



HAL
open science

L'éclatement tourbillonnaire : une dynamique pilotée par la viscosité des équations de Navier-Stokes

Bastien Di Pierro, Malek Abid

► **To cite this version:**

Bastien Di Pierro, Malek Abid. L'éclatement tourbillonnaire : une dynamique pilotée par la viscosité des équations de Navier-Stokes. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03441386

HAL Id: hal-03441386

<https://hal.science/hal-03441386>

Submitted on 22 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'éclatement tourbillonnaire : une dynamique pilotée par la viscosité des équations de Navier-Stokes

B. DI PIERRO^a, M. ABID^b

a. *Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels*

b. *Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors équilibre*

Résumé :

En utilisant une simulation numérique directe de précision spectrale, la dynamique de l'éclatement tourbillonnaire en spirale est étudiée. Deux modèles de jets tournants, qui sont solutions exactes des équations d'Euler incompressibles, sont utilisés. Ce phénomène permet de soulager le système d'un étirement trop intense grâce à la viscosité. L'éclatement génère des petites échelles par un mécanisme de cascade et l'éclatement atteint un état turbulent ($E(k) \propto k^{-5/3}$). Ces petites échelles en forme de "bras en spirale" sont éjectées radialement. Il est également montré que l'éclatement est un mécanisme anti singularité en un temps fini au travers de la viscosité, puisque ce phénomène n'apparaît pas au travers de la viscosité effective des modes thermalisés dans les équations d'Euler tronquées. Ces modes thermalisés à petites échelles ($E(k) \propto k^2$) sont compatibles avec l'existence d'une singularité en un temps fini.

Abstract :

The vortex breakdown dynamic is studied using spectrally accurate direct numerical simulations. Two kind of swirling jet base flow are used, which are exact solutions of incompressible Euler's equations. This phenomena is a plausible mechanism to relax the strain increase with the assistance of viscosity. The breakdown create small scales structures and the flow become turbulent ($E(k) \propto k^{-5/3}$). Those small scales are helical structures and a lateral expansion of the flow is observed. It is shown that the breakdown could be a physical mechanism against a finite time singularity thank to real viscosity, since it is not observable with the assistance of an effective dissipation of truncated Euler equations thermalized modes. Those thermalized modes ($E(k) \propto k^2$) are compatible with a finite time singularity.

Mots clefs : 3 maximum : éclatement tourbillonnaire, viscosité, singularité

1 Introduction

Le phénomène de l'éclatement tourbillonnaire a été de nombreuses fois observé dans la nature (éclatement spontané des tornades) ainsi que dans de nombreux dispositifs industriels (éclatement des tourbillons de bout d'aile). De plus, la compréhension des mécanismes mis en jeu est d'une importance capitale d'un point de vue fondamental. La dynamique de l'éclatement tourbillonnaire est largement documentée dans la littérature, mais il n'existe aucune définition exacte de ce phénomène, il est seulement communément admis qu'il se traduit pas un changement brutal de la topologie de l'écoulement. Douady *et al.* [7] ont mis en évidence la présence de filaments de vorticité isolé (en écoulement turbulent) qui finissent par éclater sous l'effet de déformation en hélice. Ils ont suggéré la présence d'un écoulement axial le long de l'axe du filament. Finalement, la loi historique de kolmogorov montre qu'un écoulement turbulent présente un spectre d'énergie en $k^{-5/3}$, en se basant sur un mécanisme de cascade d'énergie des plus grande structures vers les plus petites. Dans cette étude, on se propose de montrer que l'éclatement se fait par un mécanisme de cascade reliant les petites échelles générées et le spectre d'énergie turbulent, en comparant les effets de la viscosité réelle des équations de Navier-Stokes, et la dissipation effective des équations d'Euler tronquées.

2 Méthode numérique

2.1 Écoulement de base et adimensionnement

Tout au long de cette étude, deux modèles de jets tournants sont utilisés : le batchelor- q -vortex (\mathbf{V}_b) ainsi que le profil mesuré expérimentalement (\mathbf{V}_e) par Gallaire et Chomaz [2]. Ces deux écoulements sont supposés parallèles et s'écrivent dans une base cylindrique (e_r, e_θ, e_z)

$$\mathbf{V}_b = \begin{cases} U(r) = 0, \\ V(r) = \Omega_c \frac{1 - \exp(-r^2/a^2)}{r/a}, \\ W(r) = U_c \exp(-r^2/a^2) \end{cases}, \quad \mathbf{V}_e = \begin{cases} U(r) = 0, \\ V(r) = \Omega_c r \exp(-(r/0.9a)^4), \\ W(r) = \frac{U_c}{1 + [\exp(\log(2)(r/a)^2) - 1]^3} \end{cases}$$

avec a la taille du coeur du vortex, U_c la vitesse au centre du jet et Ω_c le taux de rotation au centre du jet. Grâce à ces grandeurs caractéristiques et à la viscosité cinématique ν , on peut adimensionner le problème et construire les nombres sans dimension suivant :

$$R_e = \frac{U_c a}{\nu}, \quad q = \frac{\Omega_c a}{U_c} \quad (1)$$

qui sont respectivement le nombre de Reynolds et le paramètre de swirl.

2.2 Équations du problème

On considère les champs de vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ et de pression p . Les équations de Navier-Stokes incompressibles, régissant la dynamique des fluides sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

En appliquant l'opérateur divergence à l'équation 2, on obtient l'équation du champ de pression $\Delta p = -\nabla \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]$ et le problème se réduit alors en une seule équation vectorielle en éliminant la pression

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(1 - \nabla \Delta^{-1} \nabla) [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u}, \quad (3)$$

où Δ^{-1} est l'inverse de l'opérateur laplacien dans l'espace des champs à moyenne nulle.

2.3 Résolution numérique

On ajoute à l'équation 3 des conditions aux limites périodiques dans les trois directions de l'espace, et le champ de vitesse est alors décomposé en sa série de Fourier $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)^T$. L'équation 3 s'écrit alors dans l'espace de fourier

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = -\Sigma_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\|k\|^2} \right) [(\mathbf{u} \cdot \hat{\nabla}) \mathbf{u}]_j - \frac{1}{R_e} \|k\|^2 \hat{u}_i. \quad (4)$$

L'intégration temporelle de l'équation 4 est faite en utilisant un schéma de Cranck-Nicholson pour les termes visqueux et d'Adams-Bashforth pour les termes non linéaires

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \frac{(1 - \frac{\|k\|^2 \delta t}{2R_e}) \hat{\mathbf{u}}^n - \frac{\delta t}{2} (3P((\mathbf{u} \cdot \hat{\nabla}) \mathbf{u})^{n+1} - P((\mathbf{u} \cdot \hat{\nabla}) \mathbf{u})^n)}{1 + \frac{\|k\|^2 \delta t}{2R_e}} \quad (5)$$

avec δt le pas de temps, $P(\cdot)$ l'opérateur de projection ($P(\cdot) = (1 - \nabla \Delta^{-1} \nabla)$, Peyret [1]) et le schéma temporel est globalement au second ordre. Les simulations se font dans des domaines de dimension $[L_x, L_y, L_z]$ avec $L_x = L_y = L_z = 4\pi$ discrétisés en 256^3 points de grille. On prendra comme conditions initiales l'un des écoulements de base définis précédemment auquel on ajoute un bruit aléatoire η de faible amplitude ($\eta/U_c = O(10^{-2})$). Sauf indication contraire, on utilisera dans ce papier un nombre de Reynolds fixé à $R_e = 1000$, de façon à éviter le régime de Stokes.

3 L'éclatement tourbillonnaire

3.1 Caractéristiques de l'éclatement

La figure 1 montre le champ de vecteur vorticité ω au cours du temps. Dans cette représentation, seuls les 30 000 vecteurs de plus grande norme sont représentés. Dans les premiers instant, l'écoulement de base est instable vis à vis de perturbation hélicoïdale. Ensuite, l'éclatement apparaît clairement par un changement abrupt de la topologie de l'écoulement, à l'instant noté t_Ω sur cette figure (t_s représente le temps de saturation non linéaire). A partir de t_Ω , il y a génération de fins filaments de vorticité qui vont subir une expansion radiale.

Afin de mieux apprécier les variations de la vorticité, on calcule l'entrophie $\Omega = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}\omega$, dont l'équation

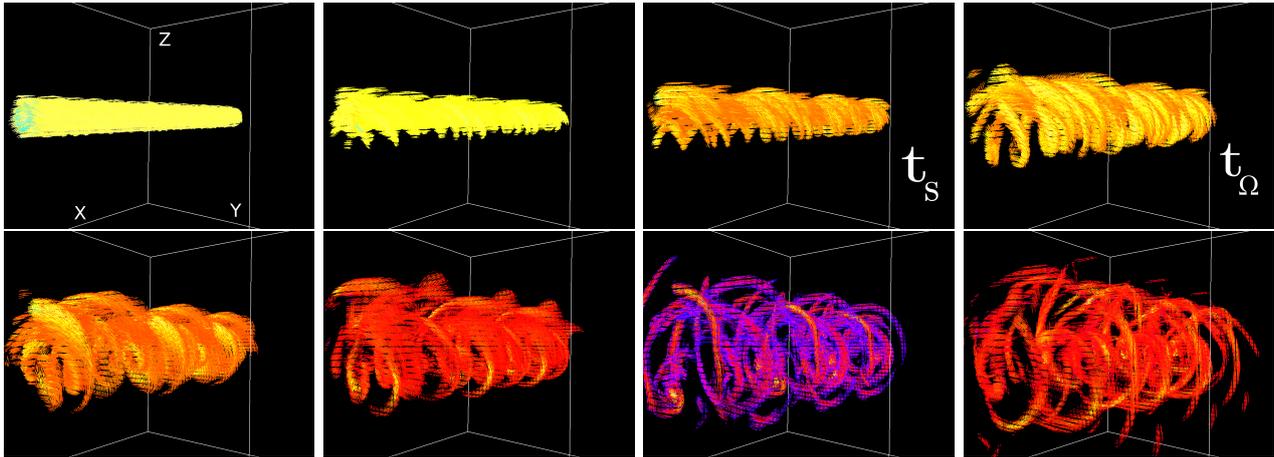


FIGURE 1 – Représentation tridimensionnelle du champ de vecteur vorticité (30 000 vecteurs les plus intenses) au cours du temps, pour le profil de Batchelor avec $q = 0.8$.

d'évolution est :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}(\omega \cdot \nabla \mathbf{u}) - 2\nu \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}(\nabla \cdot \omega)^2. \quad (6)$$

D'après cette équation, la production d'entrophie est créée par le terme d'étirement de la vorticité ($(\omega \cdot \nabla \mathbf{u})$) et la perte d'entrophie est causé par les effets visqueux. La figure 2 montre l'entrophie au

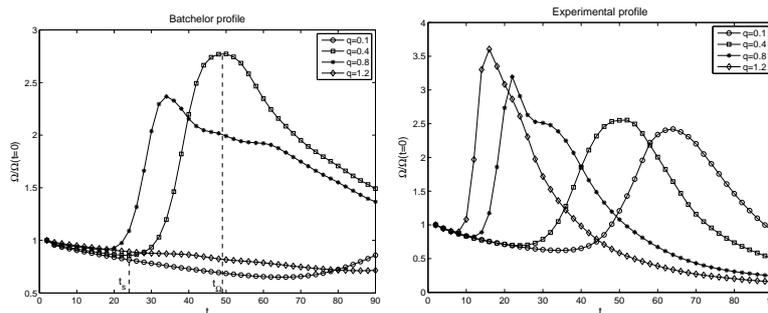


FIGURE 2 – Courbes d'entrophie au cours du temps pour les deux profils considérés. t_s : instant de saturation non-linéaire, t_Ω : instant du maximum de l'entrophie

cours du temps pour les deux profils considérés à différents paramètres de swirl q . Dans les premiers instants, de nombreux modes instables interagissent non linéairement, créant ainsi une intensification de l'entrophie. Ensuite, l'entrophie atteint un maximum à l'instant t_Ω avant de décroître de façon monotone, si l'éclatement a lieu. Si l'éclatement n'apparaît pas, l'entrophie décroît de monotonement tout au long de la simulation (par exemple, pour le profil de Batchelor avec $q = 0.1$ et $q = 1.2$). Il est alors intéressant de noter que le mécanisme de l'éclatement tourbillonnaire est un moyen d'éviter une

intensification trop intense de l'étirement, au travers de la viscosité *réelle* des équations de Navier-Stokes.

Lorsque les perturbations hélicoïdales gagnent en amplitude, celle ci vont créer une décélération le

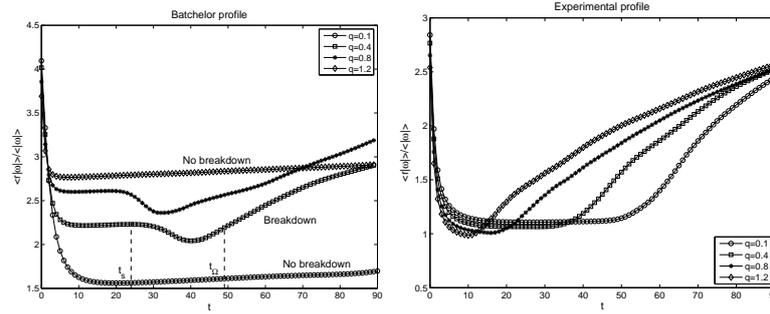


FIGURE 3 – Courbe du rayon moyen de la vorticité au cours du temps, pour les deux profils considérés à différents nombre de swirl q .

long de l'axe du jet et par incompressibilité, ces rouleaux hélicoïdaux seront éjectés radialement. Afin de mieux apprécier cette expansion radiale, on calcule le rayon moyen de vorticité

$$r_\omega = \frac{\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} r \|\omega\|_2}{\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \|\omega\|_2} \quad (7)$$

comme montré sur la figure 3. Dans les premiers instants, ce rayon décroît très rapidement, ce qui correspond à un réarrangement des perturbations initiales η par rapport aux modes instables. Ensuite, le rayon moyen de vorticité atteint un plateau montrant que toute la vorticité est concentré au centre du jet et finalement, lorsque l'éclatement apparaît, on observe une croissance monotone à partir de l'instant t_Ω . Ceci montre que si l'éclatement a lieu, les filaments de vorticité vont être progressivement expulsé loin du centre initial de la vorticité jusqu'à envahir tout l'espace.

3.2 Spectre d'énergie

Dans cette section, l'attention est portée sur le spectre d'énergie cinétique $E(k, t)$ ($k = \|k\|_2$) défini comme

$$\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t) = 2 \int_0^\infty dk E(k, t). \quad (8)$$

Le spectre d'énergie correspondant est montré sur la figure 4, pour deux cas particulier : le profil

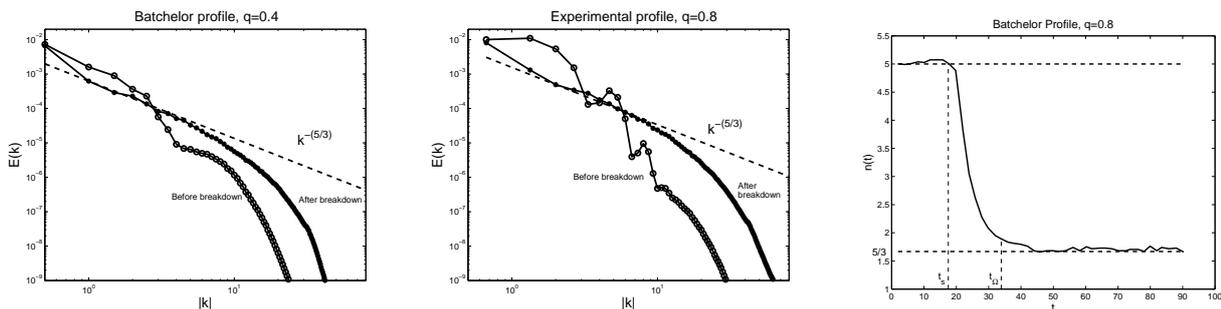


FIGURE 4 – Spectre d'énergie avant et après l'éclatement, pour le profil de batchelor à $q = 0.4$ et pour le profil expérimental à $q = 0.8$ (figure de gauche et du milieu). (Droite) Courbe de l'exposant du spectre d'énergie au cours du temps, pour le profil de batchelor à $q = 0.8$.

de Batchelor à $q = 0.4$ et le profil expérimental à $q = 0.8$ (le comportement observé est strictement équivalent pour tous les cas étudiés lorsque l'éclatement survient). Avant l'éclatement, on observe que l'énergie est concentrée dans les modes à petits nombres d'ondes : il s'agit ici de la contribution

des modes linéairement instables. Après l'éclatement (*i.e.* pour un temps légèrement supérieur à t_Ω), on observe que le spectre d'énergie a une gamme inertielle qui s'aligne avec une pente en $k^{-5/3}$, qui est caractéristique d'un état turbulent. Ce comportement est confirmé par la figure 4 (droite) qui montre un ajustement de l'exposant $n(t)$ ($E(k, t) \propto k^{-n(t)}$, pour $2 \leq k \leq 14$). Il apparaît clairement que l'exposant en $k^{-5/3}$ persiste tout au long de la simulation, et ce résultats est observé pour tout les cas testé où l'éclatement est présent. Ainsi, l'éclatement tourbillonnaire est un mécanisme permettant à l'écoulement de transiter vers un état turbulent.

4 Comportement non visqueux

Dans cette section, on s'intéresse au comportement d'un fluide non visqueux ($Re = \infty$), et l'on traite donc les équations d'Euler tronquées ($\hat{\mathbf{u}}(k, t) = 0$, $k > k_{max}$). D'après les travaux de Cichowlas *et al.* [3], en traitant ces équations, on observe une thermalisation des petites échelles ($E(k, t) \propto k^2$) et ceci va créer une viscosité effective pour les grandes échelles. Ils ont montré que ces équations présentaient donc une dissipation similaire à celle de la viscosité réelle des équations de Navier-Stokes et que les équations d'Euler tronquées pouvaient être un modèle minimaliste pour traiter de la turbulence des équations de Navier-Stokes.

En traitant ce système d'équations, l'éclatement tourbillonnaire n'apparaît pas et l'on observe uniquement le tourbillon initial auquel vient s'ajouter un champ de vorticité aléatoire due aux modes thermalisés. Ceci a été étudié pour les deux profils considérés et pour différentes valeurs du nombre de swirl.

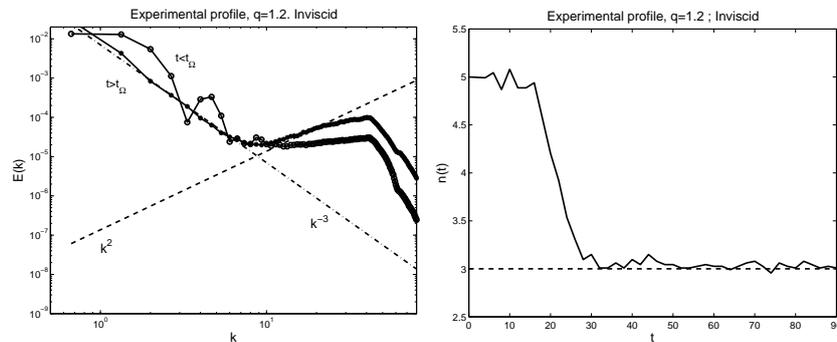


FIGURE 5 – Gauche : Spectre d'énergie pour le profil expérimental à $q = 1.2$ pour les équations d'Euler tronquées, droite : exposant du spectre correspondant.

La figure 5 montre le spectre d'énergie correspondant au profil expérimental avec $q = 1.2$. Au début de la simulation, les modes les plus énergétiques sont les modes linéairement instables (à petits nombres d'ondes) alors que les modes à plus grands nombres d'onde ($10 < k < 14$) commencent à s'amplifier. Le spectre d'énergie à un instant ultérieur montre une pente en k^2 pour les petites échelles : il s'agit des modes thermalisés. Cependant, à cet instant, les modes à grandes échelles ($1 < k < 10$) montrent une pente en k^{-3} , qui a également été observé par Orlandi [4]. En traçant l'exposant correspondant au cours du temps (figure 5 droite), on s'aperçoit la encore que cet exposant est clairement établi et persiste au cours du temps. D'après les travaux de Kerr [5], ce spectre en k^{-3} compatible avec l'existence d'une singularité en un temps fini.

Pour mieux comparer les solutions des équations de Navier-Stokes avec celles d'Euler, on calcule une viscosité effective (d'après l'étude de Krstulovic et Brachet [6]) :

$$\nu_{eff} = \frac{5\sqrt{E_{th}}}{k_{max}} e^{-4k/k_{max}}. \quad (9)$$

Ceci correspond à un nombre de Reynolds $Re_{eff} = 450$ pour une simulation résolvant les équations d'Euler tronquées avec une résolution de 256^3 points de grille. La figure 6 montre les courbes d'entrophie au cours du temps ainsi que les spectres d'énergies pour les deux configurations. Pour les équations de Navier-Stokes, l'entrophie atteint un maximum à un temps cours et l'éclatement est

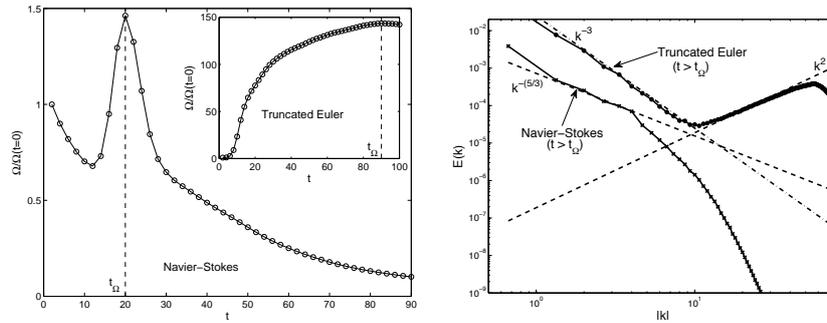


FIGURE 6 – Comparaison entre les équations d’Euler tronquées et celle de Navier-Stokes à $Re = 450$. Gauche : Courbe d’entrophie au cours du temps, droite : spectre d’énergie

observé. Au contraire, l’éclatement n’apparaît pas en traitant les équations d’Euler tronquées, et l’entrophie correspondante croît monotonement jusqu’à la fin de la simulation. Finalement, on observe un spectre caractéristique de Kolmogorov ($E(k) \propto k^{-5/3}$) avec une viscosité réelle, alors que la dynamique générée par la viscosité effective montre un spectre d’énergie compatible avec une singularité en un temps fini $E(k) \propto k^{-3}$.

5 Conclusions

En utilisant une méthode de simulation numérique directe de précision spectrale, il a été montré que les jets tournants conduisent au phénomène de l’éclatement tourbillonnaire en générant des petites échelles de vorticité. Le spectre d’énergie après l’éclatement présente un spectre turbulent ($E(k) \propto k^{-5/3}$). Il a également été montré que l’éclatement permet de soulager le système d’un étirement trop intense avec l’aide de la viscosité réelle et qu’il est un mécanisme possible pour éviter une singularité en un temps fini. En effet, l’éclatement n’apparaît pas en traitant les équations d’Euler tronquées, même avec l’aide de la dissipation produite par les modes thermalisés de ces équations. Ainsi, la viscosité effective des équations d’Euler tronquées n’a pas la même fonction que la viscosité réelle des équations de Navier-Stokes. De plus, le spectre correspondant ($E(k) \propto k^{-3}$) est compatible avec une singularité en un temps fini.

Références

- [1] R. Peyret, 2002, Spectral methods for incompressible visous flow, *Springer*.
- [2] F. Gallaire et J.M. Chomaz, 2003, Mode selection in swirling jet experiments : a linear stability analysis, *Journal of fluid mechanics*, pp. 223-253, vol. 494, Cambridge University Press.
- [3] C. Cichowlas et P. Bona iti et F. Debbasch et M. Brachet, 2005, Effective dissipation and turbulence in spectrally truncated Euler Flows, *Physical Review Letters*, pp. 264502, vol. 95.
- [4] P. Orlandi, 2009, Energy spectra power laws and structures, *Journal of Fluid Mechanics*, pp. 353, vol. 623, Cambridge University Press.
- [5] R. M. Kerr, 1993, Evidence for a singularity of the three-dimensionnal, incompressible euler equations, *Physics of Fluids A*, pp. 1725, vol. 5.
- [6] G. Krstulovic et M. Brachet, 2008, Two-fluid model of the truncated Euler equations, *Physica D*, pp. 2015, vol. 237.
- [7] S. Douady et Y. Couder et M. Brachet, 1991, Direct observation of the intermittency on intense vorticity filament in turbulence, *Physical Review Letters*, pp. 983, vol.67.