

# Comportement effectif d'un milieu cohésif : critères pratiques

N. Blal<sup>a,b,c</sup>, L. Daridon<sup>a,c</sup>, Y. Monerie<sup>b,c</sup>, S. Pagano<sup>a,c</sup>

- a. Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Université Montpellier 2, CNRS, CC 048 Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier
- b. Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire, Bat. 702, CE Cadarache, BP3-13115 St. Paul-lez-Durance
- c. Laboratoire de Micromécanique et d'Intégrité des Structures, MIST, IRSN-CNRS-Université Montpellier 2

## Résumé :

*Dans cette étude, un ensemble de critères micromécaniques pour la calibration des lois cohésives est proposé. Le principe de la modélisation consiste à remplacer une discrétisation de type éléments finis par un milieu volumique continu et durcissant contenant une distribution d'inclusions cohésives. Le comportement global équivalent associé est obtenu par des techniques d'homogénéisation linéaires et non linéaires. Le modèle permet d'obtenir des relations directes entre les paramètres cohésifs et les propriétés effectives du matériau pour les comportements élastique, fragile et ductile. Une analyse inverse permet ainsi d'établir des critères pratiques pour la calibration des paramètres cohésifs et de rendre les modèles cohésifs insensibles à la taille de maille.*

## Abstract :

*In this note, a set of micromechanical criteria for the calibration of cohesive zones laws is proposed. A cohesive-volumetric finite element discretization is considered as a hardening continuum medium with embedded cohesive inclusions. The overall behavior of this composite is obtained with linear and non linear homogenization schemes. Direct relationships between the cohesive parameters and the overall material properties are derived for the elastic, brittle and ductile behaviors. An inverse analysis leads to practical criteria for the calibration of cohesive parameters making thus the overall cohesive behavior mesh-independent.*

**Mots clefs :** Micromécanique, Modèle de Zone Cohésive, Critères

## 1 Introduction

La méthode des Éléments Finis Cohésifs-Volumiques (EFCV) s'avère un outil numérique à la fois simple et efficace pour la simulation numérique des processus d'endommagement et de fissuration. Couplant la méthode des éléments finis et les modèles de zones cohésives (MZC) [1, 2], cette approche permet de suivre les mécanismes d'endommagement surfacique depuis l'amorçage des microfissures jusqu'à la rupture totale du matériau. Cependant, ces modèles présentent une forte dépendance au maillage et une difficulté de calibration des paramètres cohésifs. Ces aspects numériques et mécaniques restent grandement ouverts. Dans ce papier, un modèle micromécanique d'endommagement, issu d'une discrétisation cohésive-volumique de type éléments finis, est développé. L'ensemble des critères déjà obtenus pour l'élasticité (Eq. (4)) et la rupture fragile (Eq. (7)) est rappelé dans SECT. 3 et SECT. 4 respectivement [3, 4]. Ensuite le principe est étendu au cas d'un comportement ductile dans SECT. 5 (Eqs. (9), (10) et (11)).

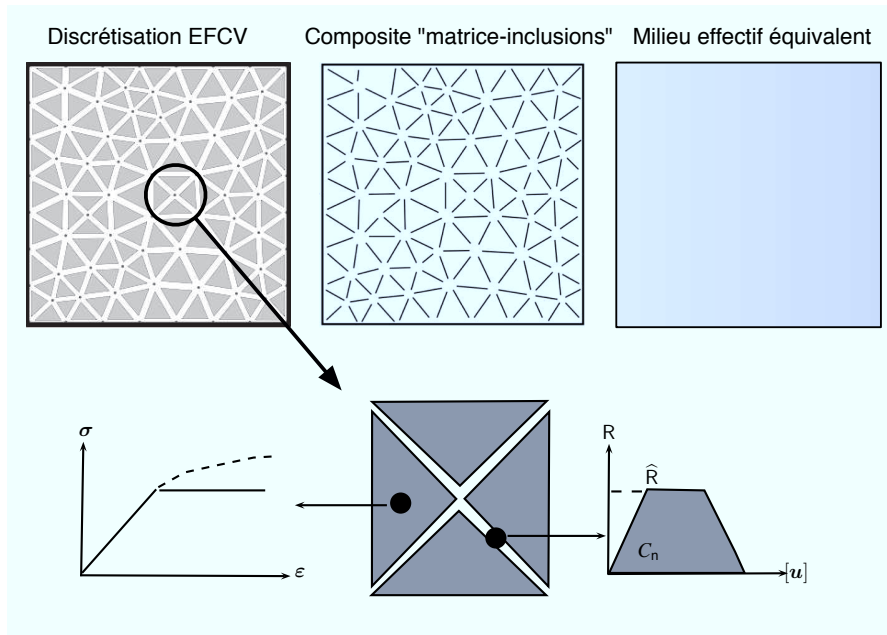


FIGURE 1 – Méthode EFCV et principe du modèle. En haut, le principe de l’approche [5] : une discrétisation cohésive-volumique (à gauche) est remplacée par un milieu homogène de même comportement que le comportement ”volumique”, i.e. des éléments finis, et contenant des inclusions lenticulaires distribuées et orientées aléatoirement de même comportement que le comportement ”cohésif”, i.e. des modèles de zone cohésive (au centre). Le comportement du milieu équivalent (à droite) est recherché par une technique d’homogénéisation. En bas, les lois de comportements : la loi de comportement du matériau est intégrée aux points de Gauss et le modèle cohésif au niveau des interfaces.

## 2 Le composite ”matrice-inclusions cohésives” (MIC)

On considère une discrétisation éléments finis de type cohésif-volumiques : des zones cohésives intrinsèques (i.e. avec une raideur initiale finie) sont insérées entre tous les éléments volumiques. La densité des interfaces cohésives, dénotée  $Z$ , correspond à la densité de maillage, i.e. le ratio entre la longueur (resp. la surface) totale des interfaces cohésives, notée  $|Z|$ , et la surface (resp. le volume) des éléments volumiques, notée  $|\Omega|$ , pour une configuration 2D (resp. 3D). Ainsi on a :  $Z = |Z|/|\Omega|$ . Le principe de la modélisation retenue, dû à [5], est illustré sur la FIGURE 1 : une discrétisation cohésive-volumique de type éléments finis est considérée comme un milieu continu homogène contenant une distribution d’inclusions. La discrétisation EFCV est considérée alors comme un composite ”matrice-inclusions cohésives” (MIC) . Le comportement associé à la matrice est donné par une loi de type puissance reliant la contrainte locale,  $\sigma$ , à la déformation locale,  $\varepsilon$ , à travers le tenseur d’élasticité  $\mathbb{C}^m$  (théorie de la déformation avec comportement isotrope) :

$$\sigma = \mathbb{C}^m : \varepsilon \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^m = 3k^m \mathbb{J} + 2\mu^m \left( 1 + \mathcal{H}(\varepsilon_{\text{eq}} - \varepsilon_0) \left( \left( \frac{\varepsilon_{\text{eq}}}{\varepsilon_0} \right)^{p-1} - 1 \right) \right) \mathbb{K}, \quad (1)$$

où  $k^m$  (resp.  $\mu^m$ ) est le coefficient de compressibilité (resp. cisaillement),  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$  sont les deux éléments de la base d’isotropie des tenseurs du quatrième ordre symétriques,  $\varepsilon_m$  (resp.  $\varepsilon_{\text{eq}}$ ) est la partie hydrostatique (resp. déviatorique) de la déformation,  $\varepsilon_0$  est une déformation de référence,  $p$  est un paramètre d’écrouissage ( $p = 0$  : plasticité parfaite,  $p = 1$  : élasticité, cf. FIGURE 2 à droite) et  $\mathcal{H}$  est la fonction de Heaviside. La loi cohésive reliant la contrainte cohésive  $\mathbf{R}^{\text{coh}}$  au vecteur saut de déplacement  $[\mathbf{u}]$  est de type intrinsèque (i.e. avec une raideur initiale finie  $\mathbf{K}$ ) :

$$\mathbf{R}^{\text{coh}} = \beta \times \mathbf{K} \cdot [\mathbf{u}] \quad \text{avec} \quad \mathbf{K} = C_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + C_t (\mathbf{i} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad \text{et} \quad \beta = s([\mathbf{u}]), \quad (2)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la zone cohésive,  $\mathbf{i}$  est le tenseur identité d'ordre deux,  $C_n$  (resp.  $C_t$ ) est la raideur normale (resp. tangentielle) cohésive et  $\beta$  est la variable d'endommagement évoluant suivant une fonction d'adoucissement positive et décroissante  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ . La situation  $\beta = 1$  correspond à une zone vierge,  $0 < \beta < 1$  une zone endommagée et  $\beta = 0$  une zone totalement rompue. On s'intéresse dans cette communication au cas d'une loi cohésive de type trapèze et on suppose que la fonction d'endommagement dépend du saut de déplacement effectif  $u_{\text{eff}}$  (cf. FIGURE 2 au milieu).

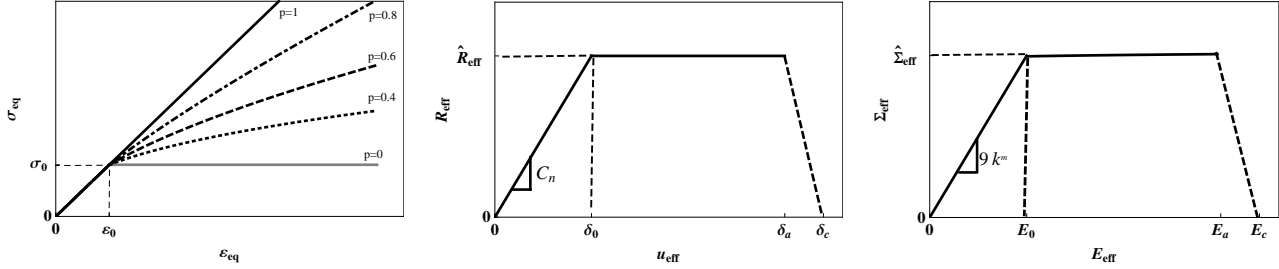


FIGURE 2 – Illustration des lois locales et globale. Loi volumique de type puissance (à droite), loi cohésive mixte de type "trapèze" (au centre) et loi globale associée (à droite). Notations :

quantités effectives locales	quantités effectives globales
$u_{\text{eff}} = \sqrt{u_n^2 + C_t/C_n \ \mathbf{u}_t\ ^2}$ (ouverture)	$E_{\text{eff}} = \sqrt{E_m^2 + \mu^m/3k^m E_{\text{eq}}^2}$ (déformation)
$R_{\text{eff}} = \sqrt{R_n^2 + C_n/C_t \ \mathbf{R}_t\ ^2}$ (contrainte)	$\Sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\Sigma_m^2 + k^m/3\mu^m \Sigma_{\text{eq}}^2}$ (contrainte)

Les inclusions cohésives associées aux MZCs ont la loi de comportement suivante [5] :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{coh}} = \mathbb{C}^{\text{coh}}([\mathbf{u}]) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{coh}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{\text{coh}}([\mathbf{u}]) = e \times s([\mathbf{u}]) \times (C_n \mathbb{E}_l + C_t \mathbb{K}_l), \quad (3)$$

où  $\mathbb{E}_l$  et  $\mathbb{K}_l$  sont deux éléments de la base d'isotropie transverse des tenseurs symétriques du quatrième ordre (voir [6, 3]). Le comportement effectif du composite MIC est recherché par la borne inférieure de l'estimation Hashin Shtrikman (HS) [7] après le passage à la limite sur l'épaisseur fictive  $e \rightarrow 0$  :  $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{e \rightarrow 0} \mathbb{C}^{\text{HS}}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^{\text{coh}})$ .

### 3 Critère pour l'élasticité

On s'intéresse d'abord au cas d'un composite MIC élastique (i.e.  $\mathcal{H} = 0$  dans (1) et  $s = 1$  dans (3)). L'utilisation des modèles de zone cohésive intrinsèques induit une souplesse additionnelle artificielle ; cette souplesse est d'autant plus importante que le maillage est raffiné. Il est donc opportun de relier ces raideurs au maillage afin de ne pas biaiser l'élasticité globale. En notant  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  le tenseur d'élasticité macroscopique du MIC élastique, on doit vérifier au mieux  $\mathbb{C}^{\text{hom}} \simeq \mathbb{C}^m$ . On propose un *critère rigoureux* [6, 3] permettant de calibrer les raideurs cohésives en fonction de : 1/ le module de Young  $E^m$  et le coefficient de Poisson  $\nu^m$  du matériau, 2/ la taille  $L_{\text{mesh}}$  du maillage et sa morphologie  $\gamma$ , et 3/ la perte de raideur tolérée par l'utilisateur  $R = E^{\text{hom}}/E^m$  (e.g.  $R = 95\%$ ) :

$$\boxed{\frac{C_n}{E^m L_{\text{mesh}}} = \frac{R}{1-R} \frac{\gamma}{3-6\nu^m} \quad \text{et} \quad \frac{C_t}{C_n} = 2 \frac{1-2\nu^m}{1+3\nu^m}} \quad (4)$$

### 4 Critères pour la rupture fragile

Pour le comportement fragile du MIC, les MZCs sont régis par une loi bilinéaire ( $\delta_0 = \delta_a$  dans FIGURE 2) et la matrice a toujours un comportement élastique ( $\mathcal{H} = 0$  dans (1)). La loi macroscopique est obtenue via l'approche variationnelle de [8]. Le tenseur d'élasticité effectif est obtenu par extension du schéma linéaire (HS) :  $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{e \rightarrow 0} \mathbb{C}^{\text{HS}}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}})$  où le tenseur sécant des inclusions cohésives  $\mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}}$  est évalué pour le second moment du saut de déplacement effectif  $\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}$  [9] :

$$\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{1}{f} \left( \frac{\partial \mathbf{E} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{E}}{\partial \beta C_n} + \frac{C_t}{C_n} \frac{\partial \mathbf{E} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{E}}{\partial \beta C_t} \right). \quad (5)$$

Le problème final, obtenu par (5), consiste à déterminer le paramètre d'endommagement  $\beta$  solution de :

$$\beta = s \left( \frac{3L_{\text{mesh}}}{\gamma} \frac{R-1}{1+(\beta-1)R} \sqrt{E_m^2 + \frac{1-2\nu^m}{2+2\nu^m} E_{\text{eq}}^2} \right) \quad (6)$$

où  $E_m$  (resp.  $E_{\text{eq}}$ ) est la partie hydrostatique (resp. équivalente) de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$ . Le problème non linéaire (6) admet une solution exacte pour le cas de la loi bilinéaire considérée. Cela définit deux autres critères sur les paramètres cohésifs : la contrainte maximale,  $\hat{R}_{\text{eff}}$ , et l'énergie cohésive,  $G_c$ , à savoir :

$$\boxed{\hat{R}_{\text{eff}} = \hat{\Sigma}_{\text{eff}} \quad \text{et} \quad G_c = \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma} \mathcal{U}_{cr}} \quad (7)$$

où  $\hat{\Sigma}_{\text{eff}}$  est la contrainte effective maximale que peut supporter le matériau,  $\hat{R}_{\text{eff}}$  est la contrainte effective cohésive maximale, et  $\mathcal{U}_{cr}$  est l'énergie de rupture globale du matériau (aire sous la courbe globale).

## 5 Critères pour la rupture ductile

Pour le comportement ductile, les MZCs sont régis par une loi de type "trapèze" ( $\delta_0 \neq \delta_a$  dans FIGURE 2) et la matrice a un comportement plastique de type puissance ( $\mathcal{H} = 1$  dans (1)). Le tenseur d'élasticité effectif est obtenu par extension du schéma linéaire (HS)  $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{e \rightarrow 0} \mathbb{C}^{\text{HS-}}(\mathbb{C}_{\text{sct}}^m, \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}})$  où le tenseur sécant des inclusions cohésives  $\mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}}$  est évalué pour le second moment du saut de déplacement effectif  $\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}$  et le tenseur sécant de la matrice  $\mathbb{C}_{\text{sct}}^m$  est évalué pour le second moment de la déformation déviatorique  $\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_{\Omega-\mathcal{I}}$  donné par [10] :

$$\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_{\Omega-\mathcal{I}} = \frac{1}{3(1-f)} \frac{\partial}{\partial \mu^m} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{E}. \quad (8)$$

La combinaison de (5) et (8) conduit au problème final à résoudre. Il est donné sous la forme d'un système couplé de deux équations scalaires non linéaires dont les inconnues sont  $\beta$  et  $\mu^m$ .

En s'intéressant au cas  $p = 0$  (plasticité parfaite), la résolution de (5) et (8) pour la partie plastique ( $\delta_0 < u_{\text{eff}} < \delta_a$ ) permet de relier la contrainte cohésive maximale à la contrainte effective maximale. Cette relation est donnée en fonction du taux de triaxialité  $T = E_m/E_{\text{eq}}$  ( $0 < T < \infty$ ) comme suit :

$$\boxed{\frac{\hat{R}_{\text{eff}}}{\sigma_0} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4+4\nu^m}{1-2\nu^m} + 18 \frac{\hat{\Sigma}_{\text{eff}}^2}{\sigma_0^2} + \frac{1}{T^2} \left( 1 - \sqrt{36 \left( \frac{\hat{\Sigma}_{\text{eff}}}{\sigma_0} \right)^2 + 1} \right)}} \quad (9)$$

Contrairement au cas d'un comportement fragile (7), la dernière relation met en évidence l'influence du taux de triaxialité  $T$  pour les comportements ductiles. Si le chargement tend vers le mode hydrostatique ( $E_{\text{eq}} = 0$ ), on obtient :  $\hat{R}_{\text{eff}} \simeq \hat{\Sigma}_{\text{eff}}$ . D'autre part, le saut de déplacement effectif au début de l'endommagement  $\delta_a$  peut être lié à la déformation macroscopique équivalente à l'amorçage des fissures  $E_{\text{eq}}^a$  :

$$\boxed{\delta_a = \left[ 3 \frac{2\nu^m - 1}{E^m} \sigma_0 + 9 E_{\text{eq}}^a T \left( 2 \frac{\nu^m + 1}{2\nu^m - 1} + 9\eta^2 \right)^{-1/2} \right] \eta \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma}} \quad (10)$$

où l'on a noté  $\eta = \hat{R}_{\text{eff}}/\sigma_0$  (à calibrer suivant (9)). Le saut de déplacement  $\delta_a$  est d'autant plus grand que la déformation macroscopique à l'amorçage des fissures  $E_{\text{eq}}^a$  devient importante. Finalement, le saut de déplacement critique  $\delta_c$  peut être lié à la déformation macroscopique équivalente à la rupture  $E_{\text{eq}}^c$  de la façon suivante :

$$\boxed{\delta_c = \frac{3E_{\text{eq}}^c}{\sqrt{2}} \sqrt{2T^2 + \frac{1-2\nu^m}{1+\nu^m} \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma}}} \quad (11)$$

Contrairement à la contrainte cohésive  $\widehat{R}_{\text{eff}}$  qui ne dépend pas de la taille de maillage, les ouvertures  $\delta_a$  et  $\delta_c$  sont linéairement liées à  $L_{\text{mesh}}$ . L'ensemble des relations (4), (9), (10) et (11) définit alors des critères pratiques pour la calibration des paramètres cohésifs d'une loi à 4 paramètres (e.g. loi de type "trapèze"). Ces critères sont donnés en fonction des données matériaux ainsi que des caractéristiques du maillage. Ils permettent ainsi de dériver un comportement effectif issu d'une discrétisation EFCV non-sensible au maillage comme l'illustrera la partie suivante.

## 6 Validation numérique

L'objectif de cette section est d'illustrer la non-dépendance de la réponse macroscopique issue d'une discrétisation EFCV à la taille de la maille en respectant les critères proposés. Les différentes simulations numériques sont faites en 2D avec l'hypothèse des déformations planes. La plateforme Xper [11] est utilisée en se limitant au cas d'un comportement fragile. Les calculs sont faits pour un matériau isotrope ( $E^m = 10$  GPa,  $\nu^m = 0.3$ ) avec deux tailles de maillage différentes. On utilise un maillage de type structuré (FIGURE 3 en haut) avec des éléments finis linéaires. Pour cette discrétisation, le paramètre lié à la morphologie du maillage est  $\gamma = 2(1 + \sqrt{2})$ . Ainsi, pour chaque taille de maille, la loi cohésive bilinéaire est calibrée suivant les critères (4) et (7). La non-dépendance de la réponse macroscopique au maillage est illustrée dans FIGURE 3 : le ratio entre les ouvertures critiques  $\delta_c$  pour les deux maillages est de l'ordre de 66% (FIGURE 3 en bas à gauche) alors que le ratio entre les déformations macroscopiques critiques  $E_{\text{eff}}^c$  est presque voisin de 1 (FIGURE 3 en bas à droite). Ces résultats numériques confirment alors que **les propriétés de fissuration macroscopiques deviennent insensibles à la taille de maillage** dès lors que :

- i*– le calcul EF converge,
- ii*– la loi cohésive est calibrée en fonction du maillage d'une façon adéquate.

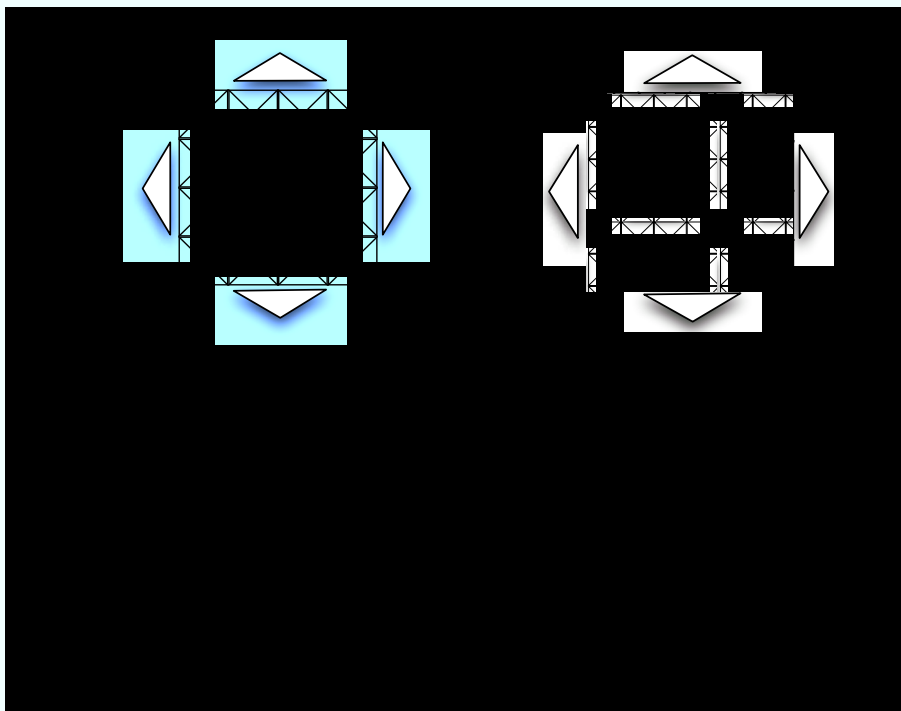


FIGURE 3 – Convergence de la réponse contrainte-déformation macroscopique. En haut, illustration du chargement appliqué et des deux maillages. En bas, les lois locales calibrées pour deux tailles de maillage (à gauche) et les réponses globales obtenues par Xper (à droite).

## 7 Conclusion

Des critères micromécaniques pour la calibration des lois cohésives intrinsèques sont obtenus sur la base d'un schéma d'homogénéisation variationnelle non linéaire et d'une approche volumique-cohésive. Ces critères ont la capacité à relier d'une façon explicite les paramètres locaux à la réponse effective ainsi qu'à exhiber l'effet du coefficient de Poisson et du taux de triaxialité sur la loi globale. Les critères proposés sont valables pour toute forme de lois cohésives et permettent de dériver un comportement global indépendant de la densité de maillage  $Z$ .

TABLE 1 – Calibration des paramètres de la loi cohésive bilinéaire suivant les critères (4) et (7) pour deux tailles de maillages différentes.

Propriétés cohésives	$C_n$ (Pa/mm)	$C_t$ (Pa/mm)	$\widehat{R}_{\text{eff}}$ (Pa/m)	$G_c$ (Pa.m)
$L_{\text{mesh}} = 0.05$ (m)	$1.5 \times 10^{12}$	$6.4. \times 10^{12}$	3000	0.001
$L_{\text{mesh}} = 0.03$ (m)	$2.25 \times 10^{12}$	$9.6 \times 10^{11}$	3000	0.0006

## Références

- [1] D.S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 8 :100–104, 1960.
- [2] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fractures. *Advances In Applied Mechanics*, 7 :55–129, 1962.
- [3] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, and S. Pagano. Artificial compliance inherent to the intrinsic cohesive zone models : criteria and application to planar meshes. *International Journal of Fracture*, 178 :71–83, 2012.
- [4] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, and S. Pagano. Micromechanics-based criteria for the selection of cohesive zone parameters. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 246 :206–214, 2013.
- [5] V. Acary and Y. Monerie. Nonsmooth fracture dynamics using a cohesive zone approach. Technical Report RR-6032, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2006.
- [6] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, and S. Pagano. Criteria on the artificial compliance inherent to the intrinsic cohesive zone. *Comptes Rendus de Mécanique*, 339 :789–795, 2011.
- [7] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 :127–140, 1963.
- [8] P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39 :45–71, 1991.
- [9] Y. Maalej, L. Dormieux, and J. Sanahuja. Comportement élastique non linéaire d'un milieu granulaire : approche micromécanique. *Comptes rendus Mécanique*, 335 :461–466, 2007.
- [10] W. Kreher. Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38 :115–128, 1990.
- [11] F. Perales, F. Dubois, Y. Monerie, B. Piar, and L. Stainier. Multi-body NSCD strategy as a multi-domain solver. Application to code coupling dedicated to the modeling of fracture of heterogeneous media. *European Journal of Computational Mechanics*, 19 :389–417, 2010.