



**HAL**  
open science

## Un résultat mathématique sur la sensibilité paramétrique du ROM-POD

Nissrine Akkari, Aziz Hamdouni, Erwan Liberge, Mustapha Jazar

► **To cite this version:**

Nissrine Akkari, Aziz Hamdouni, Erwan Liberge, Mustapha Jazar. Un résultat mathématique sur la sensibilité paramétrique du ROM-POD. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03441172

**HAL Id: hal-03441172**

**<https://hal.science/hal-03441172>**

Submitted on 22 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Résultats mathématiques et numériques sur la sensibilité de la ROM-POD

N. Akkari<sup>a</sup>, A. Hamdouni<sup>a</sup>, E. Liberge<sup>a</sup>, M. Jazar<sup>b</sup>

a. Université de La Rochelle, Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement(LaSIE)

b. Université Libanaise, Laboratoire de Mathématiques et Applications(LaMA)

## Résumé :

*Dans cette communication, nous établissons une étude mathématique sur la sensibilité paramétrique des modèles d'ordre réduit (ROM) par la méthode de la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Nous nous intéressons plus particulièrement aux équations de Navier-Stokes pour un écoulement fluide bidimensionnel et incompressible. Nous présentons aussi une comparaison avec des simulations numériques pour la configuration d'un écoulement instationnaire dans un canal autour d'un cylindre circulaire.*

## Abstract :

*In this communication, we establish a mathematical result on the parametric sensitivity of the reduced order model (ROM) obtained by the proper orthogonal decomposition method (POD). In particular, we are interested in the Navier-Stokes equations for a 2D incompressible fluid flow. Numerical simulations of our result are done for the configuration of an unsteady fluid flow around a cylinder.*

**Mots clefs :** Modèle d'ordre réduit ; POD ; Evolution paramétrique

## 1 Introduction

Les études des problèmes aux limites en mécanique des fluides avec évolution paramétrique interviennent dans différentes applications, comme l'étude de stabilité, l'optimisation de forme, le contrôle, les problèmes inverses, etc...La résolution du système de Navier-Stokes paramétré complet peut être très coûteuse. Ainsi, depuis quelques années ces problèmes sont approchés par des techniques de réduction de modèle (ROM) type POD par exemple. Le problème qui se pose alors, est de trouver le moyen de contrôler l'évolution paramétrique dans ces modèles réduits. Il existe plusieurs algorithmes numériques qui génèrent un modèle d'ordre réduit, adapté et sensible à d'éventuels changements des paramètres caractéristiques d'un écoulement fluide. Dans le cas où la technique de réduction est la POD, nous pouvons citer : L'algorithme numérique d'interpolation géométrique de modèles réduits à différentes valeurs paramétriques [3]. L'algorithme itératif de Greedy qui enrichit une base POD calculée à une certaine valeur paramétrique, en évaluant les erreurs obtenues a posteriori par projection orthogonale de solutions associées à d'autres valeurs paramétriques [1, 6].

Néanmoins, dans beaucoup d'applications comme par exemple les problèmes de contrôle optimal [2], le ROM est obtenu à partir d'une base POD de référence calculée pour une valeur déterminée du paramètre. D'où l'importance de déterminer au préalable une région de confiance d'un modèle ROM-POD à un paramètre donné, où il approche le problème complet à une précision fixée au préalable. Il est important aussi de se poser la question. Comment augmenter la dimension du modèle réduit, de manière à élargir la région de confiance sans que la réduction de modèles perde son sens ? Nous proposons une réponse à ces deux questions dans le cadre des équations de Navier-Stokes pour un écoulement fluide bidimensionnel et incompressible. Le paramètre de ces équations sera le nombre de Reynolds décrit par la variation de la viscosité  $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ , pour une longueur et une vitesse de référence fixes. Notre résultat principal démontre que l'erreur entre la solution du modèle réduit par POD et celle du problème semi-discret en espace associé aux équations de Navier-Stokes, est contrôlée par la distance

entre deux viscosités distinctes, multipliée par un terme qui décroît quand la dimension  $N$  du modèle réduit augmente.

## 2 Formulation du problème

Notons,  $X = [L^2(\Omega)]^2$ ,  $V = \{v \in [H_0^1(\Omega)]^2, \operatorname{div} v = 0\}$  où  $\Omega$  est un ouvert borné, connexe et lipschitzien de  $\mathbb{R}^2$  et  $V_h$  un sous espace de  $V$  de dimension  $M$ . Soient  $\lambda > 0$ ,  $u_0$  donnée dans  $V$  et  $f$  donnée dans  $L_{loc}^2([0, +\infty[, X)$ . Pour simplifier, on supposera que  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ .

Soient  $a$ ,  $b$  et  $F_t$  trois formes sur  $X$  respectivement bilinéaire coercive, trilinéaire et linéaire, définies par :

- $\forall v_1, v_2 \in V, a(v_1, v_2) = (\nabla v_1, \nabla v_2)_{[L^2(\Omega)]^4}$ .
- $\forall v_1, v_2, v_3 \in V, b(v_1, v_2, v_3) = (\operatorname{div}(v_1 \otimes v_2), v_3)_X$ .
- $\forall v \in V, F_t(v) = (f(t), v)_X$ .

( $\cdot$ ) désigne un produit scalaire dans l'espace correspondant.

Nous notons  $C_p$  la constante relative à la coercivité de la forme bilinéaire  $a$ , qui n'est autre ici que le carré d'une constante de Poincaré.

Nous notons respectivement  $C_a$  et  $C_b$  les bornes des formes  $a$  et  $b$  sur l'espace  $V_h$  muni de la norme de l'espace  $X$ . Nous considérons les équations de Navier-Stokes pour un écoulement fluide bidimensionnel et incompressible données par leur formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, v \right)_X + b(u_\lambda(t), u_\lambda(t), v) = -\lambda a(u_\lambda(t), v) + F_t(v) \quad \forall v \in V \\ (u_\lambda(0), v)_X = (u_0, v)_X \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, on démontre qu'il existe une unique solution globale des équations de Navier-Stokes vérifiant :  $u_\lambda \in C^0([0, +\infty[, V) \cap L_{loc}^2([0, +\infty[, ([H^2(\Omega)]^2 \cap V))$ ,  $\frac{du_\lambda}{dt} \in L_{loc}^2([0, +\infty[, X)$  [4].

L'approximation Galerkin des équations de Navier-Stokes dans  $V_h$  est donnée par :

$$\begin{cases} \left( \frac{du_\lambda^h}{dt}, v \right)_X + b(u_\lambda^h(t), u_\lambda^h(t), v) = -\lambda a(u_\lambda^h(t), v) + F_t(v) \quad \forall v \in V_h \\ (u_\lambda^h(0), v)_X = (u_0^h, v)_X \quad \forall v \in V_h \end{cases}$$

Nous désignons par  $K$  une borne supérieure de  $\|u_\lambda^h\|_X$ , sur un intervalle de temps  $\mathbf{T} = (0, T)$ . Nous notons  $(\mu_n^{\lambda_0})_{n=1, \dots, M}$  et  $\Phi^{\lambda_0} = (\Phi_n^{\lambda_0})_{n=1, \dots, M}$  respectivement les deux suites des valeurs propres et vecteurs propres POD associées à une solution de référence  $u_{\lambda_0}^h$  sur l'intervalle de temps  $\mathbf{T}$ . Nous supposons que la base POD  $\Phi^{\lambda_0}$  est hilbertienne dans l'espace  $V_h$  et orthonormale au sens du produit scalaire de l'espace  $X$ . Nous nous intéressons à l'étude paramétrique du modèle réduit par POD qui décrit l'évolution d'une approximation  $\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t)$  de  $u_\lambda^h(t)$ , dans le sous espace POD de référence dont la dimension est  $N \ll M$ . Notre résultat principal est :

**Résultat 1** *Il existe deux suites  $(f_1^{\lambda_0}(N))_{N=1, \dots, M}$  et  $(f_2^{\lambda_0}(N))_{N=1, \dots, M}$  décroissantes, telles que :*

$$\|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq f_1^{\lambda_0}(N) + f_2^{\lambda_0}(N) \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{\lambda_0},$$

où les termes généraux  $f_1^{\lambda_0}(N)$  et  $f_2^{\lambda_0}(N)$  seront explicités dans les sections suivantes.

Dans ce qui suit, nous donnons les grandes étapes de la preuve de ce résultat qui seront réparties selon plusieurs sections : Dans la section 2, nous établissons des estimations a priori d'erreurs POD-Galerkin. Dans la section 3, nous démontrons notre résultat principal. Dans la section 4, nous présentons des simulations numériques par un code de volumes finis (code *Saturne*), pour un écoulement laminaire autour d'un cylindre circulaire.

### 3 Etude de l'approche POD-Galerkin pour un paramètre fixe

**Proposition 1**  $\|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq f_1^{\lambda_0}(N)$ , où  $f_1^{\lambda_0}(N) = \mathbf{C}(C_p, C_a, C_b, K, \lambda_0, T) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}$ .

**Preuve.** Dans tout ce qui suit,  $\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N$  désigne l'opérateur de la projection orthogonale sur le sous-espace POD de dimension  $N$ .

$$\|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq 2 \|u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 + 2 \|\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2.$$

–  $\|u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 = T \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}$  est la partie négligée de l'énergie contenue dans la solution

–  $\|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2$  vérifie l'égalité différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_X^2 &= -b \left( (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t), u_{\lambda_0}^h(t), (\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right) \\ &\quad - b \left( \hat{u}_{\lambda_0}(t), (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t), (\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right) \\ &\quad - \lambda_0 a \left( (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t), (\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right). \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des deux formes  $a$  et  $b$ , et en appliquant une inégalité de Young, nous obtenons les trois majorations suivantes :

$$\begin{aligned} -b \left( (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t), u_{\lambda_0}^h(t), (\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right) &\leq \\ C_b K \left( \frac{1}{2} \|(u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h)(t)\|_X^2 + \frac{1}{2} \|(\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t)\|_X^2 \right) &+ C_b K \|( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} )(t)\|_X^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -b \left( \hat{u}_{\lambda_0}(t), (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t), (\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right) &\leq \\ C_b K \left( \frac{1}{2} \|(u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h)(t)\|_X^2 + \frac{1}{2} \|(\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t)\|_X^2 \right) &+ C_b K \|( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} )(t)\|_X^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\lambda_0 a \left( (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t), (\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right) &\leq \frac{\lambda_0^2 C_a^2}{2} \|(u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h)(t)\|_X^2 + \frac{1}{2} \|(\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t)\|_X^2 \\ &\quad - \lambda_0 C_p \|( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} )(t)\|_X^2. \end{aligned}$$

Par la suite,

$$\frac{d}{dt} \|\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_X^2 \leq (6C_b K + 1 - 2\lambda_0 C_p) \|(\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t)\|_X^2 + (2C_b K + \lambda_0^2 C_a^2) \|(u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h)(t)\|_X^2$$

En intégrant sur un intervalle  $(0, t) \subset \mathbf{T}$  et par application du lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\|(\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t)\|_X^2 \leq \exp[(6C_b K + 1 - 2\lambda_0 C_p)t] (2C_b K + \lambda_0^2 C_a^2) T \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}.$$

## 4 Etude paramétrique de l'approche Galerkin par une base POD de référence

### 4.1 Sensibilité paramétrique des solutions d'un problème semi-discret associé aux équations de Navier-Stokes

**Proposition 2** *Nous fixons  $\beta$  un réel strictement positif, très proche de zéro. Alors, l'application définie par :*

$$\left] \frac{\beta}{2C_p}, +\infty \right[ \begin{array}{l} \longrightarrow L^2(\mathbf{T}, X) \\ \lambda \quad \quad \quad \mapsto \quad u_\lambda^h \end{array}$$

*est localement lipschitzienne. Et à un voisinage de  $\lambda_0$ , nous avons l'inégalité suivante :*

$$\|u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq \mathcal{B} \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{\lambda_0}.$$

$\mathcal{B} := \frac{TC_a^2 K}{4C_b} \frac{\lambda_0}{\gamma} [\exp(4C_b K T) - 1]$ ,  $\gamma$  est un réel strictement positif qui vérifie :  $\gamma = \beta$ .

**Preuve.** Notons  $w^h(t) = (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t)$ , qui vérifie le problème variationnel suivant :

$$\left( \frac{d}{dt} w^h, v \right)_X + b(w^h(t), u_\lambda^h(t), v) + b(u_{\lambda_0}^h, w^h(t), v) + \lambda a(w^h(t), v) + (\lambda - \lambda_0) a(u_{\lambda_0}^h(t), v) = 0.$$

En remplaçant  $v$  par  $w^h(t)$ , en utilisant les propriétés des deux formes  $a$  et  $b$  et en appliquant une inégalité de Young, nous obtenons les trois majorations suivantes :  $-b(w^h(t), u_\lambda^h(t), w^h(t)) \leq C_b K \|w^h(t)\|_X^2$ ,  $-b(u_{\lambda_0}^h(t), w^h(t), w^h(t)) \leq C_b K \|w^h(t)\|_X^2$ , et,

$$-\lambda a(w^h(t), w^h(t)) - (\lambda - \lambda_0) a(u_{\lambda_0}^h(t), w^h(t)) \leq -\lambda C_p \|w^h(t)\|_X^2 + \frac{\gamma}{2} \|w^h(t)\|_X^2 + |\lambda - \lambda_0|^2 \frac{C_a^2 K^2}{2\gamma}.$$

Sous les conditions imposées sur  $\gamma$  dans l'énoncé de la proposition, nous pouvons démontrer que  $-2\lambda C_p + \gamma < 0$ . Par suite,

$$\frac{d}{dt} \|w^h\|_X^2 \leq 4C_b K \|w^h(t)\|_X^2 + \frac{C_a^2 K^2}{\gamma} |\lambda - \lambda_0|^2.$$

En intégrant sur un intervalle  $(0, t) \subset \mathbf{T}$ , et en appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\|w^h(t)\|_X^2 \leq TC_a^2 K^2 \frac{\lambda_0}{\gamma} \exp(4C_b K t) \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{\lambda_0}.$$

### 4.2 Preuve du résultat principal

**Lemme intermédiaire 1** *Soit  $(\Phi_n)_{n=1, \dots, M}$  une base hilbertienne dans  $V_h$  et orthonormale au sens du produit scalaire de l'espace  $X$ . On note  $\Phi_n = (\Phi_n^1, \Phi_n^2)^T$ . Nous définissons la fonction  $f_n = (f_n^1, f_n^2)^T$  :*

$$f_n^1(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^1(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad \text{et} \quad f_n^2(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^2(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

*Alors,  $\sum_{n=1}^M \|f_n\|_X^2 < \frac{1}{2}$ .*

**Preuve.**  $\int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^1(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \left( \Phi_n^1, \mathbf{1}_{[0, x_1] \times [0, x_2]} \right)_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \|f_n\|_X^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left| \left( \Phi_n, \mathbf{1}_{[0, x_1] \times [0, x_2]} \right)_X \right|^2 dx_1 dx_2$   
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^M \|f_n\|_X^2 < \int_0^1 \int_0^1 \left\| \mathbf{1}_{[0, x_1] \times [0, x_2]} \right\|_X^2 dx_1 dx_2.$

## Preuve de notre résultat

$$\begin{aligned} \left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 &\leq 2 \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 + 2 \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \\ &\quad + 2 \left\| \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \end{aligned}$$

– L’erreur POD-Galerkin  $\left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2$  est estimée par  $f_1^{\lambda_0}(N)$ , d’après la proposition 1.

$$- \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 = \sum_{n=N+1}^M \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0}) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R})}^2.$$

En appliquant la formule de Green suivie de l’inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant le fait que  $u_\lambda^h \in L^2(\mathbf{T}, [H^2(\Omega)]^2 \cap V)$ , il est clair que :

$$\left( (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X = - \left( \partial x_2 \partial x_1 (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t), f_n^{\lambda_0} \right)_X.$$

$$\text{Alors, } \sum_{n=N+1}^M \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0}) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R})}^2 \text{ est contrôlé par } \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} \sum_{n=N+1}^M \left\| f_n^{\lambda_0} \right\|_X^2.$$

– L’erreur Galerkin  $\left\| \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2$  est contrôlée par  $\sum_{n=N+1}^M \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0}) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R})}^2$  ;

Ceci est démontré en réduisant le modèle semi-discret décrivant l’évolution de  $(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t)$ , par projection sur le sous-espace POD de référence de dimension  $N$ .

### 4.3 Résultat heuristique : Précision sur le rythme de décroissance de l’erreur ROM-POD en fonction de la régularité des solutions.

Sous les deux hypothèses de régularité des solutions  $u_\lambda^h \in L^2(\mathbf{T}, [H^2(\Omega)]^2 \cap V)$  et de la périodicité des modes POD, le reste  $\sum_{n=N+1}^M \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0}) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R})}^2$  est de l’ordre du reste  $\sum_{n=N+1}^M c_n$  de la série de

Fourier de Fourier de  $(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t)$ , quand  $N$  devient proche de  $M$ . Nous obtenons alors, la majoration suivante :

#### Proposition 3

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq f_{\lambda_0}^1(N) + c(N) \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{\lambda_0},$$

où  $c(N)$  est de l’ordre de  $\frac{1}{N}$ , quand  $N$  devient proche de  $M$ .

## 5 Validation numérique

### 5.1 Configuration d’étude

Notre configuration d’étude (figure (1)), est l’écoulement instationnaire, de masse volumique  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ , dans un canal autour d’un cylindre circulaire de diamètre  $D = 0.025 \text{ m}$ . La condition d’entrée au canal, est un écoulement plat dont la vitesse est égale à  $0.004 \text{ m/s}$ . Des conditions de symétrie sont imposées sur les deux murs parallèles du canal ( $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ). Un flux nul est imposé à la sortie du canal. Le Reynolds critique  $Re_0$  associé à la viscosité de référence  $\lambda_0$  est égal à 125. Nous avons varié la viscosité  $\lambda$  pour avoir des calculs associés à des Reynolds variant dans l’intervalle  $[70, 180]$  discrétisé avec un pas  $\Delta Re = 5$ . Nous traçons l’évolution du logarithme de l’erreur paramétrique :  $\ln \left( \left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)} \right)$  en fonction respectivement de  $\ln(|\lambda - \lambda_0|)$  et  $\ln(|Re - Re_0|)$  pour un nombre de modes  $N$  fixe. Nous obtenons les deux figures (2a) et (2b).

A partir de la figure (2a), nous retrouvons le comportement annoncé dans notre résultat concernant la dépendance linéaire de l’erreur ROM-POD vis-à-vis l’évolution paramétrique.

## 6 Conclusion

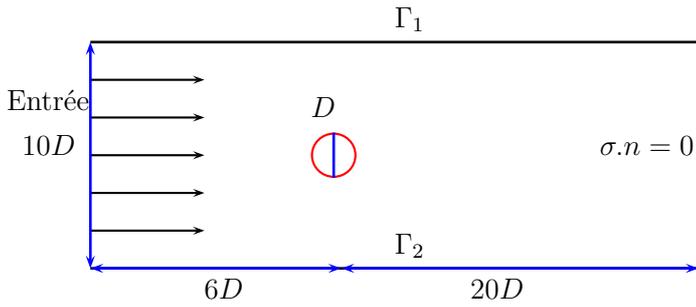


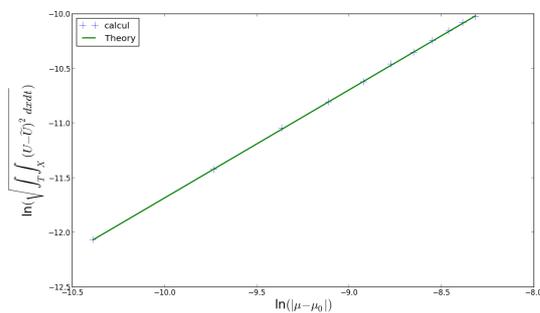
FIGURE 1 – Configuration d'étude

Dans cette communication, nous avons présenté des résultats mathématiques et numériques sur la sensibilité des modèles réduits par POD des équations de Navier-Stokes pour un écoulement bidimensionnel et incompressible. Nous avons démontré que l'erreur paramétrique du ROM-POD est contrôlée par la distance entre le paramètre  $\lambda$  et celui de référence  $\lambda_0$ . Nous avons obtenu aussi, une estimation a priori du rythme de décroissance de cette erreur en fonction du nombre de modes : Ce rythme dépend de celui du reste  $f_2^{\lambda_0}(N)$ . En plus, par un raisonnement

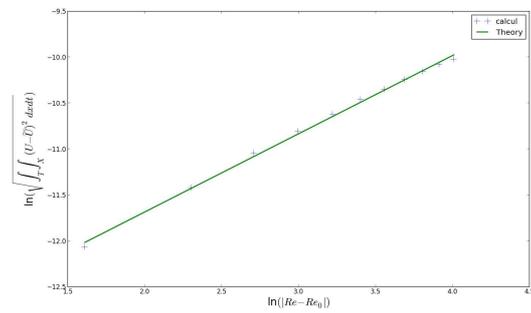
heuristique nous avons montré que la vitesse de décroissance de cette erreur est fortement liée à la régularité des solutions : Pour une régularité de type  $u_\lambda^h \in L^2(\mathbf{T}, [H^m(\Omega)]^2 \cap V)$ , le taux de décroissance de l'erreur du ROM-POD est de l'ordre de  $\frac{1}{N^{2m-1}}$  lorsque  $N$  devient proche de  $M$ .

## Références

- [1] Andrea Manzoni, Alfio Quarteroni, Gianluigi Rozza 2012 Computational reduction for parametrized PDEs : strategies and applications, Mathematics Institute of Computational Science and Engineering, (15).
- [2] C. Leblond, C. Allery, C. Béghein Contrôle optimal de la qualité de l'air dans une cavité bidimensionnelle par réduction de modèle, 19<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique.
- [3] David Amsallem, Julien Cortial, Kevin Carlberg, Charbel Farhat 2009 A method for interpolation on manifolds structural dynamics reduced-order models, International journal for numerical methods in engineering, pp. 1241-1258.
- [4] F. Boyer, P. Fabrie 2006 Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles, Springer.
- [5] K. Kunisch, S. Volkwein 2001 Galerkin Proper Orthogonal Decomposition methods for parabolic problems, Numer. Math., 90 : pp. 117-148.
- [6] N. Nguyen, G. Rozza, P. Huynh, A. Patera 2010 Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for parametrized parabolic PDEs ; application to real-time bayesian parameter estimation, Large-Scale Inverse Problems and Quantification of Uncertainty, 8 : pp. 151-178.



(a)



(b)

FIGURE 2 – (a) : Evolution de  $\ln \left( \|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)} \right)$  en fonction de  $\ln(|\lambda - \lambda_0|)$ , pour  $N$  fixe (ligne pointillée) et erreur théorique (ligne verte). (b) : Evolution de  $\ln \left( \|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)} \right)$  en fonction de  $\ln(|\text{Re} - \text{Re}_0|)$ , pour  $N$  fixe (ligne pointillée) et erreur théorique (ligne verte).