



HAL
open science

Resommation de Borel-Laplace et intégration numérique des EDP

Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni, Ahmad Deeb, Erwan Liberge

► **To cite this version:**

Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni, Ahmad Deeb, Erwan Liberge. Resommation de Borel-Laplace et intégration numérique des EDP. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03441293

HAL Id: hal-03441293

<https://hal.science/hal-03441293>

Submitted on 22 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Resommation de Borel-Laplace et intégration numérique des EDP

A. Deeb^a, A. Hamdouni^a, E. Liberge^a, D. Razafindralandy^a

a. LaSIE - Université de La Rochelle, avenue Michel Crépeau 17042 LA ROCHELLE Cedex 1

Résumé :

Si on cherche la solution d'un problème d'évolution sous forme d'une série formelle en fonction du temps, souvent, une telle série est divergente, mais tout en étant de type Gevrey. A cette solution formelle, on peut associer une procédure de resommation de type Borel-Laplace qui permet de construire une fonction holomorphe dans un secteur et asymptotique à la solution du problème recherchée. Une telle technique donne des informations utiles sur les singularités de la solution et son comportement, mais elle peut aussi être la base du développement de nouveaux schémas temporels permettant la simulation numérique de problèmes d'évolution sur de grands intervalles de temps. Notre objectif dans cette communication est de présenter ces deux aspects en les illustrant sur des problèmes issus de la mécanique.

Abstract :

Evolution problems in mechanics generally owns a formal power series solution, which, most of time, is divergent but of Gevrey type (not diverging faster than a series of factorials). Such a series can be resummed with the Borel-Laplace technique to get an holomorphic fonction, which is asymptotics to the solution of the initial problem. This technique provides usefull information (singularities, asymptotic behavior, ...) on the solution but can also be the basis of original time integration schemes for the numerical simulation of evolution problems on a large time range. In this communication, we aim to present these aspects with problems arising in mechanics.

Mots clefs : Intégration temporelle, série divergente, resommation de Borel-Laplace

1 Introduction

Il est d'usage courant d'étudier le comportement d'un phénomène physique (couche limite, bifurcation stationnaire, ...) à partir du développement en série formelle de la solution des équations associées [2, 6], en fonction d'un paramètre auxiliaire ε destiné à tendre vers 0. En revanche, le développement de la solution directement sous forme d'une série temporelle est moins courant, malgré les informations qu'un tel développement pourrait fournir (bifurcations insationnaires, ...). Une des raisons à cela est que les séries entières temporelles qui sont solutions formelles de problèmes d'évolution sont généralement divergentes. Et pourtant, cette divergence est, dans la pratique, "bien encadrée". En effet, dans des cas très étendus d'équations différentielles ordinaires les coefficients u_n de la série vérifient la relation

$$|u_n| = O(A^n (n!)^s) \quad (1)$$

pour certaines constantes A et s , dès que n est assez-grand [11, 15]. On dira alors que la série est de type Gevrey. Beaucoup de séries solutions formelles d'équations aux dérivées partielles sont également de type Gevrey. C'est par exemple le cas de l'équation de la chaleur, avec $s = 1$, de l'équation de Burgers et même des équations de Navier-Stokes [9, 10, 5].

Dans les problèmes de mécanique, la série formelle s'obtient par la méthode asymptotique numérique [12]. La question est alors de trouver une technique qui, à partir de la série formelle, fournit une "vraie" solution de l'équation. La théorie de resommation de Borel-Laplace répond à cette question. Elle permet

de “resommer” la série pour en obtenir une solution holomorphe lorsque cette série est divergente mais de type Gevrey. Grâce à cette théorie, la divergence de la série n’est plus un frein. Et dans les cas particuliers où la série a un rayon de convergence non nul, la resommation permet d’augmenter le domaine de validité de la série.

Quelques avantages à chercher la solution sous forme d’une série temporelle sont les suivants. Comme annoncé, cela permet de détecter les bifurcations instationnaires et de suivre les branches solutions. On peut pour cela s’inspirer des travaux effectués dans [7, 17, 1, 4, 8]. Grâce à la transformation de Borel, l’analyse de la série peut aussi fournir directement les singularités de la solution dans le temps [14, 13]. Enfin, le développement en série temporelle peut servir de base à des schémas numériques plus rapides que ceux basés sur une discrétisation temporelle. En effet, les schémas numériques classiques (méthode d’Euler, de Runge-Kutta, ...) sont assujettis à une condition restrictive sur le pas de temps Δt . Ce dernier doit être extrêmement faible (une petite fraction de seconde) pour assurer la stabilité et une précision acceptable. Ainsi, une simulation de l’écoulement d’un fluide turbulent, par exemple, nécessite un énorme temps CPU.

Avec la décomposition en série temporelle, il n’y a pas de pas de temps à proprement parler. Une itération (comprenant la détermination de la série, suivie d’une resommation) donne une solution qui est valide jusqu’à un temps $t = \Delta t_r$ qui serait l’équivalent d’un pas de temps, mais qui est, comme on le verra, beaucoup plus grand que les pas de temps usuels avec les schémas classiques. On peut ainsi espérer un calcul plus rapide.

Dans la section suivante, on rappelle la méthode de resommation de Borel-Laplace. Dans la section 3, on applique un algorithme permettant d’effectuer la resommation numériquement. On appliquera l’algorithme à la résolution de quelques équations. On considèrera le cas des équations de Navier-Stokes à la section 5.

2 La resommation de Borel-Laplace

Considérons une série entière solution formelle d’une équation d’évolution :

$$\hat{u}(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n. \quad (2)$$

Les coefficients u_n peuvent être des fonctions des variables d’espace ou d’autres paramètres. On suppose que (2) est de Gevrey d’ordre 1, c’est-à-dire qu’elle vérifie la relation (1) avec $s = 1$. Dans ce cas, la série suivante

$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{u_{n+1} \xi^n}{n!}, \quad (3)$$

appelée transformée de Borel de (2), est analytique dans un disque centré à l’origine. Supposons de plus que la série (3) peut être prolongée de manière analytique le long de la demi-droite $d = [0, +\infty[$ en une fonction $P(\xi)$ ayant une croissance au plus exponentielle vers l’infini, de telle sorte que sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}P(t) = \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi \quad (4)$$

existe. On définit alors la somme de Borel-Laplace de la série $\hat{u}(t)$ comme suit :

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) = u_0 + \mathcal{L}P(t). \quad (5)$$

On montre que la série initiale $\hat{u}(t)$ est alors le développement asymptotique de la fonction $\mathcal{S}\hat{u}(t)$ dans un voisinage sectoriel de l’origine. L’algorithme de resommation est résumé dans la TABLE 1. Si $P(\xi)$ admet des pôles sur la direction d , il suffit, par rotation appropriée, de choisir une autre demi-droite liant l’origine à l’infini.

Déroulons cet algorithme sur l’équation d’Euler qui est un prototype d’équation dont la solution série formelle diverge. Soit l’équation

$$t^2 \frac{du}{dt} + u = t. \quad (6)$$

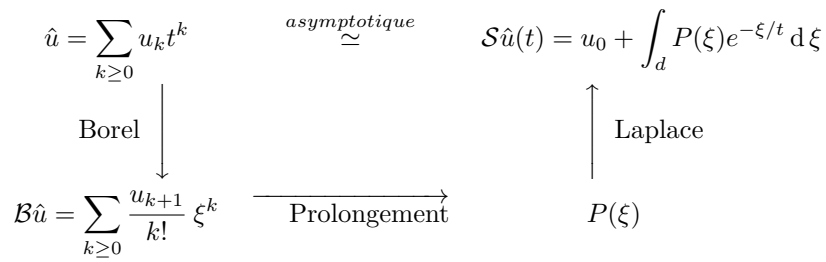


TABLE 1 – Resommation de Borel-Laplace

La série solution formelle de cette équation est

$$\hat{u}(t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n k! t^{k+1}. \tag{7}$$

Elle possède un rayon de convergence nul mais elle est de Gevrey. Sa transformée de Borel

$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \xi^k. \tag{8}$$

a donc un rayon de convergence non nul. Cette série se prolonge de manière naturelle dans $\mathbb{C} - \{-1\}$ en la fonction

$$\frac{1}{1 + \xi}, \tag{9}$$

qui a une croissance plus faible que l'exponentielle à l'infini. En calculant sa transformée de Laplace le long de la demi-droite réelle positive, on obtient la somme de Borel-Laplace suivante

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \xi} e^{-\xi/t} d\xi \tag{10}$$

qui est la solution de l'équation (6) dans le demi-plan complexe de partie réelle positive.

3 L'algorithme Borel-Padé-Laplace

Dans la pratique, on a accès à un nombre arbitraire mais fini des coefficients de la série. Autrement dit, $\hat{u}(t)$ est approximé par la série tronquée

$$\hat{u}^N(t) = \sum_{n=0}^N u_n t^n. \tag{11}$$

La transformée de Borel de (11) se calcule sans problème particulier par la définition (3). Pour le prolongement analytique dans l'espace de Borel, choisissons les approximants de Padé [3]. $\mathcal{B}\hat{u}^N(\xi)$ est donc représenté, le long de la direction d , par une fraction rationnelle $P^N(\xi)$. Cette dernière possède toujours une croissance au plus exponentielle vers l'infini. Et enfin, la transformée de Laplace de $P^N(\xi)$ se fait par quadrature de Gauss-Laguerre. L'algorithme de resommation obtenu, qu'on appellera algorithme de Borel-Padé-Laplace, est schématisé dans la TABLE 2. Dans cette table, P' est une fonction liée à P^N par la formule d'intégration de Gauss-Laguerre, ξ_i sont les racines d'un polynôme de Laguerre et ω_i les poids associés.

Pour illustrer, appliquons cet algorithme à l'équation d'Euler (6). On tronque la série à l'ordre $N = 10$. Les approximants de Padé fournissent exactement le prolongement analytique (9) dès que $N_2 \geq 2$. La solution numérique est tracée sur la figure (1). La solution de référence a été tracée depuis le logiciel de calcul symbolique Maple à partir de la solution exacte (10). La solution sous forme de série entière tronquée est également tracée. On constate que, malgré que la série est divergente, elle approxime la solution avec grande précision pour t très petit. Ce fait est connu et appelé sommation au plus petits termes. La précision est exponentiellement bonne. Mais dès que t dépasse une certaine valeur, la série

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{u}^N = \sum_{n=0}^N u_n t^n & & \mathcal{S}^N \hat{u}(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{NG} P'(\xi_i) \omega_i \\
 \downarrow \text{Borel} & & \uparrow \text{Gauss-Laguerre} \\
 \mathcal{B}\hat{u}^N = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{n!} \xi^n & \xrightarrow{\text{Approximants de Padé}} & P^N(\xi) = \frac{A_0 + A_1 \xi + \dots + A_{N_1} \xi^{N_1}}{1 + B_1 \xi + \dots + B_{N_2} \xi^{N_2}}
 \end{array}$$

TABLE 2 – Algorithme Borel-Padé-Laplace

tronquée s'écarte brutalement de la solution. La solution obtenue par resommation, quand à elle, reste collée à la solution exacte jusqu'à $t = \Delta t_r \simeq 2.5$. L'écart avec la solution exacte vient uniquement de l'erreur de quadrature lors de l'évaluation de l'intégrale de Laplace. Dans notre cas, $NG = 8$ points de Gauss ont été utilisés.

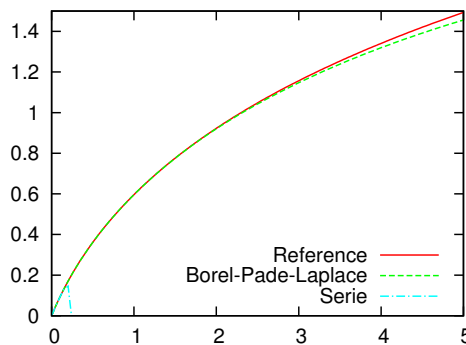


FIGURE 1 – Solutions approchées de l'équation d'Euler

L'algorithme Borel-Padé-Laplace fournit donc une approximation de la solution $u(t)$ de l'équation, qui est valide pour $t \in [0, \Delta t_r]$. Pour obtenir une solution à des valeurs de t plus élevées, on réitère le calcul en prenant comme $u(\Delta t_r)$ comme condition initiale.

4 Application à un problème périodique

Soit l'équation suivante dont la solution est connue et périodique

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0. \quad (12)$$

On va calculer la solution approchée par les schémas standard d'Euler explicite, de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4, et par l'algorithme Borel-Padé-Laplace. La table 3 compare la performance de chaque méthode. On y représente le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre $t = 2\pi$, avec une précision $\varepsilon = 10^{-2}$, 10^{-3} , 10^{-4} et 10^{-6} . On y voit que l'algorithme Borel-Padé-Laplace nécessite un nombre d'itérations beaucoup plus faible qu'avec les autres méthodes.

Le temps effectif CPU pour atteindre $t_{max} = 1, 2, 10, 100$ et 1000 fois la période est tracée sur la figure 2. La précision a été fixée à $\varepsilon = 10^{-6}$. On constate que l'algorithme Borel-Padé-Laplace demande un temps de calcul comparable à celui de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour t petit. En revanche, pour atteindre les valeurs élevées de t , le gain est très clair. Pour $t_{max} = 1000$, Borel-Padé-Laplace nécessite 59 fois moins de temps que la méthode RK4.

Pour une équation aux dérivées partielles, on effectue au préalable une discrétisation spatiale. Des applications à l'équation de la chaleur et à l'équation de Burgers seront présentées oralement (voir aussi [16]). Pour les équations de Navier-Stokes, le terme de pression nécessite une attention particulière.

Precision	Explicit	RK2	RK4	BPL
10^{-2}	1904	65	10	3
10^{-3}	19042	199	17	4
10^{-4}	190400	629	30	5
10^{-6}	$1.9 \cdot 10^7$	6284	96	9

TABLE 3 – Nombre d’itérations pour atteindre $t = 2\pi$ avec la méthode explicite d’Euler (Explicit), de Runge-Kutta d’ordre 2 (RK2) et d’ordre 4 (RK4) ainsi que par l’algorithme Borel-Padé-Laplace (BPL).

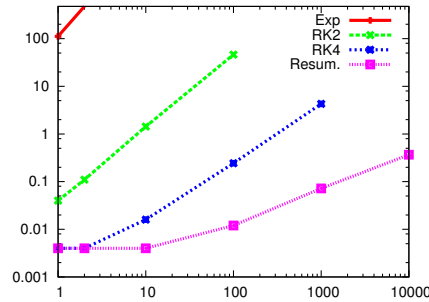


FIGURE 2 – Evolution of CPU time. On the abscissa : $t_{max}/2\pi$.

Ainsi, pour terminer ce papier, on va donner un aperçu d’un algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes par un développement en série temporelle qui sera suivi d’une resommation.

5 Application aux équations de Navier-Stokes

Considérons les équations de Navier-Stokes régissant le mouvement d’un fluide de densité unité :

$$\frac{du}{dt} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \nabla p = \nu \Delta, \quad \operatorname{div} u = 0. \quad (13)$$

On décompose la vitesse et la pression sous forme de séries entières formelles

$$\hat{u}(t, x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) t^n, \quad \hat{p}(t, x) = \sum_{n \geq 0} p_n(x) t^n. \quad (14)$$

Le caractère Gevrey des séries (14) a été étudié par Costin *et al.*. Lorsqu’on injecte (14) dans les équations (13), on est conduit à résoudre, le système d’équations

$$(n+1)u_{n+1} + \nabla p_n = \nu \Delta u_n - \sum_{k=0}^n \operatorname{div}(u_k \otimes u_{n-k}), \quad \operatorname{div} u_{n+1} = 0 \quad (15)$$

où l’inconnue est (u_{k+1}, p_k) , u_0 étant la condition initiale. Ainsi, pour chaque n , on résout une équation de Darcy.

Notons que l’opérateur à inverser est le même pour chaque n . Une seule inversion de matrice est donc nécessaire pendant toute la simulation, ce qui met l’algorithme dans la classe des méthodes explicites. Les résultats numériques sont en cours et seront présentés oralement.

6 Conclusion

La méthode de resommation permet d’obtenir des algorithmes rapides pour la résolution de problèmes de mécanique, en particulier les équations de Navier-Stokes. Ces algorithmes sont explicites et ne nécessitent pas une linéarisation comme dans d’autres algorithmes.

Des algorithmes alternatifs de resommation, comme le développement en séries de factorielles, seront aussi présentés.

Références

- [1] C. Allery, J-M. Cadou, A. Hamdouni, and D. Razafindralandy. Application of the asymptotic numerical method to the Coanda effect study. *European Journal of Computational Mechanics*, 13(1-2) :57–77, 2004.
- [2] C. Bender and S. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers : Asymptotic methods and perturbation theory*. McGraw-Hill, 1978.
- [3] C. Brezinski. Rationnal approximation to formal power serie. *Journal of Approximation Theory*, (25) :295–317, 1979.
- [4] J.M. Cadou, M. Potier-Ferry, and B. Cochelin. A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 25 :234–254, 2006.
- [5] O. Costin, G. Luo, and S. Tanveer. Divergent expansion, Borel summability and three-dimensional Navier-Stokes equation. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 36(1876) :2775–2788, 2008.
- [6] J. Cousteix and J. Mauss. *Analyse asymptotique et couche limite*. Springer, 2006.
- [7] N. Damil and M. Potier-Ferry. A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science*, 28(9) :943–957, 1990.
- [8] Y. Guevel, H. Boutyour, and J.-M. Cadou. Automatic detection and branch switching methods for steady bifurcation in fluid mechanics. *Journal of Computational Physics*, 230(9) :3614–3629, 2011.
- [9] D.A. Lutz, M. Miyake, and R. Schäfke. On the borel summability of divergent solutions of the heat equation. *Nagoya Mathematical Journal*, 154 :1–29, 1999.
- [10] G. Lysik. Borel summable solutions of the Burgers equation. *Annales Polonici Mathematici*, 95(2) :187–197, 2009.
- [11] E. Maillet. Sur les séries divergentes et les équations différentielles. *Annales scientifiques de l’E.N.S. 3^{ème} série*, 20 :487–518, 1903.
- [12] A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. A critical review of asymptotic numerical methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5(31-50), 1998.
- [13] W. Pauls and U. Frisch. A borel transform method for locating singularities of Taylor and Fourier series. *Journal of Statistical Physics*, 127 :1095–1119, 2007.
- [14] G. Pólya. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. *Mathematische Zeitschrift*, 29 :549–640, 1929.
- [15] J-P. Ramis. Les développements asymptotiques après poincaré : continuité et... divergences. *Gazettes des Mathématiciens*, (134), 2012.
- [16] D. Razafindralandy and A. Hamdouni. Time integration algorithm based on divergent series re-summation, for ordinary and partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 236 :56–73, 2013.
- [17] A. Tri, B. Cochelin, and M. Potier-Ferry. Résolution des équations de Navier-Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une méthode asymptotique numérique. *European Journal of Computational Mechanics*, 5(4), 1996.