



**HAL**  
open science

## Analyse spatiale du processus de localisation à l'aide des fonctions de Ripley

Vincent Lefort, David Grégoire, Laura Beatriz Rojas Solano, Peter Grassl,  
Gilles Pijaudier-Cabot

### ► To cite this version:

Vincent Lefort, David Grégoire, Laura Beatriz Rojas Solano, Peter Grassl, Gilles Pijaudier-Cabot. Analyse spatiale du processus de localisation à l'aide des fonctions de Ripley. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03439954

**HAL Id: hal-03439954**

**<https://hal.science/hal-03439954>**

Submitted on 22 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse spatiale du processus de localisation à l'aide des fonctions de Ripley

V. Lefort<sup>a</sup>, D. Grégoire<sup>a</sup>, L.B. Rojas Solano<sup>b</sup>, P. Grassl<sup>c</sup>, G. Pijaudier-Cabot<sup>a</sup>

a. LFC-R, Université de Pau et des Pays de l'Adour

b. SIAME, Université de Pau et des Pays de l'Adour

c. School of Engineering, University of Glasgow

## Résumé :

*Pour caractériser la rupture et l'endommagement des matériaux quasi-fragiles nous devons caractériser l'évolution spatiale de la zone d'élaboration des macro-fissures. Nous utilisons la méthode de Ripley qui permet l'analyse statistique des distances inter-événements de distributions spatiales de points.*

*Les distributions de points utilisées dans ce travail sont générées à l'aide d'un modèle numérique de type lattice représentant un essai de traction. Elles correspondent à la position des éléments du modèle qui ont été endommagés au cours d'un pas de calcul.*

*Nous montrons ainsi que l'endommagement, après une phase diffuse, se localise en certains lieux qui sont plus faibles en raison de leurs caractéristiques mécaniques ou de leur configuration géométrique. Cette localisation est accompagnée d'un arrêt de l'endommagement dans les zones situées sur un même axe de chargement.*

*Puis nous montrons également que le maximum de la courbe force/déplacement est concomitant avec la diminution brutale de la longueur caractérisant la dimension de la zone d'élaboration.*

## Abstract :

*In order to describe the degradation of quasi-brittle materials, we characterise the spatial evolution of the fracture process zone (FPZ). We use Ripley functions to perform a statistical analysis of the FPZ size. This method considers distances between points in a dataset of points. The dataset of points we use in this work is generated by a numerical lattice model representing a tensile test. Each point is a lattice element which has been damaged during a time step.*

*It is shown that it is possible to correlate characteristics in the Ripley function with the shape of the damaged zone and its width. After a diffuse phase, it is observed that damage localizes. The maximum of the force-displacement curve is concomitant with the decrease of the characteristic length of the FPZ obtained according to Ripley function.*

**Mots clefs :** Ripley ; FPZ ; endommagement

## 1 Introduction

La dégradation des matériaux quasi-fragiles se traduit par l'apparition de micro-fissures qui interagissent, évoluent et coalescent à l'intérieur de la zone d'élaboration également appelée fracture process zone (ou FPZ) pour former une macro-fissure. Mieux comprendre l'évolution spatiale de cette zone d'élaboration au cours d'un chargement est une des clefs pour mieux caractériser la rupture et l'endommagement des matériaux quasi-fragiles.

A chacune de ces étapes (apparition de la microfissuration, développement de la microfissuration, et localisation) nous cherchons à déterminer une longueur de corrélation qui caractérise la distance maximale d'interaction entre 2 lieux de microfissuration. L'analyse de ce phénomène requiert d'une

part des données d'entrée permettant déterminer les lieux de microfissuration au cours d'un essai, et d'autre part un outil statistique permettant d'associer une longueur de corrélation à une distribution de points.

Pour obtenir les lieux de microfissuration, nous utilisons un modèle numérique de type lattice [1]. Ce modèle est un modèle mésoscopique dont la particularité est de pouvoir représenter explicitement la micro-structure du matériaux (matrice, inclusions et interfaces). Une étude précédente a démontré l'aptitude de ce modèle à reproduire les résultats expérimentaux obtenus lors d'essais sur des poutres de béton en flexion trois points de tailles différentes, entaillées et non-entaillées. Il a également été montré qu'il peut reproduire fidèlement l'allure des histogrammes de distance inter-événements réalisés expérimentalement à partir de la localisation des évènements acoustiques [3].

Pour caractériser les longueurs de corrélation associées à une distribution de points dans l'espace, nous nous appuyons sur les fonctions de Ripley [2]. Ces fonctions statistiques sont des méthodes d'analyses de voisinage de second ordre qui considèrent toutes les distances entre les points de la distribution.

Nous commencerons donc par présenter les fonctions de Ripley, puis nous présenterons leur l'application pour l'étude de la localisation des macrofissures lors d'un essai de traction.

## 2 Analyse multi-échelle à l'aide des fonctions de Ripley

Lorsque nous considérons des cartes de points, telles que celles obtenues expérimentalement par localisation d'évènements acoustiques, il est nécessaire de caractériser la distribution spatiale à différentes échelles. En effet ces distributions peuvent apparaître localisées à l'échelle de l'échantillon, mais sont réparties aléatoirement si l'on considère une 'fenêtre' plus petite (cf. figure 1).

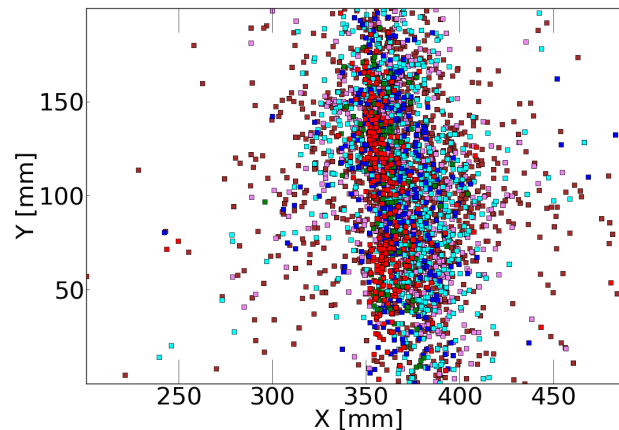


FIGURE 1 – Exemple de localisation des évènements acoustiques dans un échantillon au voisinage d'une macro-fissure lors d'un essai expérimental (d'après [3])

La méthode de Ripley est un outil permettant notamment de tester si une distribution de points comporte un caractère aléatoire. Mais nous utiliserons également ces fonctions pour comparer notre distribution à une distribution type dont nous connaissons les caractéristiques, à savoir une bande horizontale d'épaisseur  $h_b$ .

La fonction  $K$  de Ripley est telle que pour une longueur  $r$  donnée,  $\frac{n}{S} \times K(r)$  soit égal à la moyenne du nombre de points situés à une distance inférieure à  $r$  d'un autre point de la distribution, avec  $S$  la surface de l'échantillon considéré et  $n$  le nombre de points dans l'échantillon.  $K(r)$  est homogène à une surface. Sa valeur est déterminée par un inventaire exhaustif des interdistances suivant l'équation 1.

$$K(r) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (e(i,j) \times I(D(i,j) \leq r)) \quad (1)$$

avec

$$I(D(i, j) \leq r) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(i, j) \leq r \\ 0 & \text{si } D(i, j) \geq r \end{cases} \quad D(i, j) \text{ étant la distance entre les points } i \text{ et } j \quad (2)$$

Le paramètre  $e(i, j)$ , est un facteur de correction permettant d'éviter que les points situés près des bords, et donc possédant moins de voisins, ne faussent l'analyse.

Pour analyser plus aisément les résultats de la méthode de Ripley, nous utilisons la fonction résiduelle  $L(r) - r$  définie par l'équation 3. La valeur de cette fonction est proche de 0 lorsque la distribution de points est aléatoire.

$$L(r) - r = \sqrt{\frac{K(r)}{\pi}} - r \quad (3)$$

En adaptant l'expression des fonctions  $K(r)$  et  $L(r) - r$  au cas unidimensionnel il est également possible de calculer l'évolution des fonctions de Ripley pour la projection de la distribution de points considérée sur un axe donné.

En considérant des points regroupés dans une bande d'épaisseur  $h_b$  au sein d'une boîte de dimensions  $L \times H$  (cf. figure 2 (a)), il nous est possible de déterminer une expression approchée pour la fonction  $K(r)$ . Celle-ci est présentée en équation 4.

$$K(r) \approx \begin{cases} \frac{\pi H}{h_b} \left( r - \frac{r^2}{4h_b} \right)^2 & \text{si } r \leq h_b \\ 2rH & \text{si } r > h_b \end{cases} \quad (4)$$

La figure 2 (c) représente la comparaison entre la formule approchée et les résultats de 5 analyses réalisées respectivement avec 100 points disposés aléatoirement dans une bande de 5mm d'épaisseur.

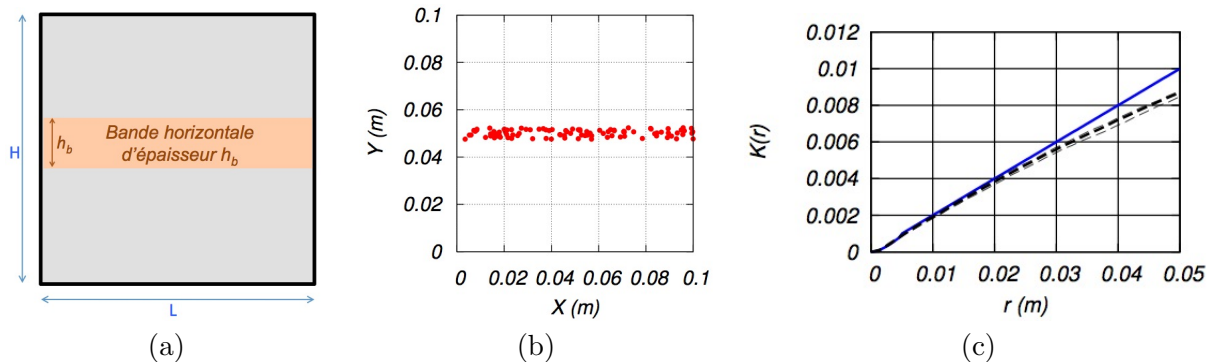


FIGURE 2 – Comparaison de la formule approchée avec une analyse réalisées sur des distributions de points : (a) distribution idéalisée (b) représentation d'une des 5 distributions discrètes avec  $h_b = 5mm$  (c) courbe approchée d'après l'équation 4 (trait continu) et résultats de l'analyse des 5 distributions discrète (en trait discontinu gras pour la moyenne et en traits discontinus fins pour les valeurs mini et maxi)

Nous notons, pour les grandes valeurs de  $r$ , un décalage important entre la formule approchée et le résultat de l'analyse des distribution de points. Ceci provient de la correction des effets de bords qui est prévue pour des phénomènes en deux dimensions, et qui n'est pas adaptée à un phénomène unidimensionnel tel qu'une bande de points.

### 3 Analyse d'un essai de traction à l'aide des fonctions de Ripley

Nous modélisons numériquement un essai de traction simple sur un parallélépipède de  $10\text{cm} \times 20\text{cm}$ . Le modèle est réalisé à l'aide des éléments lattice développés sous OOFEM.

Dans ce modèle 2D en contraintes planes, la structure est discrétisée sous forme de polygones indéformables jointifs. Toutes les déformations sont concentrées aux interfaces entre polygones. Nous considérons l'hypothèse des petits déplacements et petites rotations entre polygones. Ce type de modèle est appelé modèle lattice par référence aux poutres reliant les polygones et formant un treillis déformable.

Seule la partie centrale de l'échantillon est endommageable (cf. figure 3 (a)), Elle représente une surface de  $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ . La face supérieure de l'échantillon est soumise à un déplacement, entraînant une mise en tension de l'échantillon. Les principaux paramètres sont présentés dans la table 1.

Parametre	Description	Valeur
$E$	Module d'Young local (pour un élément du lattice)	$50\text{GPa}$
$\epsilon_0$	Seuil d'endommagement en déformation	$50.10^{-6}\text{m/m}$
$G_f$	Energie de fissuration	$150\text{J/m}^2$

TABLE 1 – Paramètres associés à l'essai de traction simple

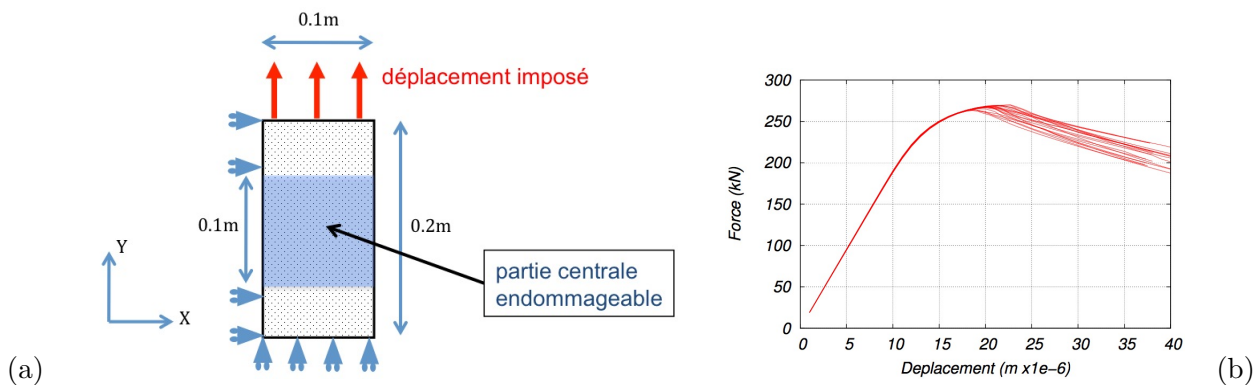


FIGURE 3 – (a) Géométrie du modèle de traction (b) Courbes force/déplacement issues des 20 calculs

Nous réalisons successivement 20 calculs différents. Les pas de chargement sont de  $1 \times 10^{-6}\text{m}$ , soit une déformation de  $5 \times 10^{-6}$ . Le calcul complet comprend 40 pas.

Pour chaque pas de calcul, nous identifions les points du modèle dont l'endommagement a augmenté au cours du pas. Nous construisons ainsi les cartes présentées en figure 4.

Sur la figure 4 nous présentons 3 instants caractéristiques du processus de localisation de l'endommagement. Nous rappelons au lecteur que les points représentent les lieux du modèle lattice où l'endommagement a augmenté au cours du pas de calcul considéré. (a) L'endommagement est d'abord diffus. Nous nous situons au pas de calcul n°12, c'est-à-dire juste après avoir dépassé le seuil d'endommagement des éléments. (b) L'endommagement commence alors à se localiser en certains lieux qui sont plus faibles en raison de leurs caractéristiques mécaniques ou de leur configuration géométrique, ce qui provoque l'arrêt de l'endommagement des autres points situés sur la même bande verticale. (c) L'endommagement est localisé sur quelques macrofissures. Nous nous situons au pas de calcul n°37, c'est-à-dire après le pic.

La figure 5 présente, pour les 3 distributions de la figure 4, la fonction de Ripley  $L(r) - r$  calculée en projection sur l'axe Y. Pour la distribution (a), la fonction de Ripley associée est quasi nulle ce qui caractérise une distribution aléatoire de l'endommagement. En (b) La fonction  $L(r) - r$  présente un pic au voisinage de  $r = 3\text{cm}$ . Ceci signifie que pour  $r < 3\text{cm}$  la densité de points est supérieure à la

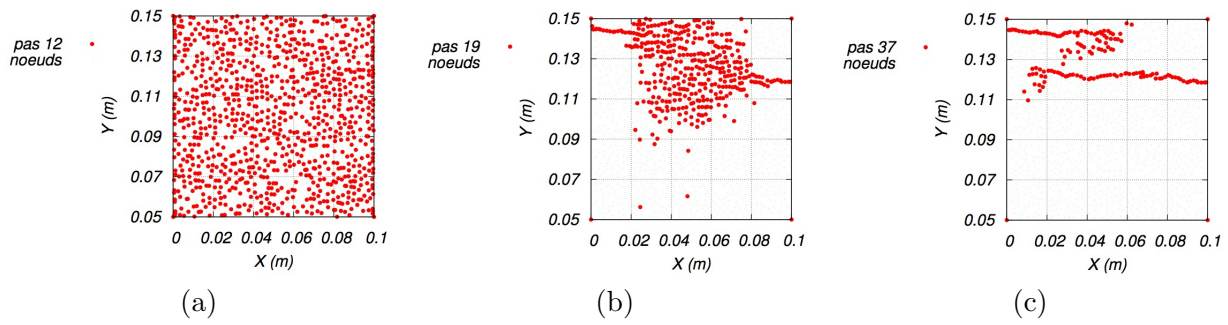


FIGURE 4 – Distribution spatiale des éléments dont l’endommagement a augmenté au cours du pas de calcul. Résultat pour un des 20 essais. (a) Pas de calcul n°12 (b) Pas de calcul n°19 (c) Pas de calcul n°37

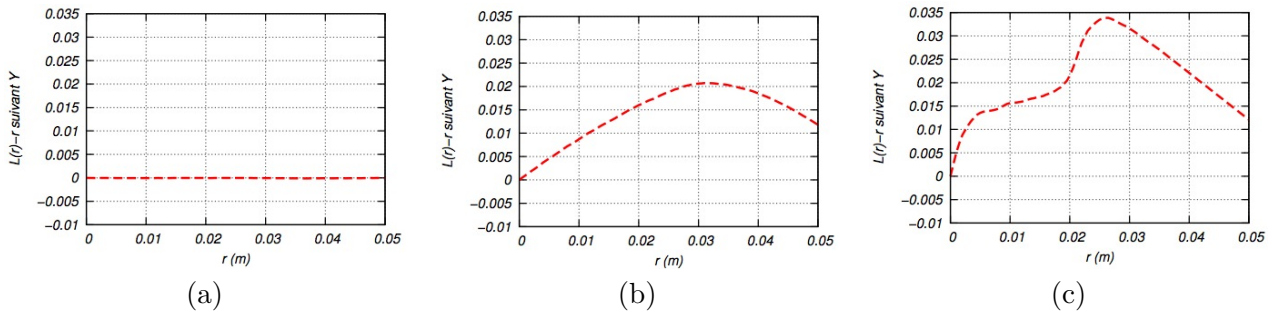


FIGURE 5 – Fonctions  $L(r) - r$  de Ripley calculées à partir de la projection de la distribution de points sur l’axe Y. (a) Pas de calcul n°12 (b) Pas de calcul n°19 (c) Pas de calcul n°37

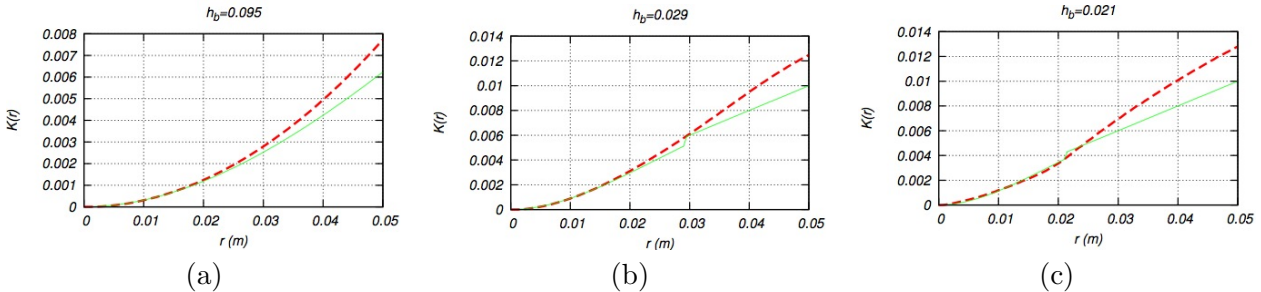


FIGURE 6 – Fonctions  $K(r)$  de Ripley calculées à partir de la distribution de points (en trait discontinu) et fonctions ajustées à partir du modèle bande d’épaisseur  $h_b$  (en trait continu). (a) Pas de calcul n°12 (b) Pas de calcul n°19 (c) Pas de calcul n°37

densité moyenne, tandis que pour  $r > 3cm$  la densité de points est plus faible que la densité moyenne. Il y a donc localisation. Enfin, en (c) la distribution comporte deux macrofissures espacées d’environ 2cm, ce comportement est capturé par la fonction de Ripley qui comporte bien deux régimes distincts.

A l’aide du modèle de bande défini plus haut, nous déterminons la hauteur de bande équivalente associée à chaque distribution. La figure 6 présente pour les 3 distributions de la figure 4 la fonction de Ripley  $K(r)$ , la fonction ajustée et la hauteur de bande équivalente ainsi déterminée. Nous observons en (a) que la hauteur de bande correspond à la hauteur de la zone endommageable de l’échantillon (10cm), tandis qu’en (c) la hauteur endommageable est réduite à 2cm ce qui est équivalent à l’épaisseur moyenne des macrofissures observées.

Pour chacun des pas de calcul du chargement, nous traçons sur la figure 7 la moyenne des épaisseurs de

bandes ajustées issues des 20 calculs ainsi que la valeur minimale et la valeur maximale. Nous pouvons ainsi observer le phénomène de localisation progressif, qui comporte une chute brutale de l'épaisseur moyenne de bande endommagée pour un déplacement imposé de  $20 \times 10^{-6}m$ , c'est-à-dire au voisinage du pic de la courbe force/déplacement.

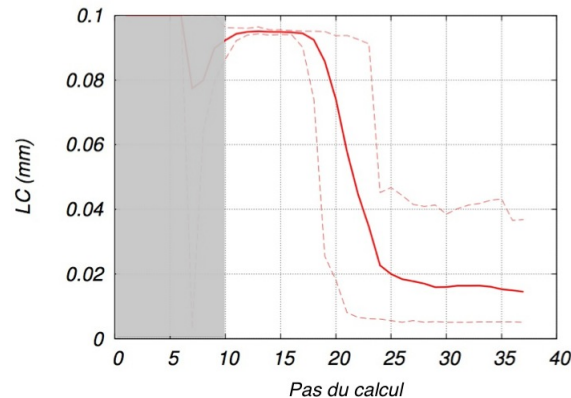


FIGURE 7 – Evolution, au cours du chargement, de l'épaisseur de bande ajustée sur la fonction  $K(r)$ . La partie grisée correspond aux pas de calculs pour lesquels le nombre de points dans la distribution est trop faible pour que les résultats soient significatifs.

## 4 Conclusions

Le modèle lattice utilisé nous a permis d'identifier plusieurs distributions spatiales de l'endommagement au cours du phénomène de localisation. Son couplage avec une analyse statistique basée sur les fonctions de Ripley nous a permis de réaliser l'analyse statistique de la grande quantité d'information pouvant être extraite avec de tels modèles. Nous pouvons ainsi caractériser l'évolution d'une longueur caractéristique tout au long du chargement. L'utilisation des fonctions de Ripley pour l'analyse spatiale de l'endommagement des matériaux quasi-fragiles homogènes est peu décrite dans la littérature et constitue donc une nouvelle approche pour la caractérisation du processus de localisation tout au long du chargement.

Par la suite cette analyse sera reconduite sur des données obtenues par localisation des émissions acoustiques lors d'essais expérimentaux de traction afin de comparer les résultats avec ceux du modèle numérique.

## 5 Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le Mésocentre de Calcul Intensif Aquitain pour la mise à disposition du cluster AVAKAS.

## Références

- [1] Grassl, P., Grégoire, D., Rojas Solano, L., Pijaudier-Cabot, G. 2012 Meso-scale modelling of the size effect on the fracture process zone of concrete *International Journal of Solids and Structures* **9(13)** 1818-1827
- [2] Ripley, B.D. 1977 Modelling spatial patterns *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* **39(2)** 172-212
- [3] Rojas Solano, L. 2012 Endommagement non-local, interactions et effets d'échelle *Université de Pau et des Pays de l'Adour* PhD thesis