



HAL
open science

Instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants

Mondher Bouteraa, Aurélie Kalck, Chérif Nouar, Christel Metivier,
Emmanuel Plaut

► **To cite this version:**

Mondher Bouteraa, Aurélie Kalck, Chérif Nouar, Christel Metivier, Emmanuel Plaut. Instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03439913

HAL Id: hal-03439913

<https://hal.science/hal-03439913>

Submitted on 22 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Instabilités thermo-convectives de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants

M. BOUTERAA^a, C. NOUAR, A. KALCK, C. MÉTIVIER, E. PLAUT

a. LEMTA - UMR 7563 CNRS - Université de Lorraine

2, Avenue de la Forêt de Haye, B 160, 54504 Vandoeuvre-Lès-Nancy, France.

Résumé :

Nous présentons une analyse linéaire et faiblement non linéaire des instabilités thermo-convectives de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants. Notre objectif est d'étudier l'influence du glissement à la paroi et de la variation non linéaire de la viscosité avec le taux de cisaillement sur la nature de la bifurcation et l'intensité de convection. L'équation de Navier est utilisée pour décrire le glissement avec frottement à la paroi. Le comportement rhéologique du fluide est décrit par le modèle Carreau. L'analyse faiblement non linéaire est conduite pour les trois motifs susceptibles d'apparaître au seuil de la convection : rouleaux, carrés et hexagones. Les résultats obtenus montrent que : (i) le glissement à la paroi a un effet déstabilisant et conduit à des structures de longueurs d'onde plus grandes ; (ii) la rhéofluidification favorise le développement d'une bifurcation sous critique et (iii) le coefficient de transfert de chaleur augmente lorsque les effets rhéofluidifiants sont plus marqués.

Abstract :

We present a linear and a weakly nonlinear analysis of Rayleigh-Bénard thermo-convective instabilities for shear-thinning fluids. The objective is to examine the influence of the slip boundary conditions and the nonlinear variation of the viscosity with the shear-rate on the nature of the bifurcation and the convection intensity. Navier slip boundary conditions are used. The Carreau model is adopted to describe the rheological behavior of the fluid. The weakly nonlinear analysis is performed for the three patterns that may emerge at the onset of convection, i.e. rolls, squares and hexagons. The obtained results show that : (i) the slip boundary conditions have a destabilizing effect and lead to patterns with larger wave length ; (ii) shear-thinning effects favor a subcritical bifurcation and (iii) the heat transfer coefficient increases with increasing shear-thinning effects.

Mots clefs : Rayleigh-Bénard, fluides rhéofluidifiants, bifurcation

1 Introduction

La convection de Rayleigh-Bénard est un cas d'école classique pour l'étude de la transition graduelle du laminaire au turbulent. Cette transition est bien sûr gouvernée par les termes non linéaires existants dans les équations de conservation. Dans le cas d'un fluide non-Newtonien, une non linéarité supplémentaire apparaît dans l'équation constitutive qui décrit le comportement rhéologique du fluide. Il est alors naturel de se poser la question de l'influence de la non-linéarité du modèle rhéologique sur le processus de transition vers la turbulence. Pour répondre à cette question, un programme de recherche a été mis au point. Le premier jalon de ce programme de recherche est consacré à une analyse de Rayleigh-Bénard au voisinage des conditions critiques pour des fluides non Newtoniens purement visqueux. C'est l'objet de la présente communication. Au delà de cet aspect fondamental, les problèmes de convection pour des fluides complexes interviennent dans de nombreux procédés industriels, en particulier ceux rencontrés dans l'industrie agro-alimentaire.

1.1 Description du Problème

Considérons un fluide rhéofluidifiant confiné entre deux plaques horizontales infinies séparées d'une distance \hat{d} . La plaque inférieure est portée à la température $\hat{T}_0 + \Delta\hat{T}$ et la plaque supérieure à la température \hat{T}_0 avec $\Delta\hat{T} > 0$. Les parois sont supposées être parfaitement conductrices de la chaleur. Si la différence de température est suffisamment faible, le transfert thermique s'effectue par conduction et le fluide reste au repos. La solution est hydrostatique et le profil vertical de la température est linéaire :

$$\frac{d\hat{P}}{d\hat{z}} = \hat{\rho}_0 \left[1 - \hat{\beta} (\hat{T} - \hat{T}_0) \right] \quad \text{et} \quad \hat{T}_{cond} - \hat{T}_0 = \Delta\hat{T} \left[1 - 2\hat{z}/\hat{d} \right], \quad (1)$$

où $\hat{\rho}$ est la densité de fluide, $\hat{\beta}$ le coefficient de dilatation thermique et \hat{z} la coordonnée verticale dont l'origine est située sur la plaque inférieure. Lorsque la différence de température dépasse une valeur critique, le temps caractéristique associé au déplacement d'une particule fluide par la force de poussée devient beaucoup plus faible que celui associé à la dissipation visqueuse et la diffusion thermique. La convection se déclenche avec l'émergence de motifs qui peuvent se présenter sous forme de rouleaux, carrés ou hexagones. Le mouvement de convection introduit du cisaillement et de l'élongation qui vont réduire et modifier le champ de viscosité. La réduction de la viscosité par le caractère rhéofluidifiant va intensifier la convection et peut modifier la nature de la bifurcation. En outre, la non-linéarité introduite par le modèle rhéologique va agir sur la compétition entre les motifs de convection. Dans cette étude, il est aussi nécessaire de tenir compte d'un éventuel glissement à la paroi. Pour les fluides Newtoniens, composés de petites molécules, le glissement est pratiquement inexistant. Dans le cas des fluides complexes, tels que les solutions de polymères, ou les suspensions de particules, un glissement aux parois peut apparaître. Ce glissement peut être induit par exemple par des effets de déplétion, qui conduisent à l'apparition de couche fluide adjacente à la paroi, moins concentrée en particules et donc de viscosité plus faible. Il est clair que ce phénomène aura des conséquences, au moins sur le déclenchement de l'instabilité.

1.2 Brève revue bibliographique

Les instabilités thermo-convectives du type Rayleigh-Bénard pour des fluides non-Newtoniens ont fait l'objet de peu d'articles comparativement au cas Newtonien. Dans le cas de fluides purement visqueux non-Newtoniens, plusieurs auteurs ont montré que le caractère rhéofluidifiant augmentait l'intensité de la convection et favorisait le développement d'une bifurcation sous critique, on cite en particulier, Lamsaadi *et al.*[1], Balmforth et Rust [2] et Elbaalbaki et Khayat [3]. Il subsiste néanmoins, un désaccord sur les valeurs des paramètres rhéologiques à partir desquelles la bifurcation devient sous critique qui n'ont d'ailleurs été calculés que dans le cas d'un glissement sans frottement. Pour ce qui est de la compétition entre les différents motifs de convection, nous avons trouvé un seul article [3] et qui ne concerne que le cas d'un glissement sans frottement.

1.3 Objectifs

Nous avons revisité le problème de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants purement visqueux, avec comme objectifs : (i) déterminer les paramètres rhéologiques à partir desquels la bifurcation devient sous critique avec des approches analytique et numérique ; (ii) examiner l'influence du caractère rhéofluidifiant sur le nombre de Nusselt et (iii) analyser la compétition entre les différents motifs de convection en utilisant la conjecture du transfert de chaleur maximal qui stipule que la structure observée est celle pour laquelle le transfert de chaleur est le plus important [4].

2 Équations gouvernant le problème

En utilisant les échelles caractéristiques $\hat{d}^2/\hat{\kappa}$, \hat{d} , $\hat{\kappa}/\hat{d}$ et $\Delta\hat{T}$, respectivement de temps, de distance, de vitesse et de température et en adoptant l'approximation de Boussinesq, les équations aux perturbations

sous forme adimensionnelle sont données par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = -\nabla p + Ra\theta \mathbf{e}_z + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z + \nabla^2 \theta, \quad (4)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est le vecteur vitesse, $p(\mathbf{x}, t)$ est la perturbation de la pression et $\theta(\mathbf{x}, t)$ est la perturbation de la température $\theta = (\hat{T} - \hat{T}_{cond}) / \Delta \hat{T}$, $\mathbf{x} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$. Le problème fait intervenir deux paramètres adimensionnels, le nombre de Rayleigh Ra et le nombre de Prandtl Pr , définis par :

$$Ra = \frac{\hat{\rho}_0 \hat{g} \hat{\beta} \Delta \hat{T} \hat{d}^3}{\hat{\kappa} \hat{\mu}_0} \quad ; \quad Pr = \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{\kappa}}. \quad (5)$$

\hat{g} est l'accélération de la pesanteur, $\hat{\kappa}$ la diffusivité thermique, $\hat{\rho}_0$ la densité du fluide à la température de référence \hat{T}_0 , $\hat{\mu}_0$ la viscosité du fluide à viscosité à cisaillement nul. Généralement, pour les fluides non-Newtoniens purement visqueux, le temps de diffusion visqueuse est beaucoup plus court que celui de diffusion thermique ($Pr \gg 1$). Pour ce qui est du comportement rhéologique, le modèle de Carreau-Bird [5] est adopté :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\Gamma) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{avec} \quad \mu = (1 + \lambda^2 \Gamma)^{\frac{n_c - 1}{2}}, \quad (6)$$

où $0 < n_c < 1$ est l'indice de rhéofluidification, λ un temps caractéristique adimensionnel du fluide. Γ est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \quad ; \quad \Gamma = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}. \quad (7)$$

Dans l'équation (6), il a été supposé implicitement, que la viscosité du fluide pour des grandes valeurs de cisaillement, $\hat{\mu}_\infty$ peut être négligée par rapport à la viscosité calculée à cisaillement nul. Cette hypothèse est largement adoptée dans la littérature [6] et ne modifie en rien les conclusions de cette étude. L'existence d'une perturbation en vitesse induit une perturbation en cisaillement qui elle même se traduit par une perturbation en viscosité. Cette dernière est décrite grâce à un développement limité de Taylor autour de l'état de base où $\mu_b = 1$ (l'indice b désigne l'état de base) :

$$\mu = 1 + \mu_1(\mathbf{u}) + \mu_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mu_3(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \dots \quad (8)$$

Compte tenu du fait que l'état de base correspond à un fluide au repos, l'expression de μ_j peut être simplifiée :

$$\mu_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est impair} \\ \frac{1}{(j/2)!} \left[\frac{\partial^{j/2} \mu}{\partial \Gamma^{j/2}} \right]_{\Gamma=0} \Gamma^{j/2} & \text{si } j \text{ est pair} \end{cases} \quad (9)$$

Conditions limites :

Sur les deux parois, nous avons adopté la loi de Navier qui stipule que la vitesse horizontale est proportionnelle à la contrainte tangentielle via un coefficient empirique P_G qu'on appelle paramètre de glissement. La composante verticale de la vitesse étant nulle aux parois :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad , \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = P_G \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = P_G \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}, \quad (10)$$

où \mathbf{n} , \mathbf{t} et \mathbf{b} sont respectivement le vecteur normal, tangent et bitangent aux parois. Pour la température, les plaques sont isothermes, ce qui se traduit par :

$$\theta = 0 \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1. \quad (11)$$

Finalement, les équations aux perturbations sont réécrites en appliquant le rotationnel et deux fois le rotationnel. La pression est ainsi éliminée. On obtient des équations aux perturbations en termes de la composante verticale de la vitesse w et de la composante verticale de la vorticit e ξ .

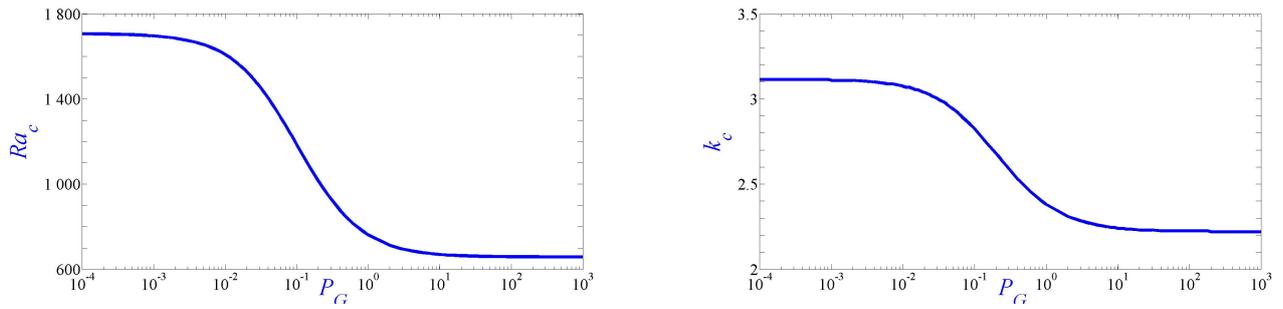


FIGURE 1 – Nombre de Rayleigh et nombre d'onde critiques en fonction du paramètre de glissement P_G .

3 Analyse linéaire de stabilité

Dans l'approche linéaire, les perturbations sont supposées infinitésimales et les termes non linéaires peuvent être négligés dans les équations aux perturbations. De manière classique. Nous cherchons des solutions sous forme de modes normaux :

$$\begin{bmatrix} w(x, y, z, t) \\ \theta(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(z) \\ G_{11}(z) \end{bmatrix} f(x, y) \exp(st), \quad (12)$$

où s est la valeur propre temporelle, $s = s_r + is_i$, et $f(x, y)$ satisfait l'équation de Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0. \quad (13)$$

Dans cette équation, k représente le module du vecteur d'onde horizontal \mathbf{k} . En substituant l'expression (12) dans les équations aux perturbations linéarisées, on aboutit au système d'équations différentielles suivant :

$$s(D^2 - k^2)F_{11} = ikRaPrG_{11} + Pr(D^2 - k^2)^2 F_{11}, \quad (14)$$

$$sG_{11} = ikF_{11} + (D^2 - k^2)G_{11}. \quad (15)$$

D désigne la dérivée par rapport à z . Les conditions aux limites associées sont :

$$w = 0 \quad ; \quad Dw - P_G D^2 w = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, \quad (16)$$

$$w = 0 \quad ; \quad Dw + P_G D^2 w = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, \quad (17)$$

Le système d'équations différentielles (14)-(15) est discrétisé par une méthode pseudospectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebychev. Le problème aux valeurs propres généralisé obtenu est résolu sous Matlab. Les valeurs propres sont réelles, $s_i = 0$, en accord avec le principe d'échange de stabilité. Sur la figure 1 nous avons représenté la variation de Ra_c et k_c en fonction du paramètre de glissement P_G . Le nombre Rayleigh critique diminue de 1707.76 pour $P_g = 0$ (adhérence) à $27\pi^4/4 = 657.56$ pour P_G très grand (glissement sans frottement). Le glissement à la paroi a donc un effet déstabilisant. La longueur d'onde (taille des structures) augmente de pratiquement $2\hat{d}$ en situation d'adhérence à $2\sqrt{2}\hat{d}$ en situation de glissement parfait. Ces résultats sont en parfait accord avec ceux obtenus par Webber [8] et Kuo et Chen [9]. Les résultats numériques montrent aussi, que les situations de glissement parfait et d'adhérence sont obtenues pour $P_G \geq 10$ et $P_G \leq 10^{-2}$ respectivement.

4 Analyse faiblement non linéaire

Pour un paramètre de glissement donné, le nombre de Rayleigh critique, déterminé à partir de l'analyse linéaire de stabilité, fait intervenir le nombre d'onde k_c , indépendamment de l'orientation du vecteur

d'onde \mathbf{k} . Cette dégénérescence est une conséquence de l'isotropie du plan horizontal supposé infini. En outre, toute combinaison linéaire de modes de la forme $C_p \exp(i \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}) (F_{11}(z), G_{11}(z))^t$ avec $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$, $\mathbf{k}_p = k_c$ et C_p coefficients constants est aussi solution du problème linéaire et a le même seuil d'instabilité. En d'autres termes, il y a une dégénérescence vis à vis des motifs de convection. S'il n'y a pas de direction privilégiée, le plan horizontal sera pavé par des motifs réguliers, lorsque le nombre de Rayleigh dépasse la valeur critique. Par une analyse de symétrie, il est montré que ces motifs ne peuvent être que des rouleaux, carrés ou hexagones. La configuration qui sera observée est dictée par les termes non linéaires. Au voisinage de Ra_c , une analyse faiblement non linéaire peut être utilisée pour prédire la structure qui serait observée. Pour cela w et θ sont développées en séries de puissance de l'amplitude A :

$$w(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^N [A_p(t) \exp(i \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})] F_{11}(z) + \text{termes correctifs}, \quad (18)$$

$$\theta(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^N [A_p(t) \exp(i \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})] G_{11}(z) + \text{termes correctifs}, \quad (19)$$

La configuration $N = 1$ correspond à des motifs de convection sous forme de rouleaux, $N = 2$ à des carrés et $N = 3$ à des hexagones. Les coefficients $A_p(t)$ satisfont l'équation d'amplitude qui s'écrit par exemple dans le cas d'hexagones sous la forme :

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{\epsilon}{\tau_0} A_1 + [\zeta |A_1|^2 + \delta (|A_2|^2 + |A_3|^2)] A_1 + \dots, \quad (20)$$

où $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$ et τ_0 est le temps caractéristique du développement de l'instabilité thermoconvective, déterminé à partir de l'analyse linéaire de stabilité. Des expressions similaires à (20) sont obtenues pour A_2 et A_3 en utilisant des permutations circulaires des indices. La substitution des expressions (18) et (19) dans les équations aux perturbations conduit à un système d'équations différentielles qui permettent de déterminer de manière séquentielle les termes correctifs. De plus amples détails sur la procédure sont donnés dans [7]. En utilisant l'équation d'amplitude et l'alternative de Fredholm, les coefficients ζ et δ peuvent être déterminés. On montre que ces coefficients peuvent être écrits sous la forme d'une somme de deux termes. Le premier serait similaire à celui qu'on obtiendrait en Newtonien, le deuxième fait ressortir le caractère rhéofluidifiant :

$$\zeta = \zeta_{Newt} + \alpha \zeta_{nNewt} \quad ; \quad \delta = \delta_{Newt} + \alpha \delta_{nNewt} \quad \text{avec} \quad \alpha = - \left[\frac{\partial \mu}{\partial \Gamma} \right]_{\Gamma=0} = \frac{1-n}{2} \lambda^2. \quad (21)$$

Le paramètre α peut être vu comme une "mesure" du degré de rhéofluidification. La bifurcation est surcritique lorsque $\zeta + \delta > 0$ et sous critique dans le cas contraire. La valeur critique α_c à partir de laquelle la bifurcation passe de sur-critique à sous-critique est donnée par :

$$\alpha_c = - \frac{\zeta_{Newt} + \delta_{Newt}}{\zeta_{nNewt} + \delta_{nNewt}}, \quad (22)$$

La figure 2(a) montre pour $Pr = 10$, les variations de α_c en fonction du paramètre de glissement P_G selon que les motifs de convection sont des rouleaux, carrés ou hexagones. Il est intéressant de noter que α_c est plus faible en adhérence qu'en glissement parfait. Ceci pourrait être attribué à une plus grande réduction de la viscosité par le cisaillement pariétal, inexistant en glissement parfait. A titre indicatif, dans le cas des rouleaux et en situation de glissement parfait, un calcul analytique a été effectué et donne le même résultat que celui obtenu numériquement.

La figure 2(b) donne pour $Pr = 10$, la variation du nombre de Nusselt, défini par le rapport entre le flux total de chaleur transmis au fluide et le flux transmis dans le cas purement conductif, en fonction du nombre de Rayleigh réduit ϵ en situation d'adhérence et de glissement parfait et pour deux motifs de convection : rouleaux et carrés. Les calculs ont été conduits jusqu'à l'ordre cinq en amplitude. Les paramètres rhéologiques n_c et λ sont ajustés pour que $\alpha = 0.2\alpha_c$. Il convient d'abord de noter

que le nombre de Nusselt et donc le mouvement de convection est plus important en situation de glissement qu'en situation d'adhérence. D'autres résultats indiquent que Nu augmente avec le caractère rhéofluidifiant. A partir de $\epsilon = 0.05$ en adhérence et 0.2 en glissement parfait, le transfert de chaleur est meilleur pour des carrés que pour des rouleaux. D'après la conjecture du transfert de chaleur maximal, les motifs de convection observés seraient des carrés.

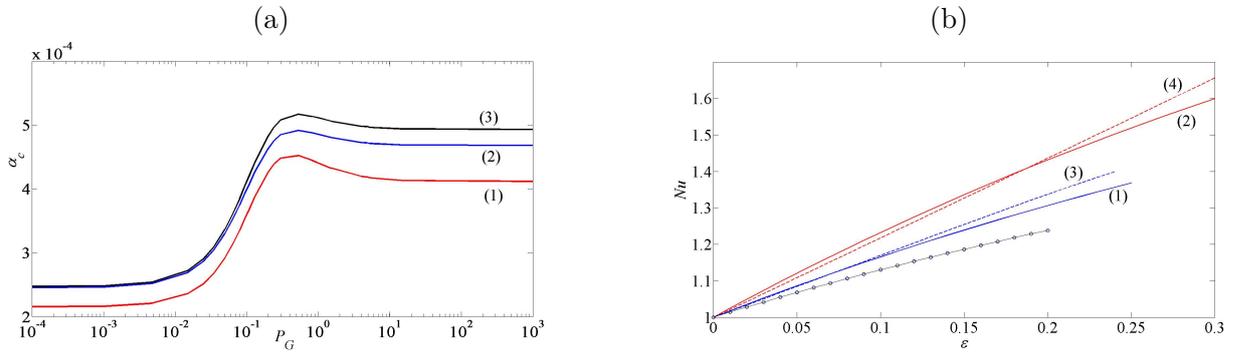


FIGURE 2 – (a) Variation de α_c en fonction du paramètre de glissement P_G pour différents motifs de convection. (1) Rouleaux, (2) Carrés et (3) Hexagones. (b) Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh réduit ϵ pour un fluide de Carreau avec $\alpha = 0.2\alpha_c$. (1) rouleaux en adhérence; (2) rouleaux en glissement parfait; (3) carrés en adhérence et (4) carrés en glissement parfait. (o) Corrélation proposée par Schlüter *et al.*[10] pour un fluide Newtonien et dans le cas motifs sous forme de rouleaux, (trait continu fin) notre calcul.

5 Conclusion

Nous avons déterminé les valeurs des paramètres rhéologiques à partir desquelles la bifurcation passe de surcritique à sous-critique. Nous avons analysé la compétition entre deux motifs de convection rouleaux et carrés à partir de la conjecture du transfert de chaleur maximal. Nous poursuivons l'analyse de la compétition entre les différents modes de convection à partir de l'équation d'amplitude et de la conjecture citée précédemment.

Références

- [1] Lamsaadi, M., Naimi, M., Hasnaoui, M. 2005 Natural convection of non-Newtonian power-law fluids in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated from below. *Heat. Mass. Transfer.* **41** 239-249.
- [2] Balmforth, N. J., Rust, R. C. 2009 Weakly nonlinear viscoplastic convection.. *J. non-Newtonian. Fluid. Mech.* **158** 36-45.
- [3] Albaalabaki, B., Khayat, R. 2011 Weakly nonlinear viscoplastic convection. *J. Fluid. Mech.* **668** 500-550.
- [4] Malkus, V. W. R., Veronis, G. 1958 Finite amplitude cellular convection. *J. Fluid. Mech.* **4** 225-260.
- [5] Carreau, J.P. 1972 Rheological equations from molecular network theories. *J. Rheol.* **16** 99-127.
- [6] Tanner, R. 2000 Engineering rheology. Oxford University Press, New York.
- [7] Chekila, A., Nouar, C., Plaut, E., Nemdili, A. 2011 Subcritical bifurcation of shear-thinning plane Poiseuille flows. *J. Fluid. Mech* **686** 272-298.
- [8] Webber, M. 2006 The destabilizing effect of boundary slip on Bénard convection. *Math. Meth. Appl. Sci.* **29** 819-838.
- [9] Kuo, S., Chen, P. H. 2009 Effects of slip boundary conditions on Rayleigh-Bénard convection. *J. Mech.* **25** 205-212.
- [10] Schlüter, A., Lortz, D., Busse, F. 1965 On the stability of steady finite amplitude convection. *J. Fluid. Mech.* **23** 129-144.