HAL
open science

Modélisation continue de la vidange d'un silo granulaire

Lydie Staron, Pierre-Yves Lagrée, Stéphane Popinet

To cite this version:

Lydie Staron, Pierre-Yves Lagrée, Stéphane Popinet. Modélisation continue de la vidange d'un silo granulaire. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03440491

HAL Id: hal-03440491

https://hal.science/hal-03440491v1

Submitted on 22 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation continue de la vidange d'un silo granulaire

L. Staron [a,b], P.-Y. Lagrée [a], S. Popinet [c]

a. *CNRS - Université P. et M. Curie Paris 6, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France*

b. *School of Earth Sciences, University of Bristol, Queens Road, Bristol BR8 1RJ, United Kingdom.*

c. *National Institute of Water and Atmospheric Research, PO Box 14-901 Kilbirnie, Wellington, New Zealand*

Résumé :

La matière granulaire est bien connue pour sa capacité à s'écouler comme un fluide visqueux ou à résister au cisaillement comme un solide, passant d'un état à l'autre sur une distance de quelques diamètres de grains seulement. Ces propriétés rhéologiques complexes sont peut-être illustrées le mieux lors de la vidange d'un silo, pendant laquelle écoulement rapide, cisaillement lent et équilibre statique co-existent à chaque instant. Cela fait du silo une configuration redoutable pour tester la modélisation continue de la matière granulaire. Dans cette contribution, nous implémentons une rhéologie plastique (la loi "mu(I)" [9]) dans un solveur Navier-Stokes à deux dimensions, et simulons la décharge d'un silo granulaire continu, du début à la fin de la vidange. Ce faisant, nous retrouvons un comportement en accord avec l'observation expérimentale. Les points forts et les faiblesses du modèle continu sont discutés à la lumière de simulations numériques discrètes.

Abstract :

Granular matter is well-known for its ability to flow like a viscous fluid or resist shear stress like a solid, and evolving from one state to the other over a distance of a few grain diameters. This behavior is well illustrated during the discharge of a silo, where coexist a rapid dilute flow in the vicinity of the outlet, dense slower shear in the higher parts of the bulk, and static regions at the bottom of the container. Because of the specificity of its behavior, the granular silo is a stringent test for continuum modeling of granular matter. Implementing a plastic rheology (using the $\mu(I)$-flow-law [9]) in a two-dimensional Navier-Stokes solver, we simulate the continuum counterpart of the granular silo. Doing so, we observe a constant flow rate during the discharge and recover the Beverloo scaling. Discrete simulations are performed using the contact dynamics algorithm. Systematic comparison of the velocity field and the inner deformations shows a good agreement between the two approaches.

Mots clefs : Modélisation continue ; modélisation discrète ; rhéologie

1 Introduction

La matière granulaire est bien connue pour sa capacité à s'écouler comme un fluide visqueux ou à résister au cisaillement comme un solide, passant d'un état à l'autre sur une distance de quelques diamètres de grains seulement. Ces propriétés rhéologiques complexes sont peut-être illustrées le mieux lors de la vidange d'un silo, pendant laquelle écoulement rapide, cisaillement lent et équilibre statique co-existent à chaque instant. Au delà de ses vastes applications industrielles, la phénoménologie de la vidange du silo granulaire est en soit intrigante, et a suscité un intérêt soutenu de la part de la communauté scientifique. Pour des ouvertures étroites, les grains forment des arches avec une probabilité qui dépend de la taille de l'ouverture, et produisent un écoulement intermittent [1, 2]. Ce régime, non-accessible au modèle continu considéré ici, n'est pas étudié dans cette contribution. Pour de plus larges ouvertures, l'écoulement est continu ; cependant, contrastant avec la vidange d'un fluide Newtonien pour lequel le débit dépend de la hauteur de fluide présent dans le silo, la vidange

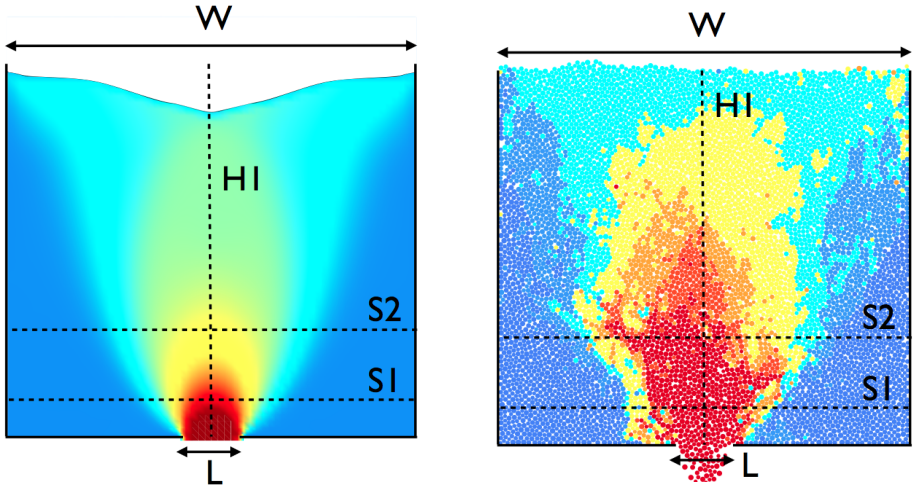

FIGURE 1 – Silo granulaire continu simulé par Gerris (gauche) et silo granulaire discret simulé par dynamique des contacts (droite) ; l'ouverture est L, la largeur W ; S_1 est le profil le long duquel la vitesse est analysée.

du silo granulaire implique un débit constant. Cette particularité est capturée par la loi de Beverloo [3, 4, 5] qui relie le débit Q à la taille de l'ouverture L suivant la relation (et à condition que L soit suffisamment large) :

$$Q = C\sqrt{g}(L - kd)^{N-1/2}, \tag{1}$$

où N est la dimension du problème, et C et k sont des constantes sans dimension. La constante k représente le volume d'exclusion du aux contraintes stériques résultant de la rigidité des grains, et réduisant la taille effective de l'ouverture ; une valeur typique est $k = 2$. La constante C est typiquement de 0.5 en 3D [3].
En utilisant la loi visco-plastique $\mu(I)$ [9], implémentée dans un solveur de Navier-Stokes à deux dimensions [10], nous tentons de simuler le silo granulaire de façon continue, en nous attachant à la phénoménologie typique décrite par la loi de Beverloo. Parallèlement, des simulations numériques discrètes sont réalisées par dynamique des contacts [14]. La comparaison systématique des champs de vitesse et de déformation montrent un bon accord entre les deux approches.

2 Silos numériques continus et discrets

Les simulations continues sont réalisées grâce au solveur de Navier-Stokes Gerris à deux dimensions [10]. L'équation de Navier-Stokes est résolue pour un mélange bi-phasique suivant une méthode Volume-Of-Fluid. La viscosité η associée au matériau granulaire est définie à partir des propriétés de frottement [9, 12, 13] :

$$\eta = \min\left(\frac{\mu P}{D_2}, \eta_{max}\right),$$

où μ est le coefficient de frottement effectif de l'écoulement granulaire, P est la pression locale, et D_2 est le second invariant du tenseur taux de cisaillement $\mathbf{D}$: $D_2 = \sqrt{2D_{ij}D_{ij}}$. Numériquement, la divergence de η est limitée par une borne supérieure η_{max}. La valeur de η_{max} est choisie de façon à valoir au moins 10^4 fois la valeur de η dans les zones d'écoulement rapide. L'existence d'une borne supérieure pour η implique que le matériau granulaire n'est jamais strictement statique : un fluage très lent persiste, mais à une échelle négligeable en regard du temps caractéristique nécessaire à la vidange d'un silo.
Les propriétés de frottement effectives μ du milieu granulaire continu sont calculées en utilisant la loi $\mu(I)$: μ est une fonction du nombre sans dimension $I = dD_2/\sqrt{P/\rho}$, où d est le diamètre moyen des grains et ρ la densité de l'empilement, suivant la relation : $\mu = \mu_s + \frac{\Delta\mu}{1+I_0/I}$ où μ_s, $\Delta\mu$, et I_0 sont des

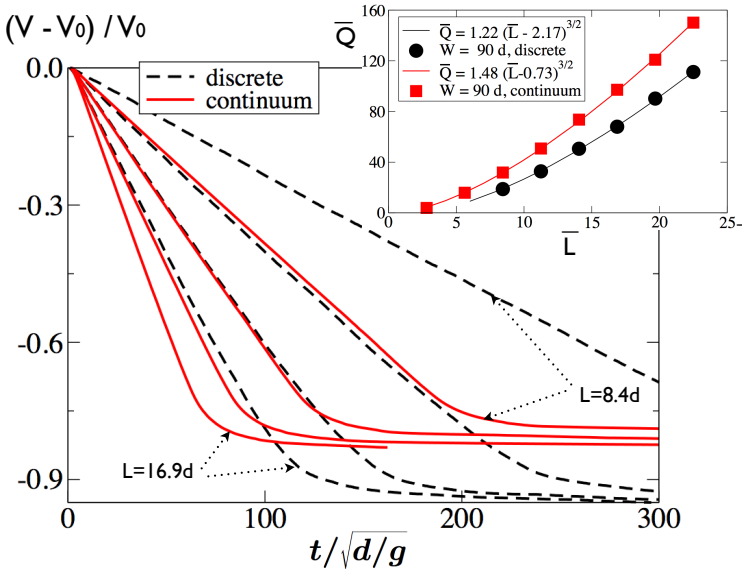

FIGURE 2 – Volume de matériau granulaire restant dans le silo (normalisé par le volume initial) en fonction du temps $t/\sqrt{d/g}$ pour les simulations discrètes (traits pointillés) et les simulations continues (traits pleins), pour des ouvertures de $L/d = 8.4$, 11.2, 14.1 et 16.9. Insert : Débit de la vidange renormalisé $\bar{Q} = Q/\sqrt{g}d^{3/2}$ en fonction de la taille de l'ouverture $\bar{L} = L/d$, et loi de Berverloo correspondante (voir équation (1)).

constantes [11, 9]. D'après [12], nous choisissons pour $\Delta\mu$ et I_0 respectivement les valeurs 0.28 and 0.4.

Les simulations discrètes sont réalisées grâce à l'algorithme de dynamique des contacts [14]. Les grains sont supposés infiniment rigides et satisfont à une condition de stricte non-interpénétrabilité au contact. Ils interagissent par frottement Coulombien ; de plus, un coefficient de restitution fixe la quantité d'énergie perdue lors des collisions. Dans les simulations présentées ci-après, la valeur du coefficient de restitution est fixée à 0.5, et celle du coefficient de frottement à 0.5. L'influence de ces deux paramètres sur les caractéristiques de l'écoulement n'est pas étudiée ici. Le système est mono-disperse.

La configuration d'écoulement étudiée par les deux méthodes de simulation, continue et discrète, est un silo à fond plat, de largeur W, de hauteur de remplissage initiale H et d'ouverture L (voir Figure 1). La largeur du silo est $W = 90d$ ou $W = 180d$, et la hauteur initiale est $H = 90d$. Dans le cas discret, les parois du silo sont lisses, et les contacts entre celles-ci et les grains présentent les mêmes propriétés que les contacts entre grains. Dans le cas continu, une condition de non-glissement est implémentée aux parois ; on peut montrer cependant que l'implémentation d'une condition de glissement libre n'affecte que très peu les résultats, le comportement moyen étant largement dominé par l'état local autour de l'ouverture. La pression à la surface libre et en sortie est imposée nulle.

3 La loi de Beverloo

La Figure 2 montre le volume de matériau restant dans le silo au cours du temps pour différentes valeurs de L, pour les simulations discrètes et continues. Dans tous les cas, nous observons une évolution linéaire traduisant un débit constant en sortie du silo, en accord avec l'observation expérimentale. Pour les valeurs des paramètres rhéologiques choisies pour les simulations continues et discrètes, sachant qu'aucun ajustement préalable n'a été opéré pour maximiser l'accord entre les deux approches, il est apparent que les débits pour une valeur donnée de L ne coincident pas. Cela n'est pas seulement le résultat, comme on pourrait l'attendre, de la différence d'ouverture effective due dans le cas discret à la rigidité des grains. En effet, faisant varier l'ouverture L entre $5.6d$ and $25.3d$, nous mesurons le

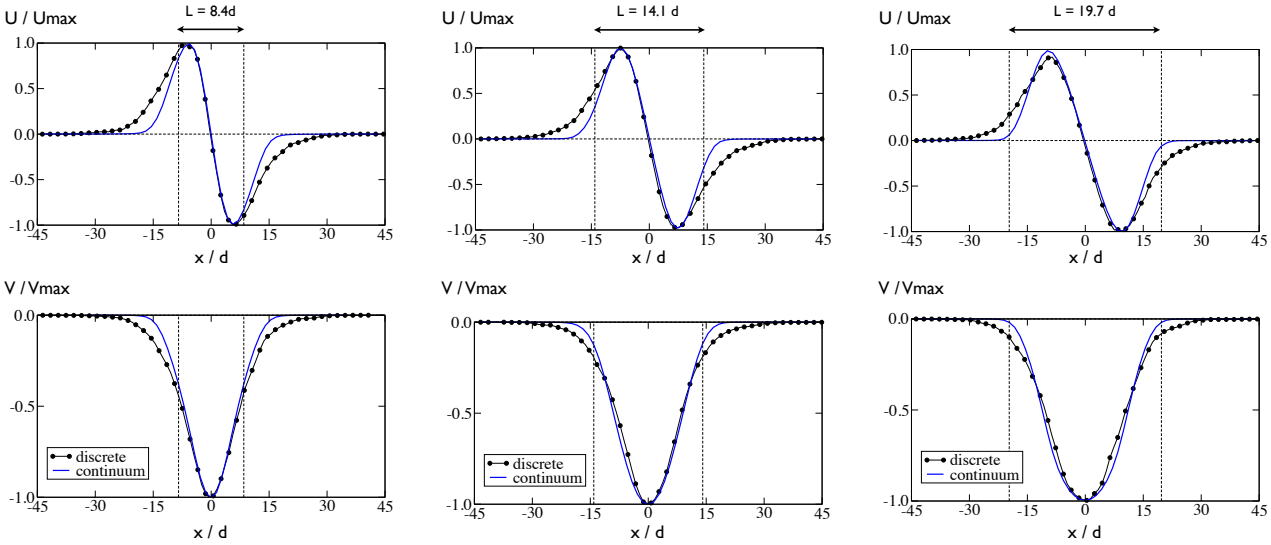

FIGURE 3 – Vitesses horizontale (U) et verticale (V) le long de la section S_1, normalisées par leur valeur maximale $U_{\max}$ et $V_{\max}$ respectivement, pour les silos granulaires discrets et continus, pour des ouvertures de taille $L = 8.4d$ (gauche), $L = 14.1d$ (centre) and $L = 19.7d$ (droite).

débit Q, et retrouvons dans les deux cas la loi de Beverloo, mais avec des préfacteurs différents :

$$Q = 1.22\sqrt{g}(L - 2.17d)^{3/2} \text{ dans le cas discret,}$$
$$Q = 1.55\sqrt{g}(L - 0.56d)^{3/2} \text{ dans le cas continu.}$$

Cependant, indépendemment de cette différence, les simulations continues du silo granulaire reproduisent parfaitement la phénoménologie de Beverloo.

4 Champs de vitesse et de déformation

Pour les valeurs des paramètres rhéologiques choisies pour les simulations continues et discrètes, aucun ajustement préalable n'ayant été opéré pour maximiser l'accord entre les deux approches, les débits pour une valeur donnée de L ne coincident pas. À ce stade, seule une comparaison qualitative du champ de vitesse est donc possible. Considérant les cas $L = 8.4d$, $L = 14.1d$ et $L = 19.7d$, nous comparons les vitesses horizontale U et verticale V pendant la période stationnaire de la vidange, normalisée par leur valeur maximum (c'est-à-dire la valeur de la vitesse en sortie) le long de la section horizontale S_1 située à une distance de $10d$ au dessus de l'ouverture (voir Figure 1). Le résultat est visible en Figure 3. Nous observons un accord qualitative raisonnable, particulièrement dans la zone de grande vitesse ; les zones de cisaillement plus lent, en revanche, révèlent une différence entre les deux approches, l'approche continue produisant un cisaillement plus localisé que l'approche discrète. La Figure 4 montre quatre clichés du champ de vitesse durant la vidange d'un silo discret et d'un silo continu de largeur $W = 180d$, avec $L = 16d$ dans le cas discret et $L = 16.8d$ dans le cas continu, suivant la même échelle de couleur (normalisée par la valeur maximum de la vitesse).
Pour le même système, la Figure 5 montre les déformations intérieures à différents instants, utilisant des traceurs de couleur pour suivre les trajectoires des particules (grains rigides ou volumes de fluide). La comparaison est faite aux mêmes instants $t/T_0 = 0.06, 0.17, 0.26$ et 0.62, où T_0 est la durée totale de la vidange. La forme de la surface libre montre des différences visibles, avec l'apparition d'une cuvette à la verticale de l'ouverture dans le cas continu, et absente dans le cas discret. L'accord général entre les deux approches reste cependant très bon.

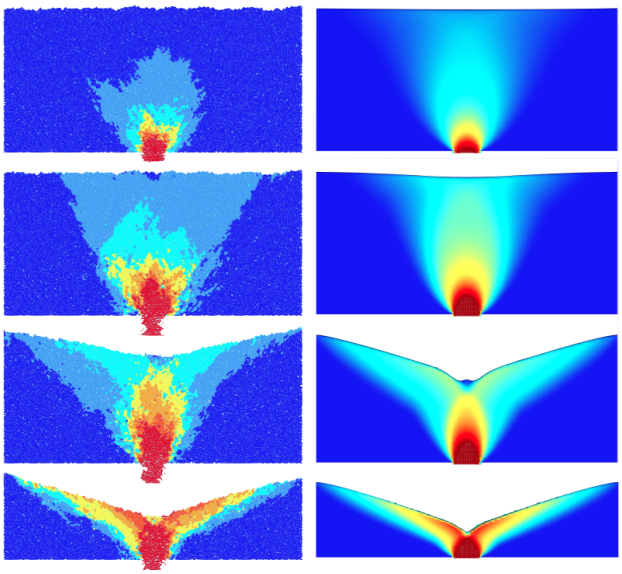

FIGURE 4 – Champ de vitesse pour un silo discret tel que $L = 16d$ (gauche) et un silo continu tel que $L = 16.8d$ (droite) à différents instants de la vidange. L'échelle de couleur est identique dans les deux cas, la vitesse étant normalisée par sa valeur maximum.

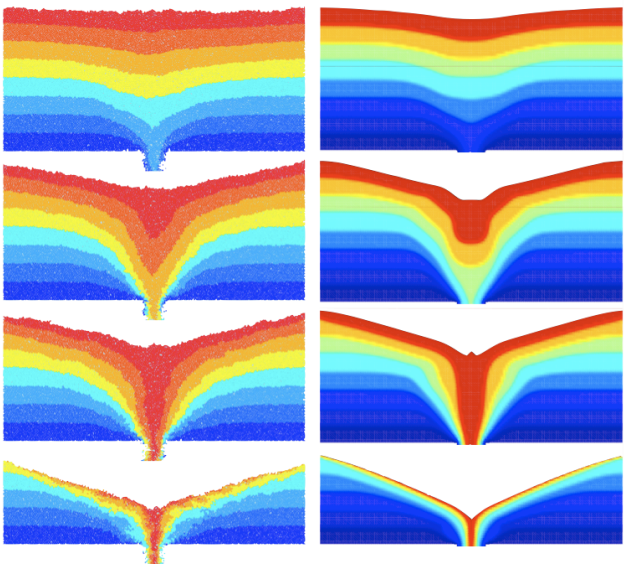

FIGURE 5 – Champ de déformation au cours de la vidange d'un silo discret que $L = 16d$ (gauche) et un silo continu tel que $L = 16.8d$ (droite), pour les instants $\bar{t} = t/T_0 = 0.06, 0.17, 0.26$ et 0.62, où T_0 est la durée de la vidange. Les différentes couleurs servent de traceurs.

5 Conclusion

Utilisant d'une part un solveur de Navier-Stokes dans lequel la loi $\mu(I)$ a été implémentée pour modéliser le comportement visqueux du milieu granulaire, et d'autre part, appliquant la méthode discrète de dynamique des contacts, la vidange de silos granulaires est simulée, du stade initial de la vidange à son complet achèvement. Les deux approches permettent de retrouver la loi de Beverloo observée expérimentalement, et traduisant l'existence d'un débit constant. La comparaison des champs de vitesse et de déformation suivant les deux approches est réalisée, et montre un bon accord qualitatif. Une étape ultérieure nécessaire est l'étude de l'influence de la valeur des paramètres rhéologiques utilisés pour les simulations continues, et le contrôle exercé par la géométrie du système, notamment sa taille.
À ce stade néanmoins, nous pouvons conclure que la capacité de la loi $\mu(I)$ à reproduire le comportement des silos granulaires est très encourageante.

Références

[1] T. Le Pennec, K. J. Måløy, E. G. Flekkøy, J. C. Messager, and M. Ammi, Silo hiccups : Dynamic effects of dilatancy in granular flow, Phys. Fluids **10**, 3072 (1998)

[2] A. Janda, R. Harich, I. Zuriguel, D. Maza, P. Cixous, and A. Garcimartín, Flow-rate fluctuations in the outpouring of grains from a two-dimensional silo, Phys. Rev. E **79**, 031302 (2009)

[3] W.A. Beverloo, H.A. Leniger, and J. van de Velde, The flow of granular solids through orifices, Chem. Eng. Sci. **15**, pp. 260-269 (1961)

[4] A. V. Potapov and C. S. Campbell, Computer simulation of hopper flow, Phys. Fluids **8**, 2884 (1996)

[5] M. A. Aguirre, J. G. Grande, A. Calvo, L. A. Pugnaloni, and J.-C. Géminard, Granular flow through an aperture : Pressure and flow rate are independent, Phys. Rev. E **83**, 061305 (2011)

[6] Janssen H.A., Zeitschr. Vereines Deutsch. Ing. **39**-35,1045 (1895)

[7] H. G. Sheldon and D. J. Durian, Granular discharge and clogging for tilted hoppers, Granular Matter **12**, 579-58 (2010)

[8] M. A. Aguirre, P. A. Gago, L. A. Pugnaloni, D. Le Tourneau, and J.-C. Géminard, Evolution of pressure profiles during the discharge of a silo, Phys. Rev. E **85**, 021303 (2012)

[9] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen, A rheology for dense granular flows. Nature **441**, 727-730 (2006).

[10] S. Popinet, Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries. J. Comput. Phys. **190**(2), 572-600 (2003).

[11] Gdr Midi , On dense granular flows Eur. Phys. J. E **14**-4, 341-365 (2004)

[12] P.-Y. Lagrée, L. Staron and S. Popinet, The granular column collapse as a continuum : validity of a two-dimensional Navier-Stokes model with a $\mu(I)$-rheology, J. Fluid Mech. **686**, pp 378-408 (2011).

[13] L. Staron, P.-Y. Lagrée and S. Popinet, The granular silo as a continuum plastic flow : The hour-glass vs the clepsydra, Phys. Fluids **24**(10), 113303 (2012)

[14] M. Jean and J.-J. Moreau, Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collections. In A. Curnier, (ed), Proc. of Contact Mech. Int. Symp., pp. 31-48 (1992).