



HAL
open science

Stabilité linéaire de l'écoulement de convection mixte et thermocapillaire d'un film liquide sur un plan horizontal chauffé uniformément par le bas

Lahcen Bammou, Serge Blancher, Yves Le Guer, Kamal El Omari, Brahim Benhamou

► To cite this version:

Lahcen Bammou, Serge Blancher, Yves Le Guer, Kamal El Omari, Brahim Benhamou. Stabilité linéaire de l'écoulement de convection mixte et thermocapillaire d'un film liquide sur un plan horizontal chauffé uniformément par le bas. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03439791

HAL Id: hal-03439791

<https://hal.science/hal-03439791>

Submitted on 22 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilité linéaire de l'écoulement de convection mixte et thermocapillaire d'un film liquide sur un plan horizontal chauffé uniformément par le bas

L. Bammou^a, S. Blancher^a, Y. LE GUER^a, K. EL OMARI^a et B. Benhamou^b

^a Laboratoire SIAME, Fédération IPRA-CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA), 64075 Pau Cedex, France.

^b Laboratoire LMFE (CNRST-URAC27), Université Cadi Ayyad - Dépt. de Physique, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech 40001, Maroc.

Résumé :

Nous présentons une analyse de stabilité linéaire d'un écoulement de convection mixte d'un film liquide sur un plan horizontal chauffé uniformément par le bas. La méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev a été employée pour résoudre le système aux valeurs propres du problème. Cette analyse de stabilité a permis d'obtenir les diagrammes de stabilité caractérisant les seuils de perte de stabilité de l'écoulement vis à vis des rouleaux longitudinaux et des rouleaux transversaux ainsi que la forme des structures spatiales de l'écoulement. Par comparaison avec l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard, très étudié dans la littérature, la présence de la surface supérieure libre rend l'écoulement toujours plus instable.

Abstract :

We present a linear stability analysis of a mixed convection flow of a liquid film on a horizontal plane heated uniformly from below. Spectral collocation method based on Chebyshev polynomials has been used to solve the system eigenvalue problem. This stability analysis gives the stability diagrams characterizing the the stability thresholds of the flow towards the longitudinal and transverse rolls and also the form of flow spatial structures. Compared with the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flow, extensively studied in the literature, the presence of the free surface makes the flow more unstable.

Mots clefs : convection mixte ; effet Marangoni ; stabilité linéaire

1 Introduction

Les instabilités thermiques dans les écoulements de films liquides sont rencontrées dans de nombreux phénomènes naturels et procédés industriels. Citons à titre d'exemple le refroidissement par écoulement de films liquides, les échangeurs de chaleur compacts, la réalisation de dépôts et de revêtements par séchage de solutions polymère/solvant. Une bonne connaissance de ces processus et de leurs conditions opératoires est nécessaire pour permettre l'amélioration des transferts thermiques mis en jeu. Plusieurs études d'instabilité pourtant sur la convection mixte ont été réalisées dans le cas de canaux à parois rigides chauffées par le bas, qui portent également le nom d'écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard [1, 2]. L'apparition d'un écoulement secondaire, sous la forme de rouleaux longitudinaux pour des conduites d'extension infinie, a lieu autour du nombre critique de Rayleigh $Ra_c = 1708$ [3]. Le diamètre de ces rouleaux est à peu près égale à la hauteur du canal. Gage et Reid [1], Platten [4] et Luijckx et al. [5] ont eux aussi démontré l'existence des rouleaux thermoconvectifs transversaux instationnaires dont les axes sont perpendiculaires à l'écoulement principal. Le nombre de Rayleigh critique correspondant à l'apparition de ces rouleaux transversaux a été trouvé comme étant une fonction du rapport de la forme du canal et aussi du nombre de Prandtl. Une revue bibliographique de travaux effectués

dans ces configurations est présentée par Nicolas [6]. Quand une surface libre de liquide est présente, la variation de la tension superficielle avec la température peut induire un mouvement à l'intérieur du fluide, appelé effet thermocapillaire ou effet Marangoni [7]. Dans un précédent travail [8], nous avons montré que l'introduction de l'effet thermocapillaire sur la convection mixte modifie le sens de la rotation des rouleaux près des parois latérales du canal et influence favorablement le transfert de chaleur.

La présente étude s'intéresse à l'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement laminaire de convection mixte d'un film liquide sur un plan horizontal chauffé uniformément par le bas. La variation de la tension de surface avec la température (effet Marangoni) est prise en compte. Dans cette configuration plusieurs types de structures thermoconvectives sont susceptibles d'apparaître [8]. Nous nous intéressons à deux modes d'instabilité thermoconvective qui donnent naissance à des rouleaux longitudinaux ou à des rouleaux transversaux. Les rouleaux transversaux apparaissent pour des écoulements à faible nombre de Reynolds. La méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev a été employée pour résoudre le système aux valeurs propres du problème. Nous cherchons à fournir les diagrammes de stabilité caractérisant les seuils de perte de stabilité de l'écoulement vis à vis de ces deux modes d'instabilité et l'étude de leur variation avec les paramètres de contrôle de l'écoulement. La forme des structures spatiales de l'écoulement est présentée.

2 Description et formulation du problème

Nous considérons l'écoulement d'un film liquide dans un canal rectangulaire horizontal de hauteur H , d'extension transversale et longitudinale infinies. L'origine du système de coordonnées (x, y, z) est placée à mi-hauteur de la couche liquide. La configuration étudiée est représentée sur la Figure 1. Ce film liquide est chauffé par le bas (température maintenue à T_c) tandis que la surface libre échange de la chaleur avec l'air ambiant à température T_0 (coefficient d'échange h supposé uniforme). Le fluide est

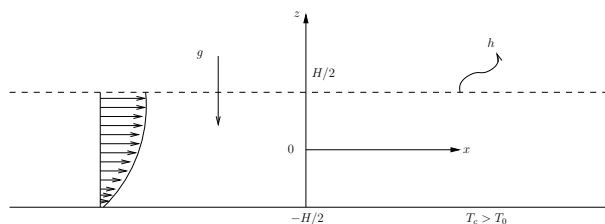


FIGURE 1 – Représentation schématique de la configuration d'étude et des conditions aux limites.

supposé newtonien, incompressible et en écoulement laminaire. Les propriétés thermophysiques sont considérées constantes à l'exception de la masse volumique dans le terme de la flottabilité et de la tension de surface. La variation de la masse volumique est approchée par l'hypothèse de Boussinesq : $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$. La variation de la tension de surface est modélisée par une fonction linéaire de température : $\sigma = \sigma_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial T}(T - T_0)$ où σ_0 est la tension de surface à la température T_0 . En adoptant la demi-hauteur du film liquide $H/2$, la vitesse moyenne U_m , la pression dynamique ρU_m^2 , la différence de température $T_c - T_0$, et $H/2U_m$ comme échelles caractéristiques respectivement pour la longueur, la vitesse, la température et le temps, les équations adimensionnalisées décrivant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \frac{2}{Re} \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \frac{Ra}{2PrRe^2} \theta \vec{k} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \theta = \frac{2}{PrRe} \vec{\nabla}^2 \theta \quad (3)$$

Ainsi les paramètres adimensionnels qui apparaissent dans les équations sont : le nombre de Reynolds $Re = \frac{U_{moy} H}{\nu}$, le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{g\beta(T_c - T_0)H^3}{\nu\alpha}$ et le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$.

A la paroi inférieure, la vitesse $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ satisfait la condition de non-glissement et la paroi est parfaitement conductrice ($\theta = 1$). A la surface libre, la vitesse verticale est nulle ($V_z = 0$) et l'équilibre entre les forces de tension de surface et les contraintes visqueuses dans le fluide donnent les conditions sur V_x et V_y : ($\frac{\partial V_x}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial X}$ et $\frac{\partial V_y}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial Y}$) avec $Ma = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\Delta T H}{\mu \alpha}$ et $Pe = \frac{U_m H}{\alpha}$ sont respectivement les nombres de Marangoni et de Péclet. La condition thermique à la surface libre est $\frac{\partial \theta}{\partial Z} = -\frac{Bi}{2} \theta$ avec Bi le nombre de Biot défini par $Bi = \frac{hH}{\lambda}$ où λ est la conductivité thermique du film liquide.

En régime dynamique et thermique établis, l'écoulement de l'état de base est unidirectionnel, i.e. $V_y = V_z = 0$. La vitesse se réduit à la seule composante V_x et le profil de la température θ est purement conductif. Ainsi, les profils de la vitesse et de la température de l'écoulement de base sont :

$$\overline{\theta(Z)} = \frac{2 + Bi}{2(Bi + 1)} - \frac{Bi}{2(Bi + 1)} Z \quad (4)$$

$$\overline{U(Z)} = -\frac{3}{8}(Z^2 - 2Z - 3) \quad (5)$$

Nous supposons des perturbations infinitésimales sous forme d'une combinaison de modes normaux qui prennent la forme suivante :

$$(V'_x, V'_y, V'_z, P', \theta') = (\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z, \hat{P}, \hat{\theta}) e^{i(k_x X + k_y Y - \sigma t)} \quad (6)$$

où k_x et k_y correspondent respectivement aux nombres d'onde longitudinal et transversal. σ est la pulsation complexe.

L'analyse de stabilité linéaire des équations (1, 2, 3) conduit à deux équations différentielles linéaires en fonction de la perturbation de la vitesse verticale V_z et de la perturbation de la température réduite θ .

$$\frac{2}{Re}(D^2 - k^2)^2 \hat{V}_z = i[(k_x \bar{V} - \sigma)(D^2 - k^2) - k_x D^2 \bar{V}] \hat{V}_z + \frac{Ra}{2PrRe^2} k^2 \hat{\theta} \quad (7)$$

$$-i\sigma \hat{\theta} + ik_x \bar{V} \hat{\theta} + \hat{V}_z D \bar{\theta} = \frac{2}{PrRe}(D^2 - k^2) \hat{\theta} \quad (8)$$

Les conditions aux limites associées à ces deux équations sont :

$$\hat{V}_z = 0, \quad D\hat{V}_z = 0, \quad \hat{\theta} = 0 \quad \text{at } Z = -1 \quad (9)$$

$$\hat{V}_z = 0, \quad D^2 \hat{V}_z + k^2 \frac{Ma}{Pe} \hat{\theta} = 0, \quad D\hat{\theta} + \frac{Bi}{2} \hat{\theta} = 0 \quad \text{at } Z = 1 \quad (10)$$

où $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ et $D = \partial/\partial Z$.

L'équation différentielle linéaire d'ordre 4 (Eq. 7) représente l'équation classique d'Orr-Sommerfeld lorsque $Ra = 0$. Cette équation constitue avec l'équation (Eq. 8) et les conditions aux limites (Eq. 9) et (Eq. 10) un problème aux valeurs propres.

3 Résolution numérique et validation

Le problème aux valeurs propres est obtenu en utilisant la méthode spectrale de collocation Chebyshev. Cette méthode est basée sur la discrétisation spatiale des fonctions inconnues (\hat{V}_z et $\hat{\theta}$) selon Z par les polynômes d'interpolation de Chebyshev, de telle sorte qu'ils soient localisés aux points de Gauss Lobatto définis par : $Z_j = \cos(\pi j/N)$ avec $j = 0, 1, \dots, N$. Le code de calcul est mis en oeuvre à l'aide de MATLAB et le nombre de points de discrétisation est fixé à $N = 131$. Nous avons procédé en deux étapes pour valider le code de calcul. Pour la première étape, nous avons validé l'implémentation des équations (Eq. 7) et (Eq. 8) pour un cas qui correspond à l'écoulement de PRB [9]. Pour la deuxième étape, nous avons validé l'implémentation des conditions aux limites (Eq. 9) et (Eq. 10) pour un cas qui correspond à la convection de Marangoni [9]. Dans le cas de l'écoulement de PRB, nos résultats sont en bon accord avec la littérature [6] et montrent que l'écoulement de base devient instable vis-à-vis des rouleaux longitudinaux quand le nombre de Rayleigh dépasse la valeur critique $Ra_c = 1707, 8$.

Le nombre d'onde critique correspondant est $k_y = 1,558$ (k_y étant adimensionné ici par $H/2$). Nous présentons sur la Figure 2 l'évolution de Ra_c pour l'apparition des rouleaux transversaux en fonction du nombre de Reynolds. La comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par Nicolas et al. [2] permet de valider la précision du code de calcul vis-à-vis des instabilités se développant sous forme de rouleaux transversaux. La deuxième validation concerne la convection de Marangoni dans une couche de fluide infinie chauffée uniformément par le bas. La Figure 3 montre la courbe de stabilité marginale de la convection de Marangoni en fonction du nombre d'onde k pour un nombre de Biot $Bi = 2$. Nos résultats sont en bon accord avec ceux donnés analytiquement par Pearson [10].

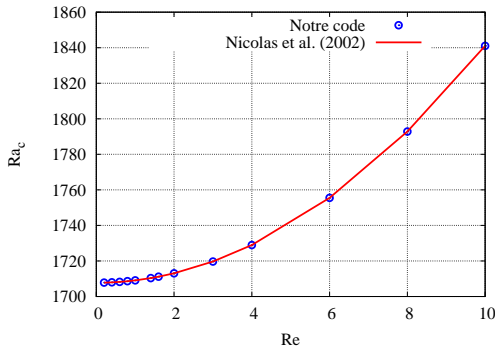


FIGURE 2 – Evolution du nombre de Ra_c d'apparition des rouleaux transversaux en fonction de Re pour un écoulement de PRB. Comparaison avec les résultats numériques obtenus par [2] ($Pr = 1$).

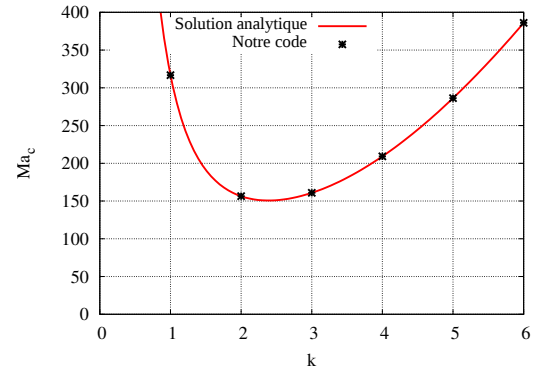


FIGURE 3 – Comparaison des résultats numériques obtenus pour la courbe de stabilité marginale avec la solution analytique [10] pour $Ra = 0$, $Bi = 2$ et $Pr = 7$.

4 Résultats

Dans cette étude nous nous intéressons à deux types d'instabilité : instabilité qui se développe sous la forme de rouleaux longitudinaux stationnaires (pour $k_x = 0$, $k_y \neq 0$ et $\sigma_r = 0$) et instabilité qui se développe sous la forme de rouleaux transversaux instationnaires (pour $k_x \neq 0$, $k_y = 0$ et $\sigma_r \neq 0$). Nous présentons sur les Figures 4 et 5 l'évolution des paramètres critiques (Ra_c et Ma_c) de l'apparition des rouleaux longitudinaux et transversaux en fonction du nombre de Biot Bi dans le cas de la convection thermogravitaire pure et dans le cas de la convection thermocapillaire pure. Nous observons que pour $Bi = 0$, l'écoulement est toujours stable. En effet, pour $Bi = 0$ la surface libre est supposée adiabatique, ainsi la température de l'état de base devient alors constante le long de l'axe vertical Z ($\theta(Z) = 1$). Dans le cas de la convection thermogravitaire pure, lorsque le nombre de Biot augmente, le nombre de Rayleigh critique diminue fortement puis augmente faiblement pour tendre vers une valeur asymptotique égale à $Ra_c = 1097$. Cela peut s'expliquer par la condition à la limite thermique de la surface libre qui affecte les perturbations de la température dans l'ensemble du fluide. En effet, pour les petites valeurs de Bi , ces perturbations sont très sensibles à la variation d'échange de chaleur au niveau de la surface libre. Pour les grandes valeurs de Bi , la condition à la limite thermique à la surface libre peut être assimilée à une condition de température constante imposée, ce qui fait que Ra_c tend vers une valeur asymptotique ($Ra_c = 1097$). Dans le cas de la convection thermocapillaire pure, le nombre de Marangoni critique diminue fortement puis augmente linéairement avec Bi . En effet, pour les faibles valeurs de Bi , les gradients de température à la surface supérieure sont favorisés, ce qui favorise les effets thermocapillaires et le déclenchement rapide d'instabilités thermoconvectives. Cependant, pour les grandes valeurs de Bi , les gradients de température à la surface libre deviennent de plus en plus faibles, ce qui a pour conséquence d'augmenter le nombre de Marangoni critique linéairement avec Bi . Dans le cas de la convection thermogravitaire pure, nous remarquons aussi que les rouleaux transversaux sont plus stables par rapport aux rouleaux longitudinaux quel que soit Bi . Le nombre Ra_c d'apparition des rouleaux longitudinaux est toujours inférieur au nombre

Ra_c d'apparition des rouleaux transversaux. Lorsque les instabilités sont induites par la convection thermocapillaire pure, le nombre Ma_c est presque le même pour les deux types d'instabilité pour des nombres de Reynolds faibles, tandis que pour des grand nombres de Reynoldes, les rouleaux longitudinaux apparaissent d'abord surtout pour les grandes Bi . Nous présentons dans le Tableau

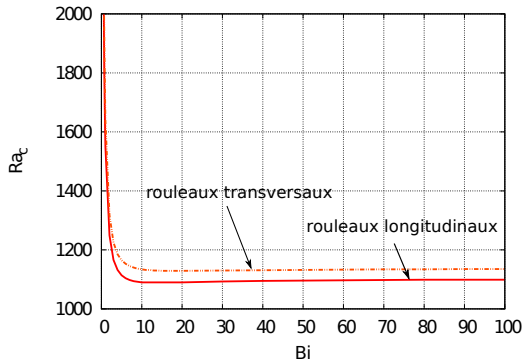


FIGURE 4 – Evolution du nombre de Ra_c d'apparition des rouleaux en fonction du nombre de Biot ($Re = 15$ et $Ma = 0$).

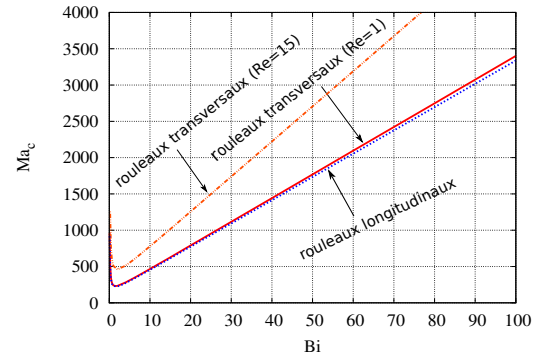


FIGURE 5 – Evolution du nombre de Ma_c d'apparition des rouleaux en fonction du nombre de Biot pour $Re = 1$ et $Re = 15$.

1 une comparaison du nombre de Rayleigh critique et du nombre d'onde associé à l'apparition des rouleaux longitudinaux pour l'écoulement de PRB et pour notre cas d'étude. Nous remarquons que le nombre Ra_c de l'écoulement de PRB est plus grand que celui de l'écoulement de convection mixte avec surface libre. Ainsi, la surface supérieure rigide stabilise l'écoulement en retardant l'apparition des rouleaux longitudinaux. La présence d'une surface supérieure rigide augmente également le nombre d'onde critique ($k_y^c(PRB) > k_y^c$) ce qui signifie que dans le cas de l'écoulement de PRB, nous aurons un nombre plus important de rouleaux longitudinaux par rapport au cas de l'écoulement à surface libre.

	écoulement à surface libre ($Bi = 100$)	écoulement PRB
Ra_c	1097,0	1707,8
k_y^c	1,34	1,558

TABLE 1 – Comparaison des nombres de Ra_c et des nombres d'onde associés k_y^c pour l'apparition des rouleaux longitudinaux obtenus dans le cadre de cette étude avec ceux obtenus pour l'écoulement de PRB.

Les structures de l'écoulement à surface libre comparées à celles de l'écoulement de PRB sont représentées pour les rouleaux longitudinaux et transversaux, respectivement sur les Figure 6 et Figure 7. Nous observons que dans le cas de l'écoulement PRB, les rouleaux sont centrées à $Z = 0$ et ont un diamètre proche de la hauteur du canal alors que dans le cas de l'écoulement à surface libre, les rouleaux présentent le même diamètre voisin de la hauteur du canal, mais leurs centres sont décalés vers le haut. Les rouleaux transversaux dans le cas de l'écoulement à surface libre sont légèrement déformés, ils perdent leur symétrie par rapport à l'axe Z .

5 Conclusions

Dans le présent travail, nous avons étudié la stabilité de l'écoulement d'un film liquide sur un plan horizontal chauffé uniformément par le bas. Par comparaison avec l'écoulement de PRB, la présence de la surface libre déstabilise l'écoulement en accélérant l'apparition des rouleaux longitudinaux. Elle diminue également le nombre d'onde critique des rouleaux longitudinaux par rapport au cas de l'écoulement à surface rigide (PRB). Les structures de l'écoulement à surface libre prennent la forme

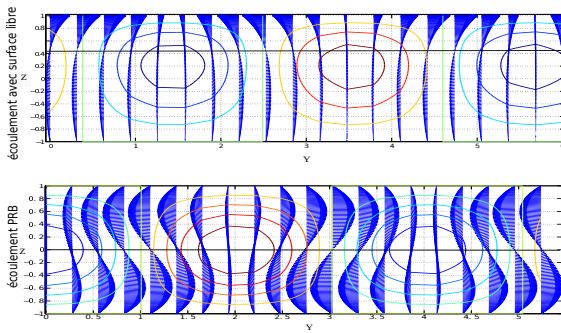


FIGURE 6 – Structure de l'écoulement (rouleaux longitudinaux) représentée par les modes critiques (\hat{V}_x, \hat{V}_z) (vecteurs) et $\hat{\theta}$ (contours) dans le cas de l'écoulement à surface libre et dans le cas de l'écoulement PRB.

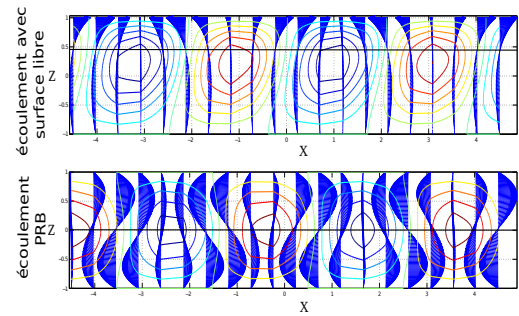


FIGURE 7 – Structure de l'écoulement (rouleaux transversaux) représentée par les modes critiques (\hat{V}_x, \hat{V}_z) (vecteurs) et $\hat{\theta}$ (contours) dans le cas de l'écoulement à surface libre et dans le cas de l'écoulement l'écoulement PRB.

de rouleaux contra-rotatifs dont le centre est plus décalé vers le haut par rapport à ceux observés dans l'écoulement de PRB.

Références

- [1] Gage, K. S. and Reid, W. H. 1968 The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics* **33** 21-32
- [2] Nicolas, X., Luijkx, J. M. et Platten, J. K. 2000 Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **33** 589-610
- [3] Akiyama, M., Hwang, G.J. et Cheng, K.C. 1971 Experiments on the onset of longitudinal vortices in laminar forced convection between horizontal plates. *Journal of Heat Transfer* **93** 335-341
- [4] Platten, J.K. 1971 A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients. *International Journal of Engineering Science* **9** 855-869
- [5] Luijkx, J.M., Platten, J.K. et Legros, J.C. 1981 On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow *International Journal of Heat and Mass Transfer* **24** 1287-1291
- [6] Nicolas, X. 2002 Bibliographical review on the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows : the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below. *International Journal of Thermal Sciences* **41** 961-1016
- [7] Davis, S.H. 1987 Thermocapillary instabilities *Annual review of fluid mechanics* **19** 403-435
- [8] Bammou, L., El Omari, K., Blancher, S., Le Guer, Y., Benhamou, B. et Mediouni, T. 2013 A numerical study of the longitudinal thermoconvective rolls in a mixed convection flow in a horizontal channel with a free surface. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, <http://dx.doi.org.rproxy.univ-pau.fr/10.1016/j.ijheatfluidflow.2013.01.017>
- [9] Bammou, L. 2012 Instabilité thermoconvective de l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni dans un canal ouvert à surface libre. *Thèse de doctorat* Université de Pau et des Pays de l'Adours.
- [10] Pearson, J. R. A. 1958 On convection cells induced by surface tension *Journal of Fluid Mechanics* **4** 489-500