région, les relations interpersonnelles entre les habitants d'une ville ou la structure politique qui relie les gouvernements fédéraux, étatiques et locaux².

Relation avec la théorie existante

Les villes peuvent être considérées comme des noyaux d'activités spécialisées qui sont concentrées dans l'espace et associées fonctionnellement. Chaque activité présente son propre ensemble d'associations en dehors de la ville. Pour tenir compte des nombreuses connexions externes de chaque spécialisation, les caractéristiques générales concernant ces associations urbaines doivent être multidimensionnelles. Les arrière-pays urbains sont généralement bornés par une frontière définie par un indicateur composite. Cet indicateur reflète différentes portées spatiales liées aux fonctions des lieux centraux, telle la zone de diffusion du journal local, l'étendue de la distribution en gros de médicaments, le volume de passagers des bus, la juridiction gouvernementale et autres indices similaires.

Les communications téléphoniques à longue distance peuvent être considérées comme un indice unique de cette association multidimensionnelle entre les villes. Un regroupement de villes sur la base de données téléphoniques ne définit qu'un réseau de centres de trafic téléphonique. La validité de l'interprétation de ces centres comme indicateur des associations multifonctionnelles dépend de la précision des résultats obtenus comparés à ceux issus d'études évaluant d'autres types de contacts. Les auteurs considèrent que les flux téléphoniques constituent l'un des indices les plus performants. Il présente l'avantage d'éviter de considérer plusieurs indices³.

La région nodale ou l'arrière-pays

Les régions nodales sont définies en évaluant les contacts externes de petites unités aréales. Chacune de ces unités est reliée au lieu avec lequel elle a l'association dominante. Il s'agit en général d'une ville proche, cette ville

2. Il est bien entendu fait référence ici à l'organisation administrative étatsunienne.

3. Hammer, C. et F.C. Iklé, « Intercity Telephone and Airline Traffic Related to Distance and the 'Propensity to Interact' », *Sociometry*, Vol. 20 (1957), pp. 306-316. Harris, C.D., *Salt Lake City : A Regional Capital*, University of Chicago, Chicago, 1940. Ullman, E.L., *Mobile : Industrial Seaport and Trade Center*, University of Chicago, Chicago, 1940. Les emprunts à la sociométrie sont modestes chez les géographes quantitativistes américains de la période; cette note ainsi que la note 7 montrent qu'ils connaissent une partie de ces travaux.

est définie comme le lieu central ou le point nodal des zones orientées vers elle. L'agrégation de ces zones élémentaires est appelée région nodale.

Cela ne nie pas l'existence d'autres flux ou associations vers et depuis chaque unité aérale. De tels flux existent bel et bien, de sorte que chaque unité est connectée à de nombreuses autres villes. La circulation des journaux, par exemple, peut être dominée par le quotidien local, le journal métropolitain le plus proche peut être bien représenté et le *New York Times* se retrouver dans quelques foyers de la région. En outre, de nombreux contacts sporadiques avec les journaux des anciennes villes de résidence peuvent être présents. Néanmoins, l'« association dominante » reste le concept critique pour définir une structure nodale. Les autres associations non dominantes ne sont pas utilisées même si l'intensité de certaines d'entre elles peut être relativement importante.

La hiérarchie des villes

La région nodale décrit la relation entre l'arrière-pays, qui est aréale, et la ville centrale ou nodale, qui est ponctuelle. Il n'y a évidemment pas de perte de généralité en ne considérant que les contacts entre couples de points. Dans le concept d'arrière-pays, les unités aréales peuvent être représentées par des points, de sorte que l'association se fait entre de nombreux points et un point central unique⁴.

L'arrière-pays d'un grand centre métropolitain, tel que Chicago, peut englober une grande région et intégrer nombreuses de ses fonctions. Les flux les plus importants entre Chicago et son arrière-pays sont des associations point à point des villes de la région. À cette échelle, la relation entre les régions nodales et la hiérarchie des lieux centraux devient claire. L'arrière-pays de Chicago est défini par son association dominante avec de nombreuses métropoles plus petites. Chacun de ces centres, à son tour, est le centre d'associations d'autres centres plus petits situés dans son voisinage immédiat. Ces associations intègrent des fonctions d'ordre inférieur à celles qui établissent des associations directes avec Chicago. De cette manière, les villes-régions sont imbriquées les unes dans les autres et dépendent étroitement de l'éventail de fonctions définissant les associations à chaque niveau.

Une hiérarchie de villes de ce type peut être schématisée par un réseau abstrait de points et de lignes. Les points représentent les villes, les lignes représentent les associations fonctionnelles. Bien qu'il existe une myriade de lignes dans le réseau, une structure de base des associations les plus fortes crée les régions nodales imbriquées et la hiérarchie des villes. Les associations directes et indirectes sont importantes dans ces structures interurbaines. En termes d'associations directes, par exemple, un établissement de vente en gros peut recevoir des commandes directement et expédier directement à certains points du système. Par ailleurs, les associations sont indirectes lorsque

4. Voir par exemple Isard, W. et D.J. Ostroff, « General Interregional Equilibrium », *Journal of Regional Science*, Vol. 2 (1960) pp. 67-74.

les commandes sont accumulées à différents niveaux de la hiérarchie et remontent jusqu'au siège régional. De la même manière, les expéditions à partir de la ville centrale descendent les échelons jusqu'aux niveaux inférieurs par le biais d'intermédiaires plutôt que de leur parvenir directement.

De nombreuses associations sont indirectes. Par exemple, le pouvoir politique s'exerce de haut en bas dans la hiérarchie plutôt que par une communication directe entre les dirigeants du parti national et les responsables de quartier. La plupart des marchandises sont assemblées et distribuées par une structure hiérarchique au sein de l'organisation. Cela résulte, d'une part, des économies liées au transport de grandes quantités sur de longues distances et, d'autre part, du contrôle qu'elle permet d'exercer sur l'opération de transport. En évaluant l'ensemble du tissu de la société urbaine, il est évident que des influences et des associations subtiles et indirectes sont fréquemment exercées par un lieu sur un autre. Un système d'analyse qui tient compte à la fois des associations directes et indirectes entre les villes est approprié.

En résumé, la région nodale est définie sur la base du flux le plus fort émanant de ou se dirigeant vers chacune des zones élémentaires situées à proximité d'un lieu central. La région est délimitée par l'agrégation de ces éléments individuels. La hiérarchie des lieux centraux est déterminée par l'agrégation des plus petits lieux centraux qui dépendent d'un seul centre plus important pour les fonctions qui leur font défaut. Cette imbrication de villes définit l'organisation du réseau de villes et la position de chaque ville au sein du réseau. Cette imbrication dépend du faisceau de fonctions disponibles et de la domination relative de ces faisceaux.

Dans cette étude, nous commençons par les villes et les villages d'une grande région. Ensuite, la structure de l'association entre les villes est spécifiée en assignant chaque ville à un des sous-groupes. En considérant le système comme un ensemble de points et de lignes, où les lignes représentent l'association entre les points, certains théorèmes des graphes linéaires deviennent utilisables pour l'analyse de l'association fonctionnelle des villes dans une zone.

UNE APPLICATION GÉOGRAPHIQUE DE CONCEPTS ISSUS DE LA THÉORIE DES GRAPHES

La théorie des graphes est l'étude mathématique des relations. En spécifiant certaines propriétés des relations entre les villes et en acceptant l'abstraction point-ligne de la théorie des graphes, certains théorèmes deviennent disponibles pour analyser les flux interurbains⁵. Considérons les villes d'une

5. Certains ouvrages généraux de la théorie des graphes sont : König, D., *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936 (réédité par Chelsea Publishing Co., New York, 1950) ; Berge, C., *Théorie des graphes et ses Applications*. Dunod, Paris, 1958 ; Harary, F., « Unsolved Problems in the Enumeration of Graphs », *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, Vol. 5 series A (1960) pp. 63-95, « Some Historical and Intuitive Aspects of Graph Theory », *Siam Review* Vol. 2

région comme un ensemble de points. Considérons également une ligne joignant une paire de points lorsqu'il existe un certain flux entre les villes qu'ils représentent. La collection finie de points et de lignes, où chaque ligne contient exactement deux points, est un graphe linéaire des relations établies par les flux.

Quelques caractéristiques des graphes linéaires

Un point est dit *adjacent* à un autre point s'il lui y est relié par une ligne. Le réseau de lignes est la seule information contenue dans le graphe. La distance scalaire et la direction, les aspects les plus frappants des cartes géographiques, ne sont pas définies pour un graphe. Si la relation est de valeur égale pour chaque paire connectée, le graphe est un *graphe binaire*. La théorie des graphes étudie le plus souvent ce type de construction qui indique simplement si une ligne (une relation) existe ou non entre une paire de points. On peut toutefois considérer que les liaisons ont une intensité. L'*intensité* est affichée sur le graphe en attribuant une valeur aux lignes.

L'*orientation* d'une relation entre deux points est affichée sur le graphe par une pointe de flèche $a \rightarrow b$ et se lit « a est relié à b ». Un graphe qui spécifie l'orientation est appelé un *graphe orienté*. La relation entre deux points sur un graphe orienté n'a pas besoin d'être symétrique et, lorsque l'intensité de la connexion est définie, l'intensité peut être différente pour chaque direction.

Un chemin allant des points a à e est un ensemble de points et de lignes de la forme, $a, a \rightarrow b, b, b \rightarrow c, \dots, d, d \rightarrow e, e$, où les points a, b, \dots, e , sont distincts. Une *séquence* est un ensemble de points et de lignes allant de a à e , dans lequel les points intermédiaires ne sont pas nécessairement distincts. Un graphe est *faiblement connecté* s'il existe un chemin entre toute paire de points, sans tenir compte de l'orientation. Les points d'une *composante connexe* d'un graphe sont faiblement connectés et ne sont connectés à aucun autre point du graphe. Le *degré* d'un point est le nombre de points auxquels il est adjacent. Dans un graphe orienté, un point a un degré sortant et un degré entrant qui dépendent de l'orientation des lignes qui lui sont incidentes.

Notation matricielle

Pour tout graphe linéaire, il existe une *matrice d'adjacence* qui décrit complètement le graphe et *vice versa*. La notation matricielle est pratique pour les manipulations arithmétiques. Chaque point d'un graphe est représenté par une ligne et une colonne de la matrice. L'élément x_{ij} de la matrice d'adjacence prend la valeur de la ligne, si elle existe, entre les points i et j ; si la ligne n'existe pas, la valeur de x_{ij} est 0.

(April 1960) pp. 123-131. L'utilité de la théorie des graphes pour l'analyse géographique a été démontrée par Garrison, W.L., « Connectivity of the Interstate Highway System », *Papers and Proceedings of The Regional Science Association*, Vol. 6 (1960) pp. 121-187. [Cet article est disponible en version bilingue et commentée dans la collection « textes » du groupe fmr \(voir la liste complète en fin de document\).](#)

Les éléments diagonaux x_{ii} de la matrice d'adjacence représentent la relation de chaque point avec lui-même. Cette relation peut être définie ou non. Lorsqu'elle n'est pas définie, tous les éléments de la diagonale principale sont par convention égaux à zéro.

Propriétés des relations dominantes entre les villes

La théorie géographique examinée plus haut suggère que, dans le cadre des relations multiples existant entre les villes, le réseau des flux les plus grands sera celui qui dessinera le squelette de l'organisation urbaine de toute la région. Le terme « le plus grand » implique une relation orientée car un flux entre une paire de villes peut être le plus grand pour une ville mais pas nécessairement pour l'autre. La relation « le plus grand flux » peut avoir plusieurs définitions tel le plus grand flux sortant, le plus grand flux entrant ou le plus grand flux total. Dans le présent exemple, on utilise le nombre de messages téléphoniques interurbains sortants de chaque ville vers toutes les autres villes de la zone d'étude. Il est possible de construire un graphe orienté de ces relations. En utilisant le principe de l'association dominante, on suppose qu'une seule ligne sortante est associée à chaque point. Lorsque le nombre de messages téléphoniques est utilisé pour mesurer l'intensité des associations interurbaines, cette hypothèse est facilement acceptée car, pour toute ville, le volume le plus important à destination d'une ville est généralement plusieurs fois supérieur au flux de messages le plus important suivant. Une hypothèse de ce type n'est défendable que pour les relations interurbaines qui peuvent être hiérarchisées ou présenter une interaction unique et intense. Dans les autres situations, la région nodale est très probablement un concept inapproprié.

L'ensemble des lignes des plus grands flux observés entre les paires de villes définit un réseau orienté. Le plus grand flux de chaque point peut être trouvé par simple inspection d'une matrice de flux entre toutes les paires de points, il s'agit de la valeur maximale de chaque ligne lorsque la matrice renseigne sur le nombre de messages d'une ville en ligne vers une ville en colonne. L'objectif est ici d'utiliser cette notion de plus grand flux pour agréger les villes associées à un lieu central. On dit que l'agrégation qui en résulte est composée des « subordonnés » de la ville centrale. Le problème est l'identification d'une « ville centrale ». Afin d'établir un « centre dominant », trois propriétés supplémentaires de la relation « plus grand flux » sont maintenant identifiées.

Une propriété stipule qu'une ville est « indépendante » si son « flux le plus grand » est dirigé vers une « ville plus petite ». Une petite ville éloignée des grands centres métropolitains peut présenter ce type d'indépendance parce que son plus grand flux est dirigé vers une ville voisine encore plus petite. À l'inverse, dans la même région, une grande ville satellite étroitement associée à un centre métropolitain ne présente pas cette indépendance car son flux le plus grand est à destination de la métropole. Ainsi, pour identifier les villes

indépendantes, une mesure de la taille est nécessaire. La taille peut être attribuée de manière externe, par exemple en fonction de la population de chaque ville, ou de manière interne, par exemple en fonction du volume total de messages à destination ou en provenance de toutes les villes de la région. Dans l'exemple ci-dessous, la taille est attribuée en fonction du flux total de messages en provenance de toutes les villes de la région étudiée. Cette valeur est le total de la colonne de la matrice des flux entre toutes les paires de villes. Une « ville indépendante » ou « centrale » est définie comme une ville dont le flux le plus grand est à destination d'une ville plus petite ; une ville subordonnée est une ville dont le flux le plus grand est vers une ville plus grande. Cela suppose qu'aucune ambiguïté ne se présente pour masquer la ville dominante (la plus grande) d'une paire. Cela se produit lorsque les flux les plus grands sont réflexifs, c'est-à-dire lorsque deux villes dont les plus grandes connexions sortantes sont orientées l'une vers l'autre.

Une deuxième propriété est la transitivité. Cette propriété implique que si une ville a est subordonnée à une ville b et que b est subordonnée à c alors a est subordonnée à c .

Une troisième propriété stipule qu'une ville n'est subordonnée à aucune de ses subordonnées. Un graphe montrant cette relation est appelé *acyclique*. Il est facile de voir qu'un graphe acyclique contient une *hiérarchie*.

Deux théorèmes

Le flux le plus grand provenant de chaque ville subordonnée est appelé le *flux nodal*. Ces flux forment la *structure nodale* de la région et, pour la relation particulière étudiée, le squelette décrit la relation fonctionnelle des villes. Cette structure est analogue à la région nodale et contient une hiérarchie de centres. Il est important de préciser que, dans cette structure nodale, il existe au moins un point sans flux sortant. Ce cas particulier est appelé un *point terminal* ; en termes de structure urbaine, ce type de point est considéré comme une ville centrale.

Les affirmations suivantes sont des déductions utiles concernant le graphe d'une structure nodale. La figure 1 illustre les concepts qui en découlent.

(1) Les composantes connexes d'une structure nodale partitionnent l'ensemble des villes.

Preuve. Chaque ville est représentée par un point dans le graphe d'une structure nodale. Chaque point est faiblement connecté à tout point de sa composante connexe et ne l'est à aucun point n'en faisant pas partie. Une composante triviale est un point isolé. Chaque point est donc affecté à une et une seule composante connexe. Une telle affectation d'un ensemble est un partitionnement.

(2) Chaque composante connexe d'une structure nodale possède une ville centrale unique (point terminal).

Preuve. Chaque chemin a au moins un point subordonné et un point auquel tous les points du chemin sont subordonnés par la propriété transitive

FIGURE 4 – Graphe d'une structure nodale dans une région (exemple fictif)

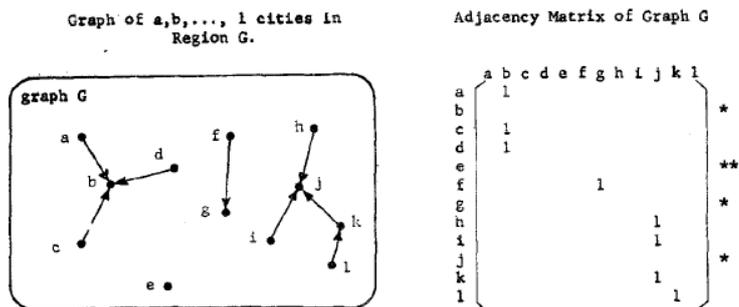
MATRIX OF NUMBER OF MESSAGES BETWEEN CITY-PAIRS

		TO CITY											
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
FROM CITY	a	0	73	15	20	28	2	3	2	1	20	1	0
	b*	69	0	45	50	58	12	20	3	6	35	4	2
	c	5	51	0	12	40	0	6	1	3	15	0	1
	d	19	67	14	0	30	7	6	2	11	18	5	1
	e*	7	40	48	26	0	7	10	2	37	39	12	6
	f	1	6	1	1	10	0	27	1	3	4	2	0
	g*	2	16	3	3	13	31	0	3	18	8	3	1
	h	0	4	0	1	3	3	6	0	12	38	4	0
	i	2	28	3	6	43	4	16	12	0	68	13	1
	j*	7	40	10	8	40	5	17	34	98	0	35	12
	k	1	8	2	1	18	0	6	5	12	36	0	15
l	0	2	0	0	7	0	1	0	1	6	12	0	
Column Total		113	337	141	128	290	71	118	65	202	311	91	39

Largest flow circled.
Largest flow determined by the number of out-going messages.

*Largest flow from these cities is to a "smaller" city where "size" is determined by the column totals.

GRAPH OF THE NODAL STRUCTURE BETWEEN CITIES



Blank spaces represent zero elements.
*Terminal point. **Trivial terminal point.

de la relation. Si ce point est subordonné, il doit être adjacent à un point qui n'est pas sur le chemin car la relation est acyclique. En parcourant le chemin, un point terminal avec un degré sortant nul sera trouvé dans la composante connexe car il existe au moins un point de la composante connexe qui n'est pas subordonné⁶. Ce point final est le seul point terminal auquel tous les points de la composante connexe sont subordonnés, aucune ramification ne se produisant sur aucun chemin (chaque point subordonné a un degré sortant de un).

6. Ici, seuls les graphes finis sont considérés. Si le premier manuel de König, cité par les auteurs dans la note 5, traite des graphes finis et infinis, seuls les graphes finis sont pris en compte dans les sciences sociales à l'époque.

Supposons maintenant des chemins distincts dans une composante connexe et parcourons-les jusqu'à leurs points terminaux. Tout autre point connecté à un point dans un chemin étendu n'a pas d'autre connexion car chaque point a un degré sortant non supérieur à un. Si leurs points terminaux étaient distincts, les sous-graphes associés à des chemins distincts par la méthode décrite ne seraient pas reliés entre eux. Cela contredit le fait que tous les éléments d'une composante connexe sont faiblement connectés. Par conséquent, chaque chemin parcouru doit avoir le même point terminal.

Interprétation de la structure nodale

La structure nodale peut être utilisée pour distinguer les groupes de villes qui ont un maximum de liens directs et le classement de ces villes peut être calculé. L'arrière-pays de la ville centrale peut également être déterminé en cartographiant les villes dans une structure nodale puis en traçant une ligne juste au-delà des villes les plus éloignées de la ville centrale. Conformément à la théorie existante, l'arrière-pays ou la région nodale contient la zone dans laquelle l'association ou le flux maximal est dirigé vers la ville centrale ou nodale. En outre, ce tracé montre la hiérarchie dominée par la ville centrale.

Une extension de la théorie aux associations indirectes

Les opérations et la structure qui ont été décrites n'évaluent que les contacts directs entre les paires de villes. Elles n'intègrent pas les associations indirectes, qui, on peut le concevoir, pourraient avoir une grande influence sur la détermination des associations fonctionnelles. Certes, les contacts directs devraient avoir le plus de poids, mais une certaine évaluation des canaux indirects entre les paires de villes semble appropriée en raison des associations indirectes qui se produisent au sein d'une hiérarchie. Les associations indirectes peuvent être évaluées en effectuant des manipulations de matrice pour ajuster la structure nodale. Il est supposé que l'intensité de l'association ou de l'influence indirecte diminue avec l'augmentation de la longueur du canal.

Série de puissance de la matrice d'adjacence

La première étape de la prise en compte de l'influence indirecte consiste à ajuster la matrice de données brutes de sorte que l'association directe entre chaque paire de villes représente une certaine proportion de l'association totale du plus grand centre de la zone. Pour ce faire, on prend le total maximal des colonnes de la matrice d'adjacence ($\max \sum_j x_{ij}$) et on divise chaque élément x_{ij} par cette somme. Soit $y_{ij} = x_{ij} / \max \sum_j x_{ij}$. Les inégalités suivantes s'appliquent pour un graphe de n points :

- (1) $0 \leq y_{ij} \leq 1$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$
- (2) $0 \leq \sum_j y_{ij} \leq 1$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Le total maximal des colonnes est égal à 1.

Le graphe linéaire correspondant à cette matrice d'adjacence présente des valeurs décimales positives. Appelons la matrice d'adjacence Y . En termes de graphes linéaires, les puissances de Y ont des interprétations intéressantes. La

matrice Y^2 , qui est obtenue par $Y \cdot Y$ à l'aide d'une multiplication matricielle habituelle, décrit un graphe où toutes les séquences ont une longueur de 2. La longueur d'une séquence est le nombre de lignes qu'elle contient. De plus, les valeurs des lignes de chaque séquence de longueur 2 sont obtenues par multiplication. Comme les valeurs initiales sont des valeurs décimales, une valeur atténuée est associée à un contact qui va du point i à j via une séquence de longueur 2. La somme de toutes ces séquences en deux étapes de i à j est la valeur de tous les contacts indirects possibles de longueur 2.

On peut démontrer que cette assertion est vraie en considérant la signification de la somme

$$(3) \quad a_{ij} = \sum_k y_{ik}y_{kj} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

et où a_{ij} est un élément de Y^2 .

Le y_{ik} est la valeur sur la ligne allant du point i au point k dans le graphe et le y_{kj} a la même signification pour le lien de k à j . Les seuls termes qui entrent dans la somme sont ceux où il existe une séquence de longueur 2. Lorsqu'il n'existe pas de lien depuis ou vers le k ème point, le terme entier est nul. Le a_{ij} est la valeur totale de toutes les séquences de longueur 2. De manière similaire, on peut montrer que les éléments de Y^3 donnent la valeur atténuée de toutes les séquences de longueur 3 et ainsi de suite. La signification de la somme suivante est claire :

$$(4) \quad B = Y + Y^2 + Y^3 + \dots + Y^n + \dots$$

L'élément b_{ij} de B représente le total de l'influence directe et indirecte de i sur j .

Quelques exemples peuvent être utiles. Étant donné les villes a, b, \dots, n , une séquence typique de a à e pourrait être $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$. Imaginez qu'une activité dans la ville a ait une influence sur un répondant dans la ville b , que ce dernier contacte à son tour un répondant dans la ville c et que cela continue jusqu'à ce qu'une faible réponse dans la ville e soit observée. La probabilité d'une telle chaîne d'occurrences dépend en partie de l'ampleur des flux dans chaque lien de la séquence. En général, plus la séquence est longue, plus la probabilité d'une réponse est faible et, lorsqu'une réponse se produit, elle est moins intense.

Le flux d'influence peut également être réacheminé à travers la même ville plus d'une fois. Par exemple, une séquence peut avoir la forme $a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow e$. Toutes ces sommes sont incluses dans la matrice B .

Il n'est pas démontré que la somme des puissances de Y soit la forme correcte de l'atténuation des flux dans une séquence. Il est extrêmement douteux que la matrice B soit la mesure la plus appropriée du total des influences directes et indirectes. Il s'agit essentiellement d'une mesure des contacts indirects fortuits. La distribution de l'association indirecte réelle n'est probablement pas aléatoire, elle est plutôt concentrée dans certains canaux et, dans ce cas, la matrice B sous-estimerait l'influence indirecte. Elle présente cependant un plus grand intérêt que la matrice Y qui n'incorpore

que les influences directes. Le choix d'une puissance particulière est dicté par la facilité de son calcul. Plusieurs autres méthodes peuvent également être appropriées⁷.

Calcul de la série de puissance de la matrice d'adjacence

Une méthode pratique pour calculer la matrice B est d'utiliser l'identité suivante :

$$(5) (1 - Y)^{-1} = 1 + Y + Y^2 + \dots + Y^n + \dots$$

puis :

$$(6) B = (1 - Y)^{-1} - 1,$$

où 1 est la matrice d'identité. On sait que l'inverse, $(1 - Y)^{-1}$, existe si les inégalités (1) et (2) sont vérifiées.

La structure nodale de la matrice B

La structure nodale de la matrice B est établie en isolant le réseau des flux les plus importants de la même manière que celle décrite pour les associations directes. Comme les associations énumérées dans la matrice B sont ajustées pour les flux directs et indirects, on s'attend à obtenir une structure plus raisonnable.

UN EXEMPLE

L'État de Washington a été choisi comme zone d'étude. L'utilité du concept de structure nodale est évaluée en choisissant un ensemble de villes dans cette zone puis en déterminant la structure nodale qui prévaut. La structure nodale qui émerge devrait ressembler à l'arrière-pays connu et au classement des principales villes de la région. Certaines villes situées en dehors de l'État ont été incluses dans l'étude afin d'examiner le rôle qu'elles jouent dans le réseau des associations de villes. Portland (Oregon) et Vancouver (Colombie-Britannique) ont été des ajouts particulièrement importants.

Les associations ont été définies par le nombre de messages téléphoniques interurbains entre les paires de villes pendant une semaine de juin 1958⁸. Certaines villes ont été omises de l'étude en raison des caractéristiques des données et afin de limiter la taille de l'étude⁹.

De nombreuses paires de villes voisines ont un service d'appel direct et, dans ces cas, les appels interurbains n'ont pas été enregistrés. Les villes dor-toirs de Seattle et plusieurs « villes jumelles » comme Aberdeen-Hoquiam,

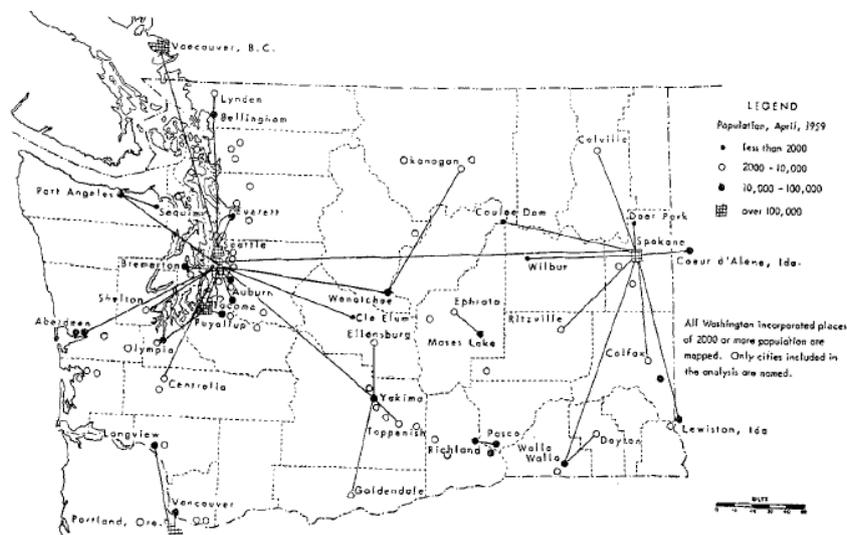
7. Pour des exemples, voir Luce, R.D. et D. Perry, « A Method of Matrix Analysis of Group Structure », *Psychometrika*, Vol. 14 (1949) pp. 95-116 et Katz, L., « A New Status Index Derived from Sociometric Analysis », *Psychometrika*, Vol. 18 (1953) pp. 39-44.

8. Nous sommes redevables à la *Pacific Bell Telephone and Telegraph Company* et en particulier à M. Homer Moyer, l'un des responsables de cette société à Seattle, pour ces informations.

9. La principale motivation pour limiter le nombre de villes considérées est liée à la puissance de calcul nécessaire pour réaliser le calcul matriciel : les ordinateurs sont rares, peu puissants et leur accès peut être coûteux.

Chehalis-Centralia et Pasco-Kennewick avaient un service de messagerie direct. Il ne s'agit pas d'une lacune importante dans les données car ces villes fonctionnent très probablement comme un point unique dans le réseau de l'État et l'une des « villes jumelles » de chaque paire pourrait être utilisée dans l'étude. Certaines villes assez importantes au nord de Seattle et le long de Puget Sound ont été omises par manque de données. Ces villes étaient desservies par une autre compagnie de téléphone. Comme chaque année, les compagnies de téléphone prélèvent simultanément un échantillon d'une semaine d'appels téléphoniques interurbains, des données comparables existent mais nous n'avons pas tenté de les obtenir. Enfin, toutes les villes dépassant une certaine taille de population n'ont pas été incluses afin de restreindre la taille de l'étude. Certaines petites villes ont toutefois été sélectionnées afin d'obtenir des échantillons de hiérarchies comportant des chemins orientés de longueur 2 ou plus¹⁰. La carte de la figure 2 montre les villes de l'étude. Avec le recul, il aurait peut-être été préférable d'inclure davantage de petites villes.

FIGURE 5 – Structure nodale basée sur les données téléphoniques, État de Weshington, 1958



10. Le caractère *ad-hoc* du corpus de villes constitué est explicite.

TABLE 3 – Extrait du tableau 40 x 40 du nombre de messages entre paires de villes, pour une semaine de juin 1958

De la ville	Code	À la ville												
		01	02	03	04	08	13	26	27	40				
Aberdeen	01	—	24	50	0	246	3 671	54	4	1 005				
Auburn	02	26	—	35	0	8	7 654	42	0	163				
Bellingham	03	55	27	—	782	24	2 494	101	3	356				
Lynden	04	4	0	2 250	—	4	357	9	0	110				
Longview	08	329	15	32	0	—	1 911	87	4	4 773				
...														
Seattle	13	3 427	4 579	3 843	308	1 268	—	6 168	269	16 781				
...														
Spokane	26	61	32	119	6	85	9 991	—	3 842	3 838				
Couer d'Alene	27	0	4	4	0	6	254	5 104	—	141				
Portland, Ore.	40	802	210	304	22	4 190	22 179	3 310	98	—				

Total de la plus grande colonne - Seattle 154 192.

Certains canaux de communication sont omis parce qu'ils ne sont pas enregistrés dans les données sur les messages interurbains. Les appels en ligne directe en sont un exemple. La seule ligne directe de l'État, qui représente probablement un volume important, relie Seattle à Olympia, la capitale de l'État. Si ces données étaient incluses, l'association maximale d'Olympia pourrait passer de Tacoma à Seattle. Bien que cela dépasse le cadre de cette étude, des résultats intéressants pourraient être obtenus si tous les canaux de communication étaient inclus, comme la radio, le télégraphe, le courrier et les services de messagerie.

Le tableau I est un exemple des tableaux de données brutes. Quarante villes ont été utilisées dans l'étude¹¹. Le tableau entier est la matrice d'adjacence du graphe des associations, graphe presque entièrement connecté - quelques cases sont nulles. Les totaux des lignes correspondent au total des contacts sortants tandis que les totaux des colonnes correspondent au total des contacts entrants. Le sens du flux de messages se lit depuis la ville en « ligne » vers la ville en « colonne ». Les entrées de la diagonale principale sont nulles par convention.

11. Une copie de la matrice complète présentée dans le tableau I peut être obtenue auprès de John D. Nystuen, Département de géographie, Université du Michigan.

TABLE 4 – Une partie de la matrice B (associations directes et indirectes)

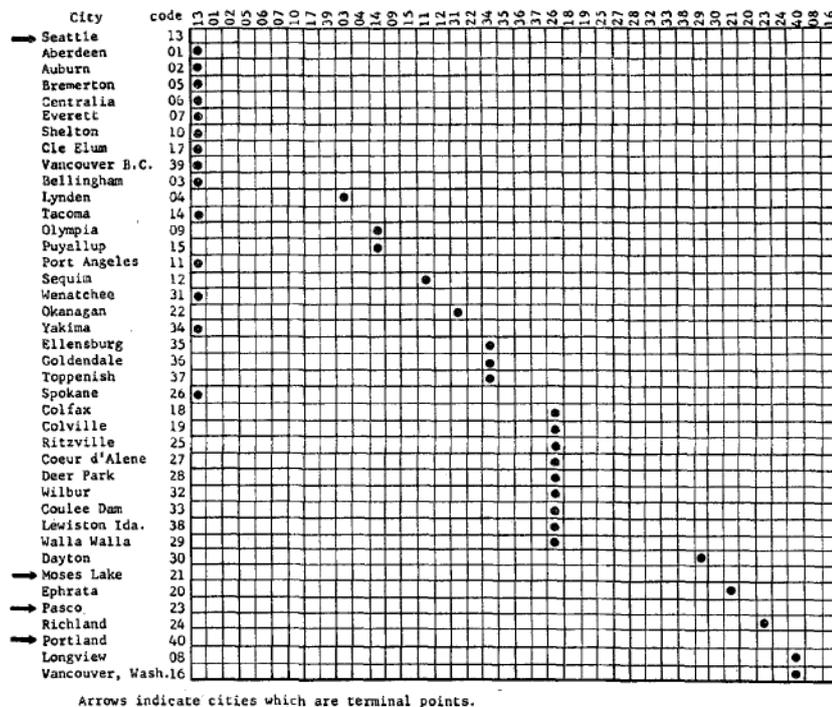
De la ville	Code	À la ville									
		01	02	03	04	08	13	26	27	40	
Aberdeen	01	—	.248(4)	.395(4)	.551(6)	.166(3)	.245(2)*	.479(4)	.325(5)	.726(3)	
Auburn	02	.303(4)	—	.364(4)	.109(5)	.108(4)	.508(2)*	.500(4)	.107(5)	.171(3)	
Bellingham	03	.402(4)	.232(4)	—	.513(3)	.180(4)	.165(2)*	.739(4)	.247(5)	.254(3)	
Lynden	04	.328(5)	.790(6)	.148(2)*	—	.307(5)	.239(3)	.716(5)	.689(7)	.753(4)	
Longview	08	.221(3)	.150(4)	.252(4)	.341(6)	—	.131(2)	.699(4)	.325(5)	.316(2)*	
...											
Seattle**	13	.227(2)	.303(2)	.253(2)	.204(3)	.870(3)	—	.409(2)	.188(3)	111(1)	
...											
Spokane	26	.568(4)	.421(4)	.953(4)	.536(5)	.688(4)	.649(2)*	—	.252(2)	.260(2)	
Couer d'Alene	27	.650(6)	.332(5)	.340(5)	.560(7)	.459(5)	.191(3)	.335(2)*	—	.103(3)	
Portland, Ore.**	40	.563(3)	.185(3)	.237(3)	.176(4)	.278(2)	.14001	.224(2)	.725(4)	—	
Column Total		.548(2)	.588(2)	.613(2)	.866(3)	.585(2)	.102(0)	.229(1)	.311(2)	.563(1)	

** Point terminal * Flux nodal

Remarque : Les chiffres sont arrondis à trois décimales significatives. Les données ont été traitées avec 8 décimales significatives. La valeur entre parenthèses représente le nombre de zéros avant le premier chiffre significatif.

Le tableau II est la matrice d'adjacence B qui évalue les associations directes et indirectes entre les villes¹². La structure nodale contenue dans cette matrice a été déterminée (1) en identifiant le flux nodal, (2) en classant les villes par le total de leurs associations entrantes (total des colonnes), (3) en attribuant une orientation depuis les villes ayant le plus petit total d'associations vers celles ayant le plus grand total et (4) en identifiant les villes non orientées comme le centre de sa hiérarchie. La figure 2 montre les résultats. La figure 3 est la matrice d'adjacence de la structure nodale dérivée des associations directes et indirectes.

FIGURE 6 – Matrice de la structure nodale



CONCLUSIONS

Les techniques définies dans cet article diviseront un ensemble de villes en sous-groupes qui spécifient un lieu central et sa hiérarchie subordonnée. Les associations entre les villes ne sont pas le seul système qui peut être défini comme un réseau de points et de lignes. Les nations ou les États peuvent être considérés comme des points et les migrations ou les flux de marchandises comme des lignes. L'étape importante dans l'utilisation de l'analyse abstraite des graphes linéaires est l'attribution d'une signification plausible aux points

12. Les calculs ont été rendus possibles par une subvention de temps informatique de *Western Data Processing*, Université de Californie à Los Angeles.

et aux lignes, de préférence en termes de phénomènes du monde réel. L'utilité des attributs et l'interprétation de la hiérarchie résultante dépendent de la correspondance entre un exemple empirique utilisant l'analyse de la théorie des graphes et d'autres connaissances sur les phénomènes. La procédure décrite dans cet article peut être utilisée de diverses manières mais l'application n'est valable que lorsque des conclusions théoriques significatives sont produites et vérifiées empiriquement.

Implications de la structure nodale dans l'État de Washington

Les régions nodales qui sont suggérées par la structure nodale correspondent en général aux attentes. Seattle est le centre dominant avec des hiérarchies imbriquées définies autour de Spokane et Yakima. Portland forme un système à part entière en capturant les villes voisines de l'État de Washington. Les deux hiérarchies, petites mais indépendantes, définies sur Pasco et Moses Lake sont les plus intéressantes.

Ephrata et Moses Lake sont situés à la limite de deux vastes arrières-pays où l'on suppose que l'autonomie ou l'indépendance a le plus de chances d'apparaître¹³. En outre, ces deux villes constituent une anomalie car, si Ephrata est une ville ancienne, Moses Lake a été créée récemment par décret gouvernemental.

La petite hiérarchie avec Pasco comme point central a été anticipée par Ullman lorsqu'il a évalué les centres de croissance de l'ouest des États-Unis¹⁴ :

Une hypothèse qui me vient à l'esprit pour l'avenir est que Pasco-Kenneick-Richland pourrait devenir le centre commercial sous-régional, supplantant la domination de Yakima et Walla Walla, plus anciens (et plus attrayants).

L'effet de la frontière nationale est clair. Vancouver est subordonnée à Seattle et ne domine aucune ville de l'étude, même si c'est une grande ville et qu'elle est beaucoup plus proche de Lynden et de Bellingham que Seattle. Il est probable que Vancouver aurait été un point terminal si d'autres villes canadiennes avaient été incluses dans l'étude. Il ne s'agit pas d'un défaut de la méthode. Les résultats ne sont qu'une évaluation des associations entre les villes de l'étude.

La région nodale de Tacoma, une grande ville au sud de Seattle, est également anticipée par la théorie. Tacoma domine son voisinage proche. Cette région est décentrée, dans la direction opposée à la grande ville de Seattle. La domination de Seattle se réaffirme à des distances encore plus grandes, de sorte qu'Aberdeen et Centralia sont directement associées à Seattle plutôt

13. Hoover, E.M., *The Location of Economic Activity*, McGraw-Hill, New York, 1948. Isard, W., *Location and Space Economy*, John Wiley and Sons, New York, 1956. Lösch, A., *The Economics of Location*, Yale University, New Haven, 1954.

14. Ullman, E.L., *Growth Centers of the West*, University of Washington, Seattle, 1955, p. 48.

que par un chemin à deux liens passant par la ville plus proche et plus grande de Tacoma ¹⁵. Cette congruence, tant avec la théorie existante qu'avec les preuves empiriques, démontre l'utilité de la structure nodale pour l'analyse des associations de villes.

Autres applications de la théorie des graphes

Étant donné un ensemble de villes dans une région et une mesure d'association entre elles, un ensemble de hiérarchies a été obtenu. Il est souhaitable d'obtenir encore plus d'informations. Spokane est manifestement la deuxième ville la plus importante de l'État de Washington mais elle est subordonnée à Seattle dans la hiérarchie alors que les villes beaucoup plus petites de Moses Lake et Pasco dominent leurs systèmes respectifs. Intuitivement, un poste de second dans une grande organisation est plus important que le poste principal dans une petite organisation. Mesurer cette différence de statut est souhaitable. Une autre application de la théorie des graphes à ce problème est suggérée dans un article de Harary ¹⁶. Ses idées sont adaptées à ce problème par les présents auteurs dans une étude plus approfondie des associations de villes ¹⁷.

15. Isard, W., *op. cit.* Lösch, A., *op. cit.*

16. Harary, F., « Status and Contrastatus », *Sociometry*, Vol. 22 (1959) pp. 23-43. La coquille relative au nom de l'auteur est présente dans le texte mais non dans la note de bas de page.

17. Cette étude ultérieure, si elle a été réalisée, ne semble pas avoir été publiée.

groupe f.m.r.



La collection « [textes](#) » du groupe fmr (flux, matrices, réseaux) propose des rééditions bilingues d'articles consacrés à l'analyse de réseaux.

Parus

- L. Beauguitte, P. Beauguitte et P. Gourdon, 2021, « [William L. Garrison, 1960, Connectivity of the Interstate Highway System](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Joseph B. Kruskal, 1956, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1951, Application of Matrix Algebra to Communications Nets](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of Communication Networks](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Z. Prihar, 1956, Topological Properties of Telecommunication Networks](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Alex Bavelas, 1948, A Mathematical Model for Group Structures](#) ».
- L. Beauguitte et J. Fen-Chong, 2021, « [Alex Bavelas, 1950, Communication Patterns in Task-Oriented Groups](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Forrest R. Pitts, 1965, A Graph Theoric Approach to Historical Geography](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [M. L. Northway, 1940, A method for depicting social relationships obtained by sociometric testing](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2021, « [John D. Nystuen and Michael F. Dacey, 1961, A Graph Theory Interpretation of Nodal Regions](#) ».