



Approximation analytique de l'effet d'un champ magnétique extene sur l'écoulement de Jeffery-Hamel

Badreddine Lemouedda, Mohamed Rafik Sari, Mohamed Kezzar

► To cite this version:

Badreddine Lemouedda, Mohamed Rafik Sari, Mohamed Kezzar. Approximation analytique de l'effet d'un champ magnétique extene sur l'écoulement de Jeffery-Hamel. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. <hal-03439742>

HAL Id: hal-03439742

<https://hal.science/hal-03439742v1>

Submitted on 22 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Approximation Analytique de l'effet d'un Champ Magnétique Externe sur l'Écoulement de Jeffery-Hamel

B. LEMOUEDDA^a, M. R. SARI^a, M. KEZZAR^a

a. Département de Génie Mécanique, Université 20 Aout 1955 de Skikda BP 26, 21000 Algérie

Résumé:

L'étude des écoulements magnétohydrodynamique est d'une grande importance. En effet, on peut leur associer diverses applications scientifiques et industrielles tels que : la géophysique, le génie métallurgique ou encore l'astrophysique. Ces écoulements sont obtenus par un couplage des équations de Navier-Stokes et de Maxwell. Dans ce papier, on s'intéresse à la résolution analytique du problème non linéaire de l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux entre deux parois planes formant un angle entre elles (écoulement de Jeffery-Hamel) sous l'effet d'un champ magnétique externe. L'équation différentielle non linéaire du troisième ordre qui régit la distribution des vitesses de l'écoulement MHD envisagé, a été traitée analytiquement par la technique d'Adomian généralisée (Generalized Decomposition method). Cette dernière, n'est qu'une extension de la méthode décompositionnelle établie par George Adomian. La comparaison des résultats obtenus avec ceux du traitement numérique par les méthodes de Runge Kutta d'ordre 4 et de tir, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, Re et du nombre d'Hartmann, H , montre l'efficacité de la technique analytique adoptée.

Abstract:

The study of magnetohydrodynamic flows is very important. Indeed, they can be associated with several scientific or industrial applications such as: geophysics, metallurgy or astrophysics. These flows are obtained by coupling Navier-Stokes equations and Maxwell equations. In this paper we are interested in the analytical study of nonlinear problem of the Jeffery-Hamel flow under the effect of an extern magnetic field. The third order nonlinear differential equation of dynamic field has been treated analytically by generalized decomposition method. This new method is an extension of decomposition method developed by George Adomian. The comparison of analytical results with numerical results obtained by fourth order Runge-Kutta method for several Reynolds numbers and Hartmann numbers shows the accuracy and efficiency of the adopted GDM method.

Mots clefs: Écoulement, Champ Magnétique, Convergent-Divergent, Runge-Kutta, Méthode d'Adomian généralisée (GDM).

1 Introduction

L'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux entre deux parois planes formant un angle entre elles, a été découvert premièrement par Jeffery [1] en 1915, et indépendamment par Hamel [2] en 1916. Cet écoulement a un intérêt fondamental. En effet, il montre d'une part la non unicité des équations de Navier-Stokes et représente d'autre part les écoulements dans les canaux à faible courbures tels que les grilles d'aubes des turbomachines.

L'étude des écoulements magnétohydrodynamiques est d'une grande importance. En effet, on peut leur associer diverses applications scientifiques et industrielles telles que : la géophysique, le génie métallurgique ou encore l'astrophysique. Ces écoulements sont obtenus par un couplage des équations de Navier-Stokes et de Maxwell.

Dans ces dernières années, l'écoulement de Jeffery-Hamel avec ou sans présence d'un champ magnétique, a fait l'objet de nombreuses contributions [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Pour notre part, l'équation

différentielle non linéaire du troisième ordre, qui régit l'écoulement de Jeffery-Hamel sous l'effet d'un champ magnétique externe, a été traitée analytiquement par la méthode d'Adomian généralisée (GDM). Cette méthode développée par Yong-Chang [10], n'est qu'une extension de la méthode décompositionnelle établie par George Adomian [11].

2 Description du problème

Dans cette étude nous nous sommes particulièrement intéressés à l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux entre deux parois planes formant un angle entre elles sous l'effet d'un champ magnétique externe. La géométrie de cet écoulement est donnée par la (FIG. 1).

L'écoulement étudié est purement radial et il est naturel de supposer que la vitesse a pour

$$\text{composantes : } \begin{cases} V_r = V(r, \theta) \\ V_\theta = 0 \\ V_z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , les équations de continuité et de mouvement s'écrivent comme suit :

$$\frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) = 0 \quad (2)$$

$$V_r \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \cdot \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho r^2} V_r \right] \quad (3)$$

$$-\frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{2 \cdot \nu}{r^2} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

Avec :

V_r : vitesse radiale de l'écoulement ; ρ : masse volumique ; ν : viscosité cinématique ; P : pression du fluide ; B_0 : induction électromagnétique ; σ : conductivité du fluide.

De l'équation de continuité (2), on peut tirer :

$$V_r = \frac{f(\theta)}{r} \quad (5)$$

Par introduction de la variable réduite $F(\eta) = \frac{f(\theta)}{f_{max}}$ (6), avec :

f_{max} : vitesse maximale sur l'axe du canal.

$$\eta = \frac{\theta}{\alpha} \quad \text{et} \quad -1 \leq \eta \leq +1$$

Et l'élimination de la pression entre les équations (3) et (4), il arrive finalement :

$$F'''' + 2R_e \alpha F F' + (4 - H) \alpha^2 F' = 0 \quad (7)$$

Avec les conditions aux limites :

$$F(\eta) = 1, F'(\eta) = 0 \quad \text{sur l'axe du canal.} \quad (8)$$

$$F(\pm 1) = 0, \quad \text{sur les parois fixes solides.} \quad (9)$$

Les nombres de Reynolds et de Hartmann dans l'équation (7), sont définis par :

$$R_e = \frac{f_{max} \cdot \alpha}{\nu} \quad (10)$$

$$H = \sqrt{\frac{\sigma B_0^2}{\rho \nu}} \quad (11)$$

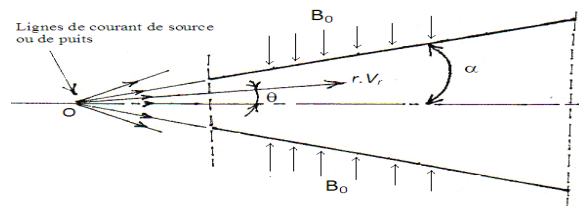


FIG. 1 – Géométrie de l'écoulement de Jeffery-Hamel

3 Principe de la méthode d'Adomian généralisée

La méthode décompositionnelle d'Adomian permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : algébriques, différentielles, intégrales, intégral-différentielles, aux dérivées partielles (EDP)...etc. La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires. Pour mieux illustrer le principe de la méthode décompositionnelle, considérons l'équation suivante :

$$F u(t) = g(t) \quad (12)$$

Où F : représente un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non-linéaire comprenant des termes linéaires et non-linéaires. Le terme linéaire est généralement décomposé en $(L+R)$, où L est facilement inversible et R représente le résidu de l'opérateur linéaire. Dans ces conditions, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$Lu + Nu + Ru = g \quad (13)$$

Avec :

Nu : indique le terme non-linéaire.

La résolution de l'équation (12) pour Lu sachant que L est inversible, conduit à :

$$L^{-1}Lu + L^{-1}Ru + L^{-1}Nu = L^{-1}g \quad (14)$$

L^{-1} : constitue une intégrale d'ordre n (double ou triple.....).

La solution de l'équation (14), se traduit par :

$$u = A + Bt + Ct^2 \dots \dots Dt^{n-1} + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (15)$$

Où les constantes (A, B, \dots, D) d'intégration sont estimées à partir des conditions aux limites et initiales.

La méthode d'Adomian suppose que la solution u peut être donnée par la série suivante :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (16)$$

Le terme non-linéaire peut s'écrire également :

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (17)$$

A_n : appelés polynômes d'Adomian, sont calculés par la formule suivante :

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right] \right]_{\lambda=0} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Les composantes de la solution d'après Adomian se calculent finalement par la formule suivante :

$$u_{n+1} = L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (19)$$

Par contre la technique GDM, proposée par (Yong-Chang et al.), n'est qu'une extension de la méthode ADM. La différence entre les méthodes ADM et GDM réside dans le calcul du terme nonlinéaire Nu . Pour la technique GDM une nouvelle stratégie de calcul ou de décomposition est adoptée. En effet, cette technique propose :

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} J_n \quad (20)$$

Où les polynômes d'Adomian généralisée sont donnés par :

$$\begin{cases} J_0 = N(u_0) \\ J_n = N(u_0 + u_1 + \dots + u_n) - N(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}), n \geq 1 \end{cases} \quad (21)$$

Les composantes de la solution selon la méthode GDM se calculent par :

$$u_{n+1} = L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \quad (22)$$

4 Application de la méthode GDM sur le problème étudié

Selon le principe d'Adomian, l'équation (7) différentielle normalisée du troisième ordre non linéaire de la distribution des vitesses, peut s'écrire :

$$LF = -2Re\alpha FF' - (4 - H)\alpha^2 F' \quad (23)$$

Où l'opérateur différentiel L est donné par $L = \frac{d^3}{d\eta^3}$ et son inverse $L^{-1} = \int \int \int_0^\eta (\blacksquare) d\eta d\eta d\eta$

L'inverse de l'équation (23) s'exprime par :

$$L^{-1}LF = L^{-1}(-2Re\alpha FF' - (4 - H)\alpha^2 F') \quad (24)$$

La distribution des vitesses, après résolution de l'équation (24), sera donc :

$$F(\eta) = F(0) + F'(0)\eta + F''(0)\frac{\eta^2}{2} + L^{-1}(Nu) \quad (25)$$

Avec :
$$Nu = -2Re\alpha FF' - (4 - H)\alpha^2 F' \quad (26)$$

Les valeurs de $F(0)$, $F'(0)$ et $F''(0)$ dépendent des conditions aux limites pour les canaux convergent et divergent.

4.1 Cas du convergent

Pour le canal convergent, si on considère que la distribution des vitesses est symétrique par rapport à $\eta = 0$, les conditions aux limites s'expriment par :

Au centre de la conduite : $F(0) = 1$. (27)

Sur les parois fixes solides : $F(1) = 0$. (28)

Dans cette situation, la solution du problème sera étudié entre $F(1) = 0$ sur la paroi de la conduite et $F(0) = 1$ au centre de la conduite. En effet, par application des conditions aux limites (27), (28) et en considérant $F''(0) = c$, on obtient :

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n = F_0 + L^{-1}(Nu) \quad (29)$$

Avec :
$$F_0 = 1 + c \frac{\eta^2}{2} \quad (30)$$

L'application de l'algorithme d'Adomian généralisée (GDM) conduit donc aux équations suivantes :

$$J_0 = -4\alpha^2 c\eta + c\alpha^2 H\eta - 2c\alpha Re\eta - \alpha c^2 Re\eta^3 \quad (31)$$

$$F_1 = \frac{1}{6} c\alpha^2 \eta^4 + \frac{1}{24} \alpha^2 c H\eta^4 - \frac{1}{12} c\alpha Re\eta^4 - \frac{1}{120} \alpha c^2 Re\eta^6 \quad (32)$$

.....etc.
Avec: $F(\eta) = F_0 + F_1 + \dots + F_n$ (33)

4.2 Cas du divergent

Pour un écoulement dans un divergent, on va considérer que la paroi solide correspond à $\eta = 0$, l'axe de la conduite correspond à $\eta = 1$ et par conséquent les conditions aux limites s'expriment par :

Au centre de la conduite : $F(1) = 1$. (34)

Sur les parois fixes solides : $F(0) = 0$. (35)

Dans ce cas, la distribution des vitesses est symétrique par rapport à $\eta = 1$ et la solution du problème étudié varie donc de $F(0) = 0$ sur les parois fixes solides jusqu'au $F(1) = 1$ au niveau du centre de la conduite.

Par application des conditions aux limites (34), (35) et en considérant $F'(0) = a$ et $F''(0) = b$, la solution sera :

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n = F_0 + L^{-1}(Nu) \quad (36)$$

Avec :
$$F_0 = a\eta + b \frac{\eta^2}{2} \quad (37)$$

L'application de l'algorithme d'Adomian généralisée (GDM) conduit aux équations suivantes :

$$J_0 = -4a\alpha^2 + a\alpha^2 H - 4\alpha^2 b\eta + \alpha^2 b H\eta - 2a^2 \alpha Re\eta - 3aabRe\eta^2 - \alpha b^2 Re\eta^3 \quad (38)$$

$$F_1 = -\frac{2}{3} a\alpha^2 \eta^3 + \frac{1}{6} a\alpha^2 H\eta^3 - \frac{1}{6} \alpha^2 b\eta^4 + \frac{1}{24} \alpha^2 b H\eta^4 - \frac{1}{12} a^2 \alpha Re\eta^4 - \frac{1}{20} aabRe\eta^5 - \frac{1}{120} \alpha b^2 Re\eta^6 \quad (39)$$

.....etc.
Avec: $F(\eta) = F_0 + F_1 + \dots + F_n$ (40)

5 Résultats et Discussions

Dans cette étude nous nous sommes particulièrement intéressés au problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel sous l'effet d'un champ magnétique externe. L'équation différentielle nonlinéaire (7) avec les conditions aux limites (8) et (9), a été traitée analytiquement par la technique

d'Adomian généralisée pour diverses valeurs de l'angle α , du nombre de Reynolds Re et du nombre de Hartmann H . Généralement la solution du problème étudié converge au bout de 5 itérations.

$\alpha=3^\circ$				
Re = 120	η	F_{RK4}	F_{GDM}	$ F_{GDM} - F_{RK4} $
	0	1,000000	1,000000	0,000000
	0,2102717	0,982668	0,985352	0,002684
	0,4271988	0,914761	0,923023	0,008262
	0,5291224	0,854315	0,863538	0,009223
	0,6426258	0,752982	0,760868	0,007886
	0,8414348	0,440051	0,441592	0,001541
	1	0,000000	0,000000	0,000000

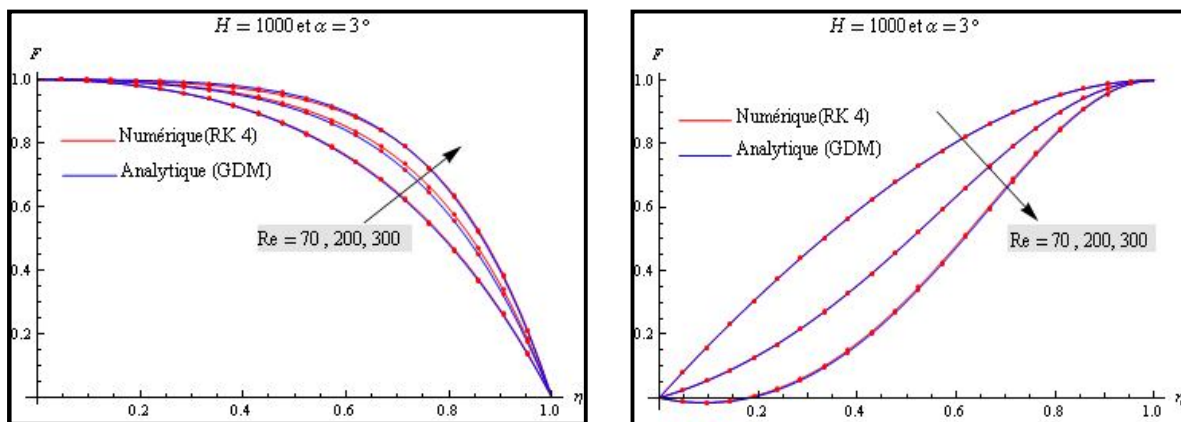
Tableau 1 Distribution des vitesses pour $Re=120$, $H=1000$ et $\alpha=3^\circ$ dans le convergent.

Pour tester l'efficacité de la technique d'Adomian généralisée, une comparaison des résultats obtenus avec ceux du traitement numérique par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 pour le cas ou $H=1000$, $Re=120$ et $\alpha=3^\circ$, a été réalisée. L'erreur est introduite par la différence de vitesses :

Erreur = $|F_{GDM} - F_{RK4}|$. La comparaison montre d'une part la bonne concordance entre résultats analytiques et numériques et justifie d'autre part l'efficacité de la technique analytique GDM adoptée, comme illustré par les tableaux 1 et 2. Pour montrer d'avantage l'efficacité de la technique GDM utilisée, une comparaison des résultats obtenus avec ceux de Motsa et al. [12] est donnée par le tableau 3.

$\alpha=3^\circ$				
Re = 120	η	F_{RK4}	F_{GDM}	$ F_{GDM} - F_{RK4} $
	0	0,000000	0,000000	0,000000
	0,2102717	0,923819	0,924282	0,000463
	0,4271988	0,716561	0,717534	0,000973
	0,5291224	0,593490	0,594516	0,001026
	0,6426258	0,449008	0,449009	0,000001
	0,8414348	0,195720	0,196248	0,000528
	1	1,000000	1,000000	0,000000

Tableau 2 Distribution des vitesses pour $Re=120$, $H=1000$ et $\alpha=3^\circ$ dans le divergent



a) Convergent

b) Divergent

FIG. 2 Effet du nombre de Reynolds sur la distribution des vitesses

L'effet du nombre de Reynolds sur la distribution des vitesses dans un convergent-divergent pour un angle $\alpha=3^\circ$ et un nombre de Hartmann $H=1000$ est illustré par la FIG. 2. D'après les résultats obtenus, on constate pour le cas du convergent (FIG. 2-a), que l'augmentation du nombre de Reynolds fait croître la vitesse et conduit à un profil plat au centre de la conduite avec un gradient de vitesse élevée proche des parois, ce qui fait par conséquent diminuer l'épaisseur de la couche limite. Par contre pour le cas de l'écoulement dans un divergent (FIG. 2-b), on constate que la vitesse décroît avec l'accroissement du nombre de Reynolds. En effet, l'augmentation du nombre de Reynolds fait diminuer la vitesse du fluide et fait concentrer le débit au centre de la conduite avec un faible gradient de vitesse proche des parois, ce qui conduit à l'accroissement de la couche limite. On constate également que le phénomène de séparation ou de retour d'écoulement n'est pas observé pour l'écoulement dans un convergent. Par contre, ce phénomène est fortement favorisé par l'accroissement du nombre de Reynolds dans le divergent.

La (FIG.3) visualise l'effet de l'angle d'ouverture α sur la distribution des vitesses pour le cas d'un écoulement dans un convergent-divergent pour un nombre de Reynolds $Re=120$ et un nombre de Hartmann $H=1000$. En effet, on constate qu'avec l'accroissement de l'angle α pour un nombre de Hartmann élevé, que la vitesse de l'écoulement proche des parois se trouve accélérée. Cet accroissement est provoqué par l'augmentation du gradient de pression exercé par les parois. Par contre, l'effet des parois sur l'écoulement du fluide diminue quand on s'éloigne d'eux. Dans ces conditions, l'épaisseur de la couche limite diminue. D'autre part, l'accroissement de l'angle α élimine le phénomène de retour d'écoulement aussi bien pour le convergent que pour le divergent.

$\alpha=3^\circ$				
Re= 50 et H=0.	η	Motsa et al. [12]	F_{GDM}	F_{RK4}
	0	1.000000	1.000000	1.000000
	0,1	0.982431	0.98243	0.982431
	0,2	0.931226	0.931223	0.931226
	0,3	0.850611	0.850606	0.850611
	0,4	0.746791	0.746785	0.746791
	0,5	0.626948	0.626943	0.626948
	0,6	0.498234	0.498229	0.498234
	0,7	0.366966	0.366962	0.366966
	0,8	0.238124	0.23812	0.238124
	0,9	0.115152	0.11515	0.115152
	1	0.000000	0.000000	0.000000

Tableau 3 Comparaison des résultats ($\alpha=3^\circ$, $Re=50$ et $H=0$).

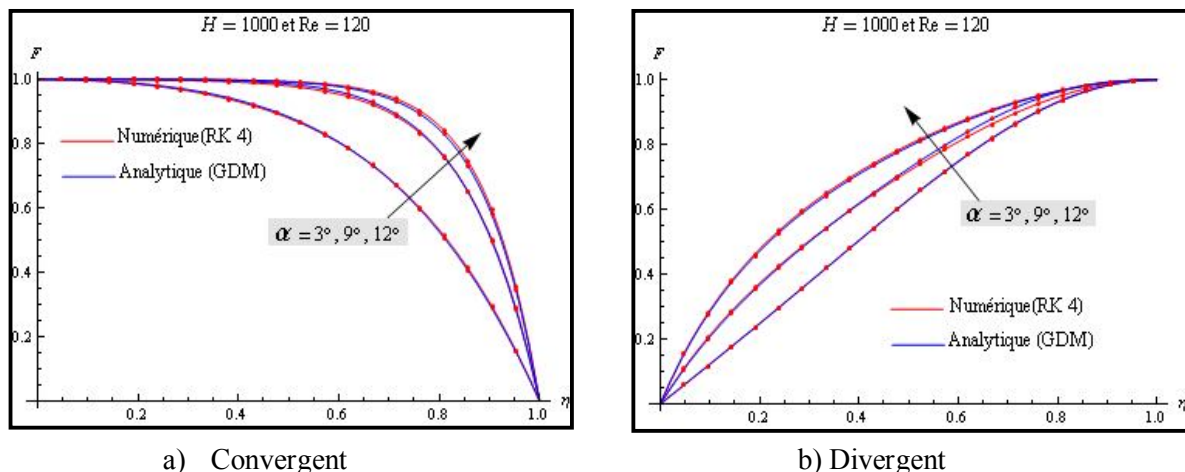


FIG. 3 Effet de l'angle α sur la distribution des vitesses

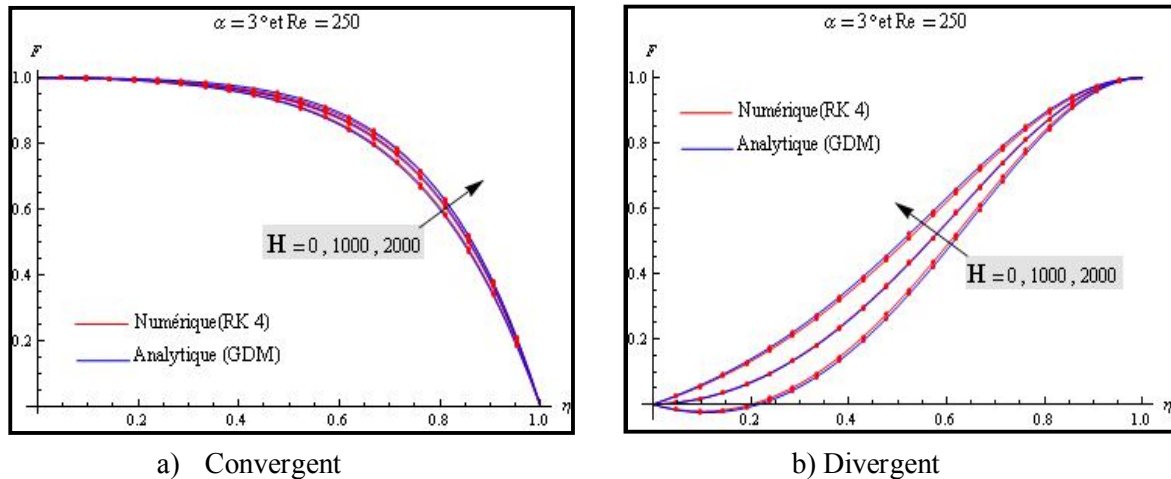


FIG. 4 Effet du nombre de Hartmann sur la distribution des vitesses

La (FIG. 4) montre l'effet du nombre de Hartmann sur le profil des vitesses dans un convergent-divergent pour un angle $\alpha=3^\circ$ et un nombre de Reynolds $Re=250$. Dans ce cas, avec l'accroissement du nombre de Hartmann, la vitesse de l'écoulement croît pour les deux types d'écoulement (convergent et divergent) et par conséquent l'épaisseur de la couche limite diminue. Cela indique clairement que le champ magnétique s'oppose aux phénomènes de transport et ceci est dû principalement à la variation de la force de Lorentz en fonction du nombre de Hartmann. Sous l'effet du champ magnétique, la force électromagnétique de Lorentz produit une résistance élevée aux phénomènes de transport. En effet, elle agit en sens opposé de la direction de l'écoulement et par conséquent stabilise le profil des vitesses. On constate également que l'accroissement du nombre de Hartmann élimine le phénomène de séparation ou de retour d'écoulement dans le convergent-divergent.

6 Conclusion

Dans cette étude, l'écoulement de Jeffery-Hamel magnétohydrodynamique, a été traité analytiquement et numériquement par les techniques de décomposition d'Adomian généralisée et de Runge Kutta d'ordre 4 respectivement.

D'après les résultats obtenus on peut tirer les conclusions suivantes :

- La comparaison entre les techniques de résolution adoptées, montre une bonne concordance entre résultats analytiques et numériques.
- Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la technique GDM adoptée.
- La technique de décomposition d'Adomian généralisée permet de traiter le problème nonlinéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel sans passer par la discrétisation, la linéarisation ou encore un traitement numérique. En effet, cette puissante technique donne la solution du problème étudié sous forme d'une série rapidement convergente.
- L'augmentation du nombre de Reynolds pour le cas de l'écoulement dans un convergent fait diminué l'épaisseur de la couche limite. Par contre, dans un divergent, un nombre de Reynolds croissant fait croître l'épaisseur de la couche limite.
- L'accroissement du nombre de Reynolds fait apparaître le phénomène de séparation ou de retour d'écoulement (Backflow) dans le divergent. Par contre, ce phénomène n'est pas observé dans le convergent.
- L'accroissement de l'angle α pour un écoulement possédant des nombres de Hartmann élevés, élimine le phénomène de retour d'écoulement.
- L'accroissement du nombre de Hartmann dans le convergent-divergent élimine le phénomène de retour d'écoulement.

Références

- [1] Jeffery G. B., The two dimensionnal steady motion of a viscous fluid. *Phil. Mag.* (6) 29, 455-465, 1915.
- [2] Hamel G., Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. *Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, 25, 34-60, 1916.
- [3] Moghimi S. M., Domairry G., Soleimani S., Ghasemi E., Bararnia H., Application of homotopy Analysis method to solve MHD Jeffery-Hamel flows in non-parallel walls, *Advances in Engineering Software*, 42, 108-113, 2011.
- [4] Makinde O. D., Mhone P. Y., Temporal stability of small disturbances in MHD Jeffery-Hamel flows, *Computers & Mathematics with Applications*, 53, 128-136, 2007.
- [5] Moghimi S. M., Ganji D. D., Bararnia H., Hosseini M., Jalaal M., Homotopy perturbation method for nonlinear MHD Jeffery-Hamel problem, *Computers & Mathematics with Applications*, 61, 2213-2216, 2011.
- [6] Makinde O. D., Mhone P. Y., Hermite-Padé approximation approach to MHD Jeffery-Hamel flows, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 966-972, 2006.
- [7] McAlpine A., Drazin P. G., On the spatio-temporal development of small perturbations of Jeffery-Hamel flows, *Fluid Dynamics Research*, 22, 123-138, 1998.
- [8] Domairry DR. G., Mohsenzadeh A., Famouri M., The application of homotopy analysis method to solve nonlinear differential equation governing Jeffery-Hamel flow, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 85-95, 2009.
- [9] Ganji Z. Z., Ganji D. D., Esmailpour M., Study on nonlinear Jeffery-Hamel flow by He's semi-analytical methods and comparison with numerical results, *Computers & Mathematics with Applications*, 58, 2107-2116, 2009.
- [10] Yong-Chang J., Chuangyin D., Yoshitsugu Y., An extension of the decomposition method for solving nonlinear equations and its convergence. *Computers & Mathematics with Applications*, 55, 760-775, 2008.
- [11] Adomian G., *Solving frontier Problems of physics: The decomposition method*. Editeur: Springer, 372 pages, 1993.
- [12] Motsa S.S., Sibanda P., Awad F. G., Shateyi S., A new spectral –homotopy analysis method for the MHD Jeffery-Hamel problem, *Computers and Fluids*, 39(7), 1219-1225, 2010.