



HAL
open science

Une formulation de la dynamique des systèmes discrets avec contacts unilatéraux et frottement

Alexandre Charles, Patrick Ballard

► To cite this version:

Alexandre Charles, Patrick Ballard. Une formulation de la dynamique des systèmes discrets avec contacts unilatéraux et frottement. CFM 2013 - 21e Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03441211

HAL Id: hal-03441211

<https://hal.science/hal-03441211>

Submitted on 22 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Une formulation de la dynamique des systèmes discrets avec contacts et frottement.

ALEXANDRE CHARLES^a ET PATRICK BALLARD^a

a. Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS UPR 7051, 31 chemin Joseph-Aiguier 13402 Marseille cedex 20, France.

Résumé :

La formulation de la dynamique des systèmes mécaniques discrets avec contacts et frottement est discutée. L'approche usuelle est « event driven » et ne permet pas d'écrire de manière systématique un problème d'évolution. Ceci a motivé l'émergence d'une nouvelle approche dans le cas sans frottement [5, 3, 1] que nous généralisons au cas avec frottement. Suivant le point de vue de Lagrange sur l'équation de la dynamique, nous mettons en exergue l'usage systématique des puissances virtuelles et de la dualité. Ce parti-pris suggère de mettre l'accent sur l'effort généralisé de réaction dans la formulation et non sur les forces de réactions locales dans le monde réel, comme il est usuel. Ce point de vue permet d'échapper à des pathologies connues sous le nom de paradoxe de Painlevé.

Abstract :

The statement of the equations of motion of discrete mechanical systems with contacts and friction is discussed. The usual approach is event driven and does not allow to write in a systematic way an evolution problem. This motivated the rise of a new approach in the frictionless case [5, 3, 1] we are generalizing in case of friction. Sticking to the point of view of Lagrange on the equation of the dynamics, we emphasize the systematic use of virtual powers and duality. This bias suggests to put emphasis on generalized reaction forces in the formulation of the evolution problem and not on local reaction forces of the real world, as it is usual in practice. This point of view allows to escape from pathologies known as Painlevé paradox.

Mots clefs : dynamique ; contact ; frottement

1 Contexte et objectifs.

Les problèmes mécaniques mettant en jeu contacts et frottement soulèvent des difficultés mathématiques importantes. En mécanique des milieux continus, très peu de résultats ont été établis. Le cas des systèmes discrets (les systèmes ayant un nombre fini de degrés de liberté) est plus simple et son analyse est plus avancée que pour les milieux continus.

La théorie des systèmes discrets est la théorie naturelle pour traiter un grand nombre de problèmes de l'ingénieur. Pour n'en nommer que quelques uns, la robotique, la réalité virtuelle ou l'étude des milieux granulaires sont des applications qui exigent une théorie claire et cohérente du contact et frottement pour les systèmes à nombre fini de degrés de liberté.

Malgré des contributions remarquables qui ont, ces dernières décennies, précisé la théorie, il manque toujours une formulation de portée générale. Dans le cas sans frottement et pour une collection finie de solides rigides, la formulation du problème d'évolution est claire [3, 5] et l'existence et l'unicité de la solution sont prouvées [1], pourvu que les données soient des fonctions analytiques de leurs arguments.

La situation est plus contrastée lorsque le frottement doit être pris en compte. Dans le cas particulier d'une collection finie de points matériels, la formulation du problème dynamique avec frottement ne pose pas de difficultés car les efforts généralisés coïncident avec les forces du monde réel et la loi

de Coulomb pour le frottement sec peut être adoptée sans ambiguïté. Il est alors possible d'étendre le théorème établi par Ballard dans le cas sans frottement et de prouver l'existence et l'unicité de l'évolution dynamique depuis une condition initiale sous l'hypothèse de données analytiques [2]. Ce résultat s'applique en particulier à la formulation discrétisée en espace (*e.g.* la méthode des éléments finis) d'un problème continu en élasticité non-linéaire avec contact et frottement.

Dans le cas — qui retiendra notre attention — où les solides rigides ne se réduisent pas à des points, il n'existe pas de formulation systématique du problème d'évolution. Bien sûr, pour des systèmes simples, avec peu de degrés de liberté et un seul point de contact identifié, il est possible d'écrire un problème de Cauchy en écrivant la loi de Coulomb au point de contact puis en calculant l'effort généralisé associé à la force de réaction. La loi de Coulomb a néanmoins deux inconvénients majeurs.

Premièrement, dans les cas de contacts multiples, de contacts non-ponctuels ou encore si la recherche des points de contacts n'est pas triviale, il n'est plus possible d'écrire la loi de Coulomb. Dans l'exemple élémentaire d'un cube posé sur le sol, devons-nous introduire une distribution de forces de réaction sur la surface de contact et ainsi introduire une ambiguïté toute artificielle ou bien appliquer les conditions de complémentarité et la loi de Coulomb à la résultante de cette distribution ? Puisqu'il n'existe pas de formulation claire, les codes qui se proposent de calculer numériquement l'évolution de systèmes discrets avec contacts et frottement sont des modèles en eux-mêmes. La modélisation numérique (l'algorithme est le modèle) est un choix de modélisation acceptable mais l'approche classique qui consiste à écrire un problème continu en temps puis à le discrétiser (la mécanique classique précisément suppose l'existence d'un temps absolu et continu) correspond mieux aux attentes de certaines applications. La stabilité de la solution, en vue de la robotique, ne peut en effet être étudiée qu'à l'intérieur de ce dernier cadre.

Deuxièmement, les cas pourtant favorables où la loi de Coulomb permet d'écrire un problème d'évolution donnent lieu à des pathologies. Pas de solution ou multiples solutions (paradoxe de Painlevé) ou encore des solutions violant le principe de conservation de l'énergie si l'on essaye de construire une loi pour les impacts avec frottements (aussi appelés impacts obliques) comme somme de la loi de Coulomb et la loi de choc de Newton (paradoxe de Kane).

La loi de Coulomb est cohérente avec la mécanique du point et la mécanique des milieux continus tandis qu'un nouveau point de vue doit être dégagé dans le cas des solides rigides. Une réponse impliquant les deux étapes suivantes sera proposée.

1. Écrire l'équation de la dynamique dans la variété des configurations. Dans le cas régulier (sans impact ni frottement), il s'agit du point de vue des équations de Lagrange qui font consensus depuis deux siècles.
2. L'écriture de l'équation de la dynamique et celle de l'équation du frottement, qui est une loi de comportement, doivent être distinguées. La théorie dessinera la forme générale des lois admissibles de sorte que choisir une loi de frottement particulière se résumera à choisir une surface de frottement (le pendant du domaine élastique en plasticité).

Le point de vue usuel, à savoir la loi de Coulomb aux points de contact, sera utilisé comme argument heuristique pour proposer une surface de frottement dans un grand nombre de cas : ceux pour lesquels l'on peut parler de la solution des équations usuelles. Ainsi la formulation que nous construirons et les équations usuelles auront la même solution. Dans certains cas, cette démarche échouera. Ce sont précisément les cas pathologiques qui nécessitaient une modification des équations.

L'objectif est d'obtenir une formulation systématique, cohérente, bien-posée des problèmes d'évolution dynamique des systèmes discrets avec contacts et frottement.

2 Une des limites de la loi de Coulomb.

En premier lieu, c'est l'absence d'une formulation claire et systématique qui motive ce travail. Ces problèmes se posent pour des systèmes complexes tandis qu'un exposé concis repose sur des exemples archétypaux pour lesquels il est souvent possible d'écrire un problème de Cauchy à partir de la loi de Coulomb au point de contact. Ainsi, notre argumentation se concentrera autour des pathologies levées par l'approche usuelle et, dans un souci de concision, sur la non-unicité de la solution.

Le contre-exemple est constitué d'une barre rigide dans le plan dont le centre de masse est contraint d'avoir une altitude donnée. La barre a ainsi deux degrés de liberté, x la translation du centre de masse suivant l'horizontale et θ la rotation de la barre autour du centre de masse. La configuration \mathbf{q} est alors le couple $\mathbf{q} = {}^t(x, \theta)$. L'extrémité droite de la barre est contrainte de rester au-dessus du sol et la contrainte unilatérale est décrite par la fonction de contrainte $\phi(\mathbf{q}) = \theta - \theta_0 \geq 0$. Le frottement sec de la barre sur le sol est modélisé au moyen de la loi de Coulomb et on cherchera l'évolution de la barre initialement au repos et en contact sous l'effet d'efforts généralisés qui se résument à une force f constante appliquée au centre de masse et qui pointe vers la droite.

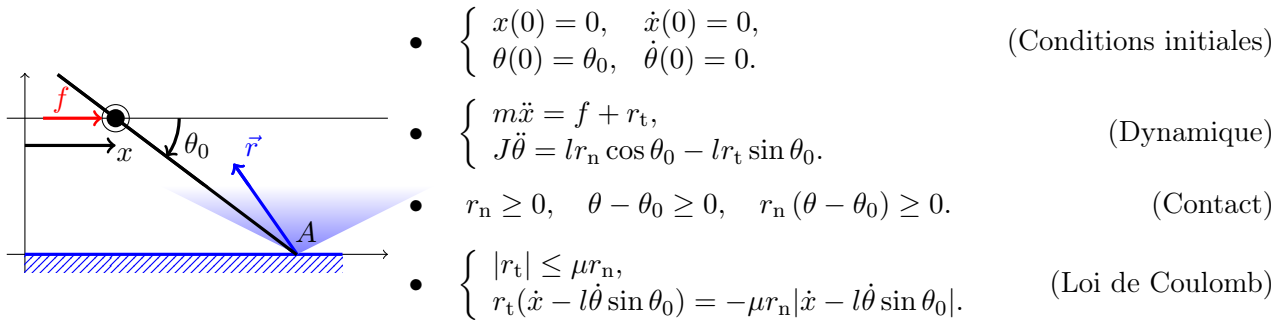


FIGURE 1 – Contre-exemple à l'unicité de solutions.

L'équilibre ($\mathbf{q}(t) \equiv {}^t(0, \theta_0)$) et le glissement rasant ($\mathbf{q}(t) = {}^t(ft^2/2, \theta_0)$ tandis que $\vec{r} = 0$) sont tous les deux solutions du problème d'évolution.

Selon Moreau [4], cette indétermination ne devrait pas être vue comme un défaut de la loi de Coulomb mais comme la conséquence de la pauvreté de la description cinématique. Néanmoins, nous souhaitons attirer l'attention sur les conséquences pratiques de l'indétermination. L'implémentation numérique de ces équations fournit alors des solutions qui dépendent des variables d'initialisation. Ces dernières doivent donc être choisies avec prudence pour sélectionner une solution physique. Clairement, une telle démarche relève de la modélisation numérique. De plus, n'y a-t-il pas une contradiction à implémenter des équations non-déterministes puisque, par définition, un algorithme est une succession prescrite et déterminée d'opérations (mise à part quelques algorithmes très spécifiques) ?

Enfin, rappelons qu'une indétermination avait déjà été rencontrée dans le cas sans frottement pour rendre compte des impacts. Lorsque le système est en contact avec une vitesse incompatible avec la contrainte, un saut de vitesse, *i.e.* un impact, doit avoir lieu. L'équation de la dynamique ne permet pas de déterminer ce saut de vitesse et, au lieu de vivre avec l'indétermination, on introduit traditionnellement une loi de comportement, en l'occurrence le coefficient de restitution de Newton, pour prédire la vitesse post-impact. Nous nous devons d'être cohérent : compléter les équations pour rendre les impacts déterministes implique d'adapter la loi de frottement à la finesse de la description cinématique.

3 Equation de la dynamique et équation du frottement.

Dans le contre-exemple présenté, nous avons écrit en même temps l'équation de la dynamique et celles du contact et du frottement. En mécanique des milieux continus, la démarche pour obtenir un problème d'évolution bien-posé est la suivante.

1. Identifier la description cohérente des efforts et écrire l'équation de la dynamique associée.
2. La compléter avec des lois de comportement pour en enlever tout l'arbitraire restant.

Dans le cas d'un système discret de configuration $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, écrire l'équation de la dynamique consiste à définir l'accélération généralisée γ grâce à l'équation de Lagrange et à construire les efforts généralisés à l'aide du principe des puissances virtuelles qui stipule que les efforts sont les cofacteurs des vitesses. Ici, les efforts généralisés sont des vecteurs de \mathbb{R}^n et l'équation de la dynamique est alors $\gamma = \mathbf{f}$.

Si une contrainte unilatérale holonome — décrite par l'inégalité $\phi(\mathbf{q}) \geq 0$ où ϕ est nommée fonction de contrainte — est ajoutée au problème, on doit ajouter un terme complémentaire dans l'équation

de la dynamique, appelé l'effort de réaction, pour rendre compte des interactions entre le système et l'obstacle. Écrire en premier lieu l'équation de la dynamique montre que l'effort de réaction doit être un effort généralisé, que l'on nommera donc réaction généralisée et qui sera notée \mathbf{r} . L'équation de la dynamique est alors $\gamma = \mathbf{f} + \mathbf{r}$ avec $\phi(\mathbf{q}) > 0 \Rightarrow \mathbf{r} = 0$.

Comme il est habituel, la réaction généralisée \mathbf{r} doit être divisée en une partie normale \mathbf{r}_n et une partie tangentielle \mathbf{r}_t pour modéliser le contact et le frottement respectivement. Comme dans le cas sans frottement [1], la réaction normale est définie par le principe de d'Alembert-Lagrange et est un effort généralisé dirigé par la différentielle de la contrainte $d\phi(\mathbf{q})$.

La partie tangentielle sera classiquement déterminée par une loi de frottement, une loi d'écoulement à seuil satisfaisant le principe de dissipation maximum. Néanmoins, il doit d'abord être donné un sens précis à la notion vague de réaction tangentielle (cette étape est triviale dans le cas de la particule) en invoquant le principe des puissances virtuelles puisque, en revanche, il est clair comment définir les vitesses généralisées tangentes. Une vitesse généralisée tangente sera une vitesse $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ telle que $d\phi \cdot \mathbf{v} = 0$. Si la vitesse généralisée est tangente, la vitesse du point en contact est tangente. Nous soutenons que la réaction tangentielle est une puissance virtuelle sur l'espace des vitesses virtuelles tangentes. La réaction tangentielle est donc un effort généralisé orthogonal (pour l'inverse de la matrice de masse) à la différentielle de la contrainte.

Ce point de vue est cohérent avec l'acceptation populaire du frottement. L'on parle de frottement si le système ralentit spontanément ou de façon équivalente si l'on doit travailler pour maintenir le mouvement. Le frottement est une dissipation d'énergie qui n'a de sens que pour les mouvements préservant le contact, ceux pour lesquels la vitesse du système est tangentielle. Si la vitesse n'est pas tangentielle, le contact est évanescent et il n'y a pas de frottement (le cas avec impact est laissé de côté pour l'instant).

Il ne s'agit de rien d'autre que de coller à la démarche de Lagrange qui écrit la dynamique d'une collection de solides rigides comme la dynamique d'un point dans la variété des configurations (voir figure 2). Le problème devient similaire à celui du point matériel dans le monde réel et nous suivons, à partir de maintenant, les étapes classiques de la construction de la loi de Coulomb pour une particule.

En cas de frottement sec, on suppose de plus que la réaction généralisée tangentielle appartient à une (hyper-)surface seuil, appelée la surface de frottement, qui dépend linéairement de la réaction normale et pas de la vitesse. Le frottement obéit au principe de dissipation maximale. La surface de frottement est un convexe et le principe de dissipation maximum fournit une loi d'écoulement qui respecte la règle de la normalité et qui sera formalisée par un sous-différentiel : $\mathbf{r}_t \in \partial \mathcal{S}_{\mathbf{r}_n \mathcal{C}(\mathbf{q})} [-\dot{\mathbf{q}}_t^+]$, où $\partial \mathcal{S}_{\mathbf{r}_n \mathcal{C}(\mathbf{q})}$ est le sous-différentiel de la fonction support du convexe $\mathbf{r}_n \mathcal{C}(\mathbf{q})$.

Finalement, nous écrivons le problème qui gouverne l'évolution dynamique d'un système discret de configuration $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, de matrice de masse $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, sous l'effet d'efforts extérieurs $\mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^+)$, de la contrainte unilatérale holonome $\phi(\mathbf{q}) \geq 0$ et du frottement sec. En accord avec [5, 3], nous chercherons la configuration dans la classe $MMA([0, T], \mathbb{R}^n)$ des mouvements à accélération mesurée et l'effort de réaction dans l'espace des mesures $\mathcal{M}([0, T], \mathbb{R}^n)$ (qui contient la mesure de Dirac rencontrée à chaque impact).

Problème \mathcal{P} . Trouver $\mathbf{q} \in MMA([0, T], \mathbb{R}^n)$ et $R \in \mathcal{M}([0, T], \mathbb{R}^n)$ tels que :

- $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}^-(0) = \mathbf{v}_0.$ (Conditions initiales)
- $\gamma = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^+) + \mathbf{r}.$ (Equation de la dynamique)
- $\mathbf{r}_n = \left(\mathbf{r}, \frac{d\phi}{\|d\phi\|_{\mathbf{M}^{-1}}} \right)_{\mathbf{M}^{-1}}, \quad \mathbf{r}_t = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n \frac{d\phi}{\|d\phi\|_{\mathbf{M}^{-1}}},$
 $\dot{\mathbf{q}}_n^+ = \left(\dot{\mathbf{q}}^+, \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|_{\mathbf{M}}} \right)_{\mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{q}}_t^+ = \dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}_n^+ \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|_{\mathbf{M}}}.$ (Définition des directions)
- $\mathbf{r}_n \geq 0, \quad \phi(\mathbf{q}) \geq 0, \quad \mathbf{r}_n \cdot \phi(\mathbf{q}) = 0.$ (Conditions de complémentarité)
- $\dot{\mathbf{q}}_n^+ = -\varepsilon(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^-) \dot{\mathbf{q}}_n^-.$ (Loi d'impact)
- $\mathbf{r}_t \in \partial \mathcal{S}_{\mathbf{r}_n \mathcal{C}(\mathbf{q})} [-\dot{\mathbf{q}}_t^+].$ (Loi de frottement généralisé)

La loi d'impact de Newton et la loi de frottement généralisée ont été écrites côte à côte. En effet, la loi de frottement généralisée a une structure conique et il est possible de donner un sens à l'équation du frottement lorsque la réaction n'est plus une fonction mais une mesure. La loi de frottement passe à la limite pendant les impacts et, contrairement à la loi de Coulomb, fournit une loi de comportement pour les impacts avec frottement, encore appelés impacts obliques.

4 Comment construire la surface seuil ?

Le problème d'évolution avec frottement proposé a formellement la même structure que celui dans le cas d'une seule particule pour lequel l'existence et l'unicité de la solution sont prouvées [2]. La théorie dessine la forme générale des lois de frottement admissibles de sorte que tout l'arbitraire est contenu dans la surface seuil. Le point de vue classique, qui consiste à écrire la loi de Coulomb au point de contact, apparaît naturellement comme argument heuristique pour proposer une surface. En effet, dans de nombreux cas, ce point de vue a été fructueux pendant des siècles.

La démarche est illustrée au moyen du système introduit à la section 2. Il est facilement vérifiable que les efforts généralisés normaux sont les moments autour du centre de masse tandis que les efforts tangents sont les résultantes suivant x . La surface de frottement est dans cet exemple un segment qui peut être déterminé par la connaissance d'un coefficient de frottement à gauche et d'un à droite :

$$\mathcal{C}(\mathbf{q}) = -(-\mu^-, \mu^+) \begin{pmatrix} \sqrt{m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le frottement étant une dissipation d'énergie, nous évaluerons cette dissipation grâce à l'approche classique lorsque le système, dans la configuration \mathbf{q} , glisse à vitesse \mathbf{v} et que le contact est forcé.

Le calcul peut ne pas conclure. Dans certains cas, toute force de réaction classique (monde réel) sur le bord du cône de Coulomb conduirait à la violation de la contrainte unilatérale sur les temps positifs. Une telle situation est un cas de paradoxe de Painlevé : le système est en fait bloqué et la vitesse \mathbf{v} doit être interdite par la loi de frottement. Le coefficient de frottement dans cette direction sera pris égal à l'infini.

A gauche. La barre a une vitesse $\mathbf{v} = {}^t(-1/\sqrt{m}, 0)$ (de norme 1) et le contact est forcé de sorte que la réaction normale vaut $\mathbf{r}_n = 1$. La vitesse du point matériel en contact A est alors $\vec{v}_A = {}^t(-1/\sqrt{m}, 0)$.

Une réaction classique admissible doit vérifier l'hypothèse de non-adhésion $r_n \geq 0$, la loi de Coulomb $r_t = +\mu r_n$ et être associée à un effort généralisé de composante normale égale à 1 : $r_n \cos \theta_0 - r_t \sin \theta_0 = J/l$. On obtient $r_n = -J/l (\cos \theta_0 - \mu \sin \theta_0) \geq 0$ et $r_t = -\mu J/l (\cos \theta_0 - \mu \sin \theta_0)$.

Puisque \mathbf{v} et \mathbf{r}_n sont de norme 1 pour la matrice de masse et son inverse respectivement, la puissance dissipée est :

$$\phi = \vec{r} \cdot \vec{v}_A = \mu \frac{J}{l (\cos \theta_0 - \mu \sin \theta_0)} \sqrt{\frac{1}{m}} = -\mu^-.$$

A droite. Supposant la vitesse du système égale à $\mathbf{v} = {}^t(1/\sqrt{m}, 0)$, le calcul précédent n'aboutit pas si le coefficient de frottement de Coulomb est trop grand : $\mu \geq |\tan \theta_0|^{-1}$. Dans ce cas, le système est bloqué vers la droite et le coefficient de frottement à droite est pris égal à l'infini.

Finalement, la surface de frottement est : $\mathcal{C}(\mathbf{q}) = -[-\mu^-, +\infty[\begin{pmatrix} \sqrt{m} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si nous étudions à nouveau l'évolution dynamique de la barre initialement au repos et en contact que l'on pousse vers la droite (section 2), l'ambiguïté est toujours présente mais concerne à présent la définition de la surface de frottement. Comme $\mu^+ = +\infty$, quel sens donner à $\mathbf{r}_n \mathcal{C}(\mathbf{q})$ quand $\mathbf{r}_n = 0$?

Si nous convenons que $0 \times \infty = 0$, nous sélectionnerons la solution glissante tandis que la solution bloquée sera retenue en faisant $0 \times \infty = \infty$. Nous sommes dans cet exemple capable de sélectionner de façon explicite une solution et de recouvrer l'unicité de la solution au problème d'évolution.

5 Conclusion et perspectives.

En conclusion, nous résumons dans un schéma (figure 2) la présentation. Ce schéma détaille la démarche que nous avons exposée pour l'exemple archétypal que nous avons introduit à la section 2. Nous aimerions également ajouter quelques remarques sur le cas des contacts multiples.

Bien que nous nous soyons concentrés sur le cas d'une seule contrainte unilatérale par soucis de concision, le cas des contacts multiples est plus intéressant : les problèmes de formulation et les pathologies de non-unicité sont alors quasi-systématiques. Une généralisation du problème de Cauchy écrit à la section 3 n'est pas le plus difficile et consistera à introduire le cône engendré par les normales comme dans le cas sans frottement [3, 1]. La difficulté repose sur le choix de surfaces de frottement conveables. Puisque les pathologies deviennent systématiques, il ne sera plus possible d'invoquer la loi de Coulomb comme argument heuristique. Nous n'aurons d'autre choix que d'en proposer à partir de la connaissance des surfaces de frottement associées à chaque contact pris séparément (ces dernières venant de la loi de Coulomb). Ce problème est absolument équivalent au problème archétypal suivant :

Quelles équations gouvernent l'évolution d'une particule le long du coin entre deux murs si la particule frotte contre les deux murs ? Écrit usuellement, le problème peut avoir plusieurs solutions mais une se distingue des autres. Il ne restera plus qu'à formaliser ce choix au travers de la surface de frottement.

Revenant à un système discret quelconque, nous décrirons le frottement par rapport aux contacts multiples comme la somme (en tant que dissipation) des contacts simples. D'un point de vue numérique, le sous-algorithme qui évalue les réactions à chaque pas de temps sera linéaire en le nombre de contacts.

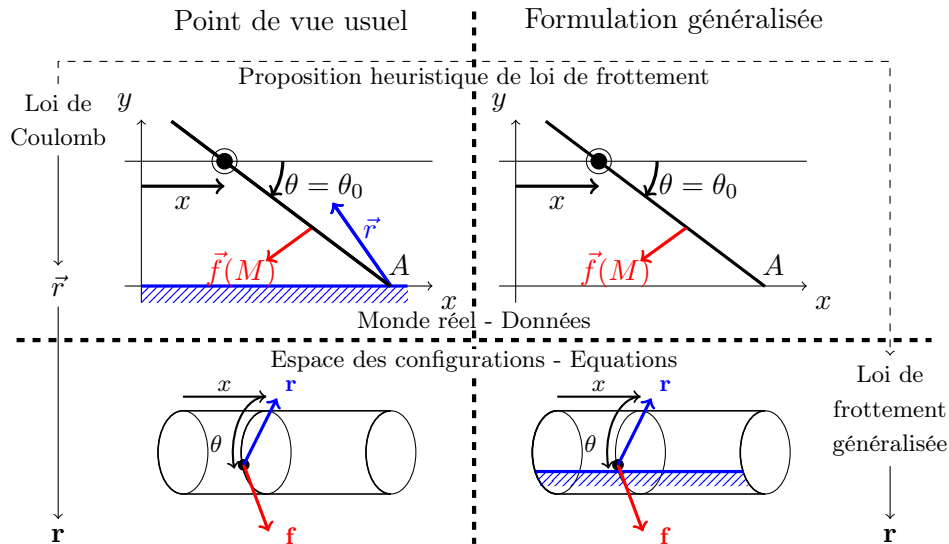


FIGURE 2 – Résumé de la présentation.

Références

- [1] Patrick BALLARD : The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 154:199–274, 2000.
- [2] Alexandre CHARLES et Patrick BALLARD : Existence and uniqueness for dynamical unilateral contact with coulomb friction : A collection of particles. *submitted to M2AN*, 2013.
- [3] Jean-Jacques MOREAU : Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints. In G. Del PIERO et F. MACERI, éditeurs : *Unilateral problems in structural analysis*, pages 173–221. Springer-Verlag, Wien, New-York, 1983.
- [4] Jean-Jacques MOREAU : Modélisation et simulation de matériaux granulaires. In *Actes du 35e Congrès National d'Analyse Numérique*, 2003.
- [5] Michelle SCHATZMAN : A class of nonlinear differential equations of second order in time. *Nonlinear analysis, theory, methods and applications*, 2(2):355–373, 1978.