



HAL
open science

Modélisation de structures minces de type coque en comportement non linéaire géométrique par la méthode SPH

Jun Lin, Hakim Naceur, Abdel Laksimi, Daniel Coutellier

► **To cite this version:**

Jun Lin, Hakim Naceur, Abdel Laksimi, Daniel Coutellier. Modélisation de structures minces de type coque en comportement non linéaire géométrique par la méthode SPH. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03439032

HAL Id: hal-03439032

<https://hal.science/hal-03439032>

Submitted on 22 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation de structures minces de type coque en comportement non linéaire géométrique par la méthode SPH

J. LIN^{a†}, H. NACEUR^b, D. COUTELLIER^b, A. LAKSIMI^a

^a Laboratoire ROBERVAL, UMR 7337 CNRS, Université de Technologie de Compiègne

^b Laboratoire LAMIH, UMR 8201 CNRS, Université de Valenciennes

† Correspondance: jun.lin@utc.fr

Résumé :

Nous présentons ici de nouveaux résultats concernant la modélisation non linéaire géométrique de coques par la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). La formulation coque est basée sur le principe de Reissner-Mindlin pour la prise en compte du cisaillement transversal (CT), afin de pouvoir traiter le cas de coques épaisses. Dans la méthode SPH développée, la coque est représentée grâce à une seule couche de particules positionnées dans la surface moyenne de cette dernière. La formulation lagrangienne totale est adoptée pour la prise en compte des non linéarités géométriques et la résolution non linéaire est faite par un schéma de type dynamique explicite. La méthode SPH-coque développée a été validée à travers la résolution de nombreux problèmes de structures soumises à de grands déplacements et de grandes rotations. Les premiers tests comparatifs des résultats obtenus par cette méthode, avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis (EF) coques en utilisant le logiciel ABAQUS[®] montrent que la méthode SPH-coque peut constituer une véritable alternative à la méthode EF.

Abstract :

We present here new results concerning the geometrically nonlinear modeling of shells by the so-called Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method. The shell formulation is based on the Reissner-Mindlin principle, considering the transverse shear effects in order to be able to treat the case of thick shells. In the proposed SPH method, the shell is represented by a single layer of particles positioned within the shell mid-surface. The total lagrangian formulation is adopted to handle the geometrically nonlinear behavior of the structure and the nonlinear resolution is carried out using the explicit dynamic a scheme. The developed shell-SPH method has been validated through the resolution of numerous problems of thin structures subjected to large displacements and large rotations. The first comparative study of the results obtained by this method with those obtained by classical finite element (FE) shells using ABAQUS[®] software shows that the SPH-shell method may represent a real alternative to EF method.

Mots clefs : SPH ; coques ; non linéarités géométriques

1 Introduction

La méthode dite Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), développée initialement par Gingold et Monaghan [3], représente l'une des techniques *sans maillage* les plus puissantes. Cette méthode, basée sur le principe de collocation utilisant l'écriture forte des équations d'équilibre, a été utilisée jusqu'ici en mécanique de structures en utilisant l'approche solide 3D [7]. Cependant la modélisation de structures minces de type coques par approche solide 3D reste très coûteuse, car plusieurs particules doivent être placées dans la direction de la fibre épaisseur ce qui rend la densité de particules très importante. Les formulations de coques par méthode sans maillage, utilisant une seule couche de particules dans la surface moyenne ont suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Par exemple, Krysl et Belytschko [6] ont combiné le modèle de plaques de Kirchhoff avec la méthode EFG pour résoudre les problèmes de flexion de plaques minces.

Dans ce travail, nous proposons une extension de la méthode SPH proposée par Chen [2], afin de développer une formulation robuste pour l'analyse non linéaire géométrique de structures minces de type coque. La modélisation est basée sur la théorie de Reissner-Mindlin pour prendre en compte l'influence du cisaillement transversal pour le cas de coques épaisses. La formulation lagrangienne totale (FLT) est adoptée, ce qui va nous permettre de réduire le temps CPU en évitant la recherche des particules les plus proches voisines pour la construction de la fonction noyau à chaque pas de temps. La FLT permettra également d'éliminer certains problèmes d'instabilité [1], [4]. Le problème non linéaire résultant, est résolu en utilisant un schéma de dynamique explicite.

Plusieurs applications numériques de structures minces flexibles en comportement non linéaire géométrique sont étudiées et les résultats obtenus sont confrontés aux solutions classiques obtenues par les éléments finis de coques par utilisation du code ABAQUS[®]. Les premiers résultats de comparaison obtenus montrent que la méthode SPH peut constituer une réelle alternative à la méthode EF.

2 Formulation Lagrangienne Totale de la méthode SPH

Dans la méthode SPH, le domaine étudié est représenté par un nombre fini de *particules SPH*. On exprime la composante de champ de vitesse $v(\mathbf{x})$ de la particule a définie par son vecteur position \mathbf{x}_a en fonction des paramètres calculés sur les particules b se trouvant dans son voisinage le plus proche, par l'approximation SPH

$$v(\mathbf{x}_a) = \sum_{b=1}^n v(\mathbf{x}_b) W(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, h) V_b = \sum_{b=1}^n v_b \phi_{ab} \quad (1)$$

où n est le nombre de particules b se trouvant dans le voisinage proche de la particule a et V_b est la portion de volume de la particule b . $\phi_{ab} = W(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, h) V_b$ est la fonction de forme SPH. $W(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, h)$ est la fonction noyau dépendante de deux paramètres : h qui est la longueur de lissage définissant la taille du domaine d'intérêt et $x_{ab} = \|\mathbf{x}_{ab}\| = \|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|$, la distance entre les particules a et b .

Il en découle que le gradient du champ de vitesse au point \mathbf{x}_a peut être approché par

$$\nabla v(\mathbf{x}_a) = \sum_{b=1}^n v(\mathbf{x}_b) \nabla W(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, h) V_b = \sum_{b=1}^n v_b \nabla_0 \Phi_{0ab} \quad \text{ou} \quad \nabla v_a = \sum_{b=1}^n (v_b - v_a) \nabla_0 \Phi_{0ab} \quad (2)$$

Dans la formulation lagrangienne totale (FLT), la configuration initiale est considérée comme référence. Nous utilisons alors, la densité initiale du matériau et le volume initial des particules. Dans ce cas, l'équation de continuité et l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour une particule a , sont données par

$$\frac{d\rho_{0a}}{dt} = -\rho_{0a} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = -\rho_{0a} \sum_{b=1}^n (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a) \cdot \nabla_0 \Phi_{0ab} \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \operatorname{div}(\mathbb{P})/\rho_0 = \sum_{b=1}^n \rho_{0b} \left(\frac{\mathbb{P}_a}{\rho_{0a}^2} + \frac{\mathbb{P}_b}{\rho_{0b}^2} + \Pi_{0ab} \mathbb{I} \right) \nabla_0 \Phi_{0ab} \quad (4)$$

où ρ_0 est la densité du matériau, \mathbf{v} le champ de vitesse, \mathbb{P} le tenseur de contraintes PK1 des particules et $\Pi_{0ab} = \frac{\mu}{\rho_0} (-\bar{c}_{ab} \vartheta_{ab} + 2 \vartheta_{ab}^2)$ un terme de *viscosité artificielle* permettant à l'algorithme de modéliser des problèmes de type chocs/impact [3]. Ici ϑ_{ab} représente la vitesse relative des deux particules, projetée sur le vecteur \mathbf{x}_{ab} , $\mathbf{v}_{ab} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$, $\bar{\rho}_0 = (\rho_{0a} + \rho_{0b})/2$ est la densité moyenne du matériau et $\bar{c}_{ab} = (c_a + c_b)/2$ la célérité du son dans le matériau. Le coefficient μ est un facteur scalaire positif représentant l'effet de viscosité dynamique, généralement fixé entre $1 \leq \mu \leq 4$.

3 Formulation SPH pour les coques épaisses

La formulation SPH adaptée pour les structures minces de type coque, seule la surface moyenne de la coque est modélisée par une couche unique de particules pour représenter la structure. Chaque particule possèdera trois degrés de liberté (ddl) de type translation (u_x, u_y, u_z) et deux ddl de type rotation (θ_x, θ_y) dans le plan moyen tangent à la coque.

Soit une coque d'épaisseur t , dans laquelle on repère une particule p sur la surface moyenne de la coque (Fig. 1), par son vecteur position X_p . Le vecteur position X d'un point q situé à une distance ζ de la particule p , peut être donné par

$$X(\xi, \eta, \zeta) = X_p(\xi, \eta) + \zeta V(\xi, \eta) \quad \text{avec} \quad \zeta \in \left\{-\frac{t}{2}, +\frac{t}{2}\right\} \quad (5)$$

où $V(\xi, \eta)$ est le vecteur fibre épaisseur au niveau de la particule p . Le champ de déplacement U du point q peut être calculé de façon similaire

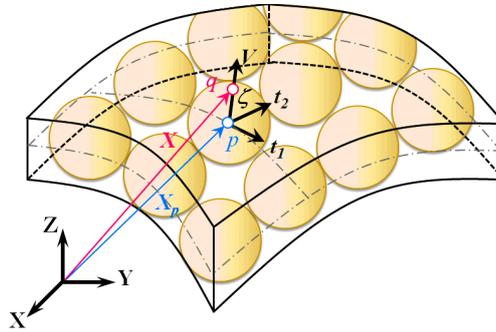


FIGURE 1 – Cinématique SPH de coques épaisses

$$U(\xi, \eta, \zeta) = U_p(\xi, \eta) + \zeta U_n(\xi, \eta) \quad (6)$$

Pour la formulation de coques, il est nécessaire d'exprimer les déformations et les contraintes dans le repère tangent local orthonormé $\{t_1, t_2, n\}$, pour cela on définit la matrice $\mathbb{Q} = [t_1; t_2; n]$ en tout point q .

En utilisant Eq.(5), le vecteur gradient dX peut être exprimé en terme de $d\xi = \{d\xi, d\eta, d\zeta\}$

$$dX = \mathbb{F} d\xi \quad (7)$$

avec $\mathbb{F} = [a_{1\xi}; a_{2\xi}; a_{3\xi}]$ le tenseur gradient de déformations exprimé en fonction des vecteurs de la base covariante ou naturelle $a_{1\xi} = X_{p,\xi} + \zeta V_{,\xi}$, $a_{2\xi} = X_{p,\eta} + \zeta V_{,\eta}$, $a_{3\xi} = V$. Le tenseur de déformations de Green-Lagrange exprimé dans la base curviligne, peut être obtenu par $\mathbb{E} = \mathbb{C}^T \mathbb{E}_c \mathbb{C}$ avec $\mathbb{C} = \mathbb{F}^{-1} \mathbb{Q}$ et \mathbb{E}_c le tenseur GL dans la base covariante. Ce dernier tenseur peut être décomposé en deux parties : une partie constante dans l'épaisseur \mathbb{E}_m associée aux effets de membrane et de cisaillement transversal et une partie linéaire dans l'épaisseur \mathbb{E}_f associée aux effets de flexion.

L'équation d'équilibre dynamique des efforts est ensuite exprimée dans la configuration de référence par

$$\rho_0 \ddot{U} = \nabla_0 \cdot \mathbb{P}^T \quad (8)$$

Les équations d'équilibre des moments permettent de calculer les accélérations angulaires

$$I \ddot{\theta} = \nabla_0 \cdot \mathbb{M}_0^T + T_0 \quad (9)$$

avec $T = \{T_\eta, -T_\xi, 0\}^T$, $\mathbb{M}_0 = J \mathbb{C} \mathbb{M} \mathbb{Q}^T$ et $T_0 = J \mathbb{Q}^T T$.

4 Résolution non linéaire en dynamique explicite

Dans cette étude, nous utilisons un schéma d'intégration explicite en temps afin de résoudre les équations d'équilibre Eq.(8) et Eq.(9). Nous pouvons ainsi obtenir à chaque pas de temps Δt , le vecteur incrément de déplacement ΔU et le vecteur incrément de rotations $\Delta \theta$.

Notons cependant que les vitesses angulaires $\dot{\theta}$ à différents pas de temps n'appartiennent pas au même espace tangent et ne sont donc pas additives. Il devient alors nécessaire d'adopter la matrice orthogonal \mathbb{W} afin d'actualiser $\dot{\theta}$ en tenant compte des grandes rotations, par

$$\dot{\theta}_{t+\Delta t} = \mathbb{W}(\Delta\theta)(\dot{\theta}_t + \Delta t \ddot{\theta}_t) \quad (10)$$

avec $\mathbb{W}(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbb{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \Xi + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \theta \times \theta$, $\theta = \|\theta\|$ et Ξ est le tenseur antisymétrique pour lequel θ est le vecteur axial. La mise à jour du vecteur pseudo normal n est faite par l'utilisation de la formule de Rodrigues

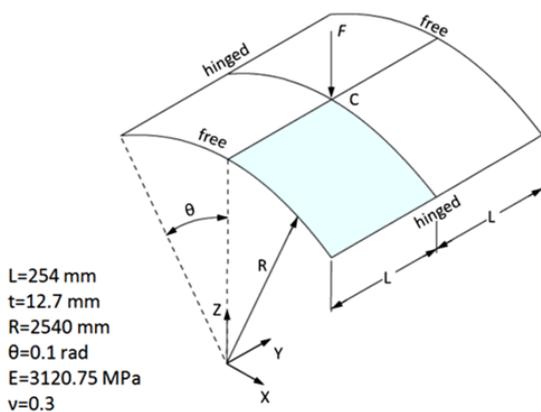
$$n_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} \cdot n^0 \quad (11)$$

5 Applications numériques

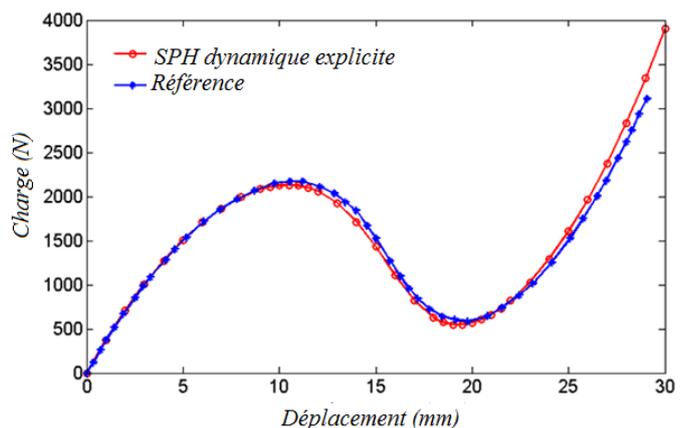
Dans cette section, nous présentons l'application de méthode SPH coque exposé ci-haut à travers deux exemples numériques en utilisant une résolution de type dynamique explicite. Les résultats obtenus sont comparés avec des solutions de référence et à ceux obtenus par le logiciel ABAQUS[®].

5.1 Analyse non linéaire géométrique d'un panneau cylindrique

La première application concerne l'analyse non linéaire géométrique d'un panneau cylindrique soumis à une charge concentrée en son centre comme le montre la figure 2-a. Ce benchmark a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs en raison de la présence d'un point limite en flambement. Le pilotage de type longueur d'arc est utilisé dans cette application afin de déceler le trajet complet de chargement. En raison de la symétrie du problème, seul un quart du panneau est modélisé à l'aide d'une seule couche de 21×21 particules dans la méthode SPH-coque. Dans nos simulations, le déplacement W_C du point central C , est contrôlé à partir de 0 jusqu'à 30mm , avec un accroissement linéaire jusqu'à atteindre 100% de la charge complète en un temps total de 3ms .



a) Géométrie et caractéristiques



b) Courbe charge-déplacement SPH vs. EF

FIGURE 2 – Panneau cylindrique

La courbe charge-déplacement obtenue en utilisant la méthode SPH-coque basée sur la méthode dynamique explicite est donnée à la figure 2-b et par rapport à la solution de référence en Klinkel [5]. Comme on peut le constater d'après la figure 2-b, la prédiction du trajet de déformation par la méthode SPH-coque est en très

bon accord avec la solution de référence. La valeur du déplacement critique obtenu en utilisant la méthode SPH-coque correspond à $W_C = 10.5\text{mm}$, ce qui est seulement de 1.78% d'erreur par rapport à la solution de référence de Klinkel [5].

Nous montrons sur la figure 3-a, la configuration déformée au voisinage du point limite, obtenue par la méthode SPH-coque. Cette configuration déformée est identique à celle obtenue par la méthode EF à l'aide de l'élément de coque S4R de ABAQUS explicite, comme indiqué sur la figure 3-b.

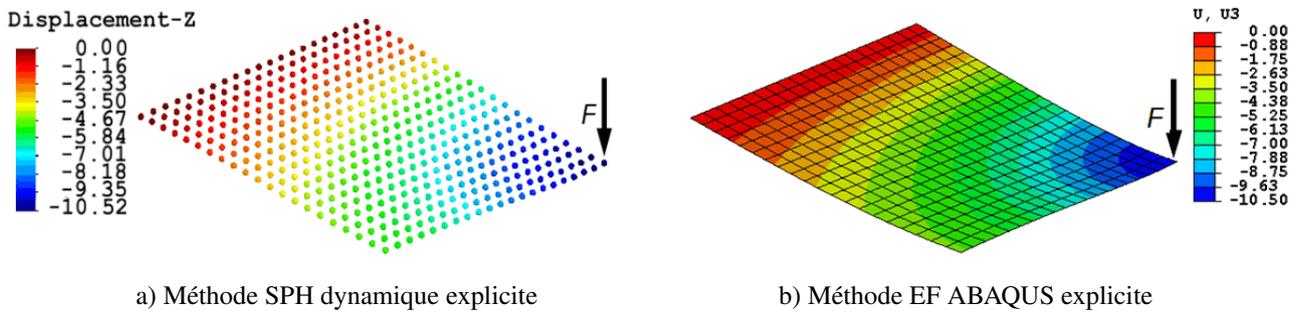


FIGURE 3 – Déformées du 1/4 de panneau au voisinage du point limite

5.2 Plaque encastree soumise à un moment de flexion

Dans ce benchmark, une plaque élancée est encastree d'un côté et soumise à un moment fléchissant appliqué sur le côté opposé, comme montré sur la figure 4. La solution analytique de ce problème est donnée par la formule classique d'Euler [8] $\kappa = M/EI$, où κ est la courbure et M est le moment de flexion.

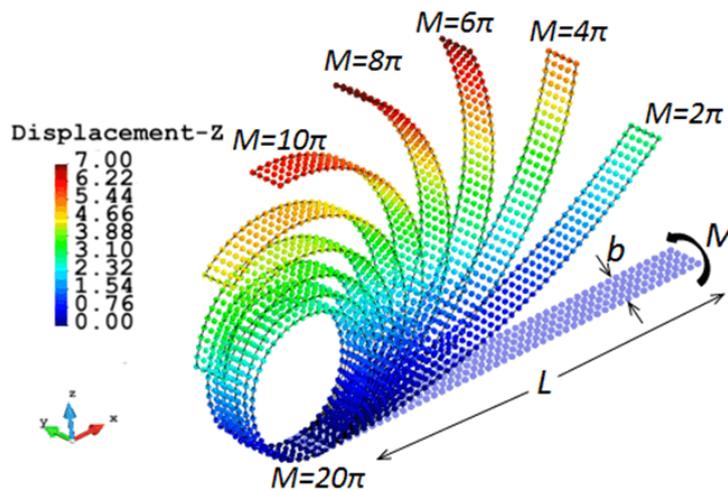


FIGURE 4 – Configurations initiale et déformées obtenues par la méthode SPH

Les données géométriques et de matériau de la plaque sont comme suit : longueur $L = 10\text{cm}$, largeur / épaisseur $b = t = 1\text{cm}$, module d'Young $E = 1200\text{N/cm}^2$, coefficient de Poisson $\nu = 0$. Pour les propriétés choisies, la valeur du moment de flexion qui transformera la plaque en un anneau circulaire complet est $M = 2\pi EI/L$. La plaque a été discrétisée en utilisant seulement une couche de 50×5 particules dans la méthode SPH-coque, où les configurations intermédiaires déformées sont représentées sur la figure 4. A des fins de comparaison, la même plaque a été modélisée en utilisant le code ABAQUS avec un maillage EF de 50×5 éléments de coque S4R.

Les déplacements obtenus par la méthode SPH-coque à l'extrémité chargée de la plaque sont représentés sur la figure 5 et comparés à ceux obtenus par EF en utilisant le logiciel ABAQUS. Comme nous pouvons le constater, le trajet de chargement de la plaque obtenu en utilisant notre méthode SPH-coque montre un comportement

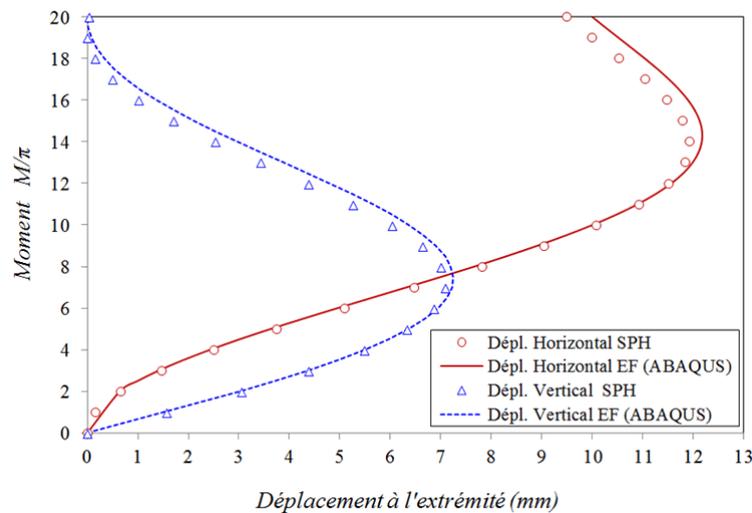


FIGURE 5 – Courbe charge-déplacement SPH vs. EF

fortement non linéaire de la solution en raison de la très grande rotation engendrée jusqu'à 2π . La solution estimée par la méthode SPH-coque est très proche de la solution EF, et cela même avec une discrétisation grossière formée par une seule couche de 50×5 particules. Ceci témoigne de l'efficacité et de la robustesse de la méthode SPH développée pour l'analyse des coques en comportement non linéaire géométrique.

6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail, l'analyse non linéaire géométrique de structures minces en utilisant une formulation SPH de type coque. Les deux principaux inconvénients de la méthode SPH classique ont été éliminés à l'aide de fonctions noyau corrigées et d'une FLT. En adoptant le principe de Reissner-Mindlin, un modèle SPH coque a été élaboré reproduisant le comportement d'une coque modélisée par une seule couche de particules placées dans sa surface moyenne. La bonne qualité des résultats obtenus à travers de nombreux exemples, prouve que la méthode SPH peut constituer une réelle alternative à la méthode EF.

Références

- [1] T. Belytschko., Y. Guo, W. K. Liu and S.P. Xiao. A unified stability analysis of meshless particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 48 pp. 1359–1400.
- [2] J.K. Chen, J.E. Beraun, T.C. Carney, A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction, *Internat. J. Numer. Meth. Engrg.* 1999, 46, pp. 231–252.
- [3] R.A. Gingold, J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars. *MonthlyNotice of the Royal Astronomical Society.* 1977(181), pp. 375-389.
- [4] J.P. Gray , J.J. Monaghan, R.P. Swift. SPH elastic dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2001, 190, pp. 6641–6662.
- [5] S. Klinkel, F. Gruttmann, W. Wagner. A continuum based 3D-shell element for laminated structures. *Comput. Struct.* 1999 (71), pp. 43–62.
- [6] P. Krysl and T. Belytschko. Analysis of thin shells by the element free Galerkin method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1996(33), pp. 3057-3078.
- [7] J. Limido, C. Espinosa, M. Salaün and J.L. Lacomme, SPH method applied to high speed cutting modelling. *Int. J. Mech. Sci.* 4 (7), 2007, pp. 898-908.
- [8] J.C. Simo, D.D. Fox, On stress resultant geometrically exact shell model. Part I : formulation and optimal parametrization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 72 Issue 3, pp. 267–304, 1989