



**HAL**  
open science

## Réponse vibratoire non-linéaire d'une poutre bi-encastree - Modèle analytique et recalage expérimental

Maxence Claeys, Jean-Pierre Lambelin, Jean-Jacques Sinou

### ► To cite this version:

Maxence Claeys, Jean-Pierre Lambelin, Jean-Jacques Sinou. Réponse vibratoire non-linéaire d'une poutre bi-encastree - Modèle analytique et recalage expérimental. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03439027

**HAL Id: hal-03439027**

**<https://hal.science/hal-03439027>**

Submitted on 22 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Réponse vibratoire non-linéaire d'une poutre bi-encastree

## Modèle analytique et recalage expérimental

M. CLAEYS<sup>a,b</sup>, J-P. LAMBELIN<sup>a</sup>, J-J. SINOU<sup>b</sup>

a. CEA/CESTA, 15 avenue des Sablières, CS60001, 33116 LE BARP

b. LTDS UMR 5513, Ecole Centrale Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, F-69134 ECULLY cedex

### Résumé :

*Ce document présente l'étude de la réponse vibratoire non-linéaire d'une poutre en acier encastree à ses deux extrémités et soumise à des excitations harmoniques. Un modèle analytique non-linéaire de la poutre prenant en compte des conditions d'encastrement non-idéales est développé. La détermination de la réponse dynamique non-linéaire est alors traitée par deux approches non-linéaires : une méthode de développement multi-échelles et une technique de balance harmonique. Après un recalage du modèle physique vis-à-vis d'un nombre restreint de paramètres, les résultats théoriques sont comparés à des résultats expérimentaux.*

### Abstract :

*In this paper, the nonlinear vibration of a clamped-clamped steel beam is investigated. A nonlinear analytical model of the beam has been developed taking into account non ideal boundary conditions. This dynamic problem has been solved by both the method of Multiple Scales and the Harmonic Balance Method, and then compared to experimental results. A physical model with a few parameters has been updated. The updated model enabled a comparison between the non-linear numerical response of the system and experiments.*

**Mots clefs :** vibrations non-linéaires, approche expérimentale, techniques numériques non-linéaires

## 1 Introduction

La prise en compte des phénomènes non-linéaires et de leurs impacts sur le comportement vibratoire des systèmes reste à l'heure actuelle un problème ouvert et difficile à appréhender. Dans de nombreux cas, les approches linéaires apparaissent pourtant insuffisantes pour prédire correctement le comportement vibratoire des systèmes. Cette étude propose d'illustrer la mise en place d'une démarche non-linéaire complète basée à la fois sur des aspects expérimentaux, de modélisation et de résolution non-linéaire sur une structure simple (poutre en acier encastree à ses deux extrémités).

Le document se décompose de la façon suivante : dans une première partie, la structure étudiée et les essais réalisés sont présentés. Ensuite, le modèle analytique associé est développé. Dans une troisième partie, nous présentons deux méthodes non-linéaires de développement multi-échelles et de balance harmonique pour estimer la réponse non-linéaire du système. Enfin, la dernière section de l'étude s'intéresse au recalage des résultats numériques et corrélations avec les essais expérimentaux précédents.

## 2 Approche expérimentale

Le système considéré est composé d'une poutre, de dimensions 5 x 20 x 470 (en mm) comportant à chaque extrémité à un bloc cubique en acier de 100 mm de côté. Lors des essais vibratoires, le système est boulonné par l'intermédiaire de ces blocs sur le vibreur, comme indiqué en Figure 1(a) et 1(b). Le système est ainsi excité suivant la direction verticale par l'intermédiaire d'un mouvement sinusoïdal du vibreur, dont la fréquence varie au cours de l'expérience (excitation de type sinus balayé). L'accélération du plateau du vibreur est contrôlée afin de garder constante l'amplitude de sa composante harmonique au cours de l'essai.

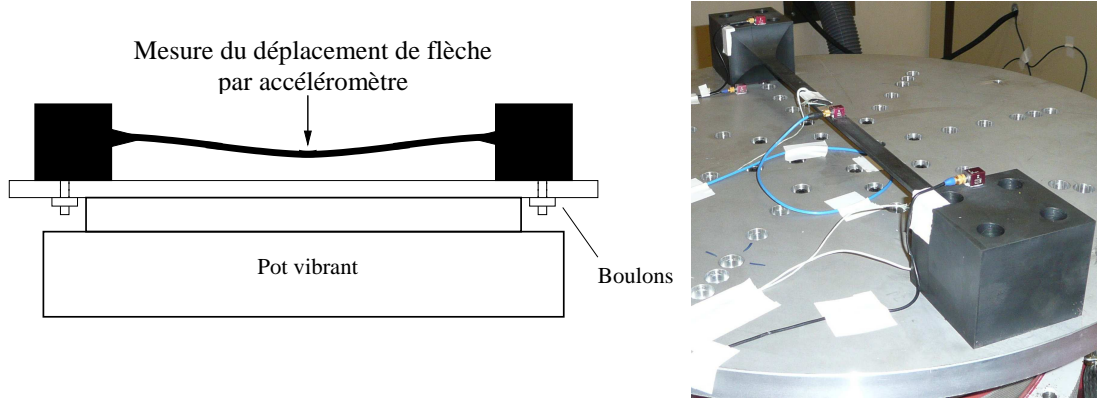


FIG. 1 – Schéma (a) et photographie (b) du montage expérimental.

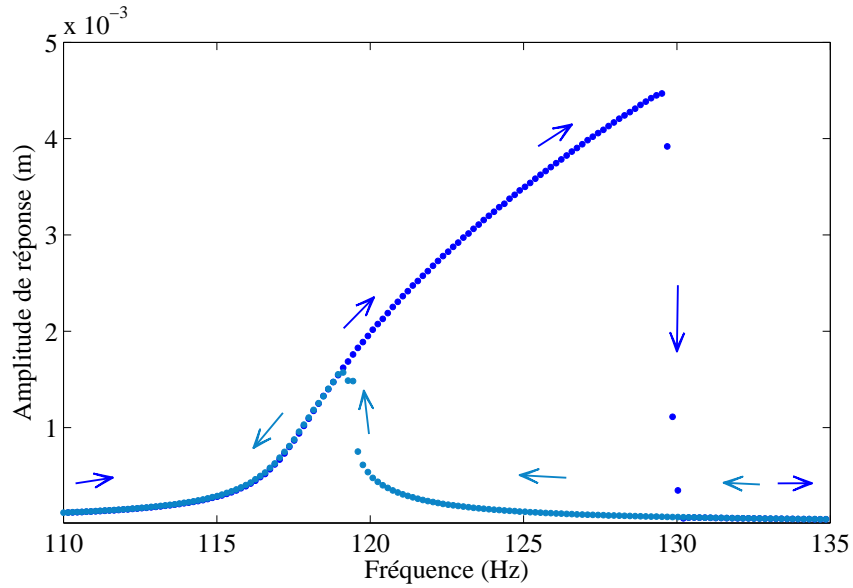


FIG. 2 – Résultats expérimentaux obtenus pour des balayages fréquentiels montants (●) et descendant (●) à accélération d’entrée constante à 6 m.s<sup>-2</sup>. On observe des sauts d’amplitude et un phénomène d’hystérésis ; le pic de résonance n’est pas le même selon le sens de balayage fréquentiel.

Divers essais en balayages montants et descendants autour de la première fréquence propre de la poutre (à 121 Hz) sont ainsi réalisés. Pour finir, l’accélération au centre de la poutre (comme indiqué en Figure 1(a)) est mesurée. La réponse du système est considérée comme étant la différence entre l’accélération au point de mesure et celle de l’excitateur.

### 3 Modèle analytique

On considère un modèle de poutre à une dimension avec  $u$  et  $w$  respectivement les déplacements horizontaux et verticaux des points de la ligne neutre de cette dernière. Le caractère non-linéaire du problème vient de la prise en compte des termes géométriques de grands déplacements. En suivant la démarche présentée par A.H. Nayfeh [1] et à cause du faible rapport épaisseur/longueur de la poutre, l’équation dynamique du système peut s’écrire sous la forme :

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \rho S a_{excit} \cos(\Omega t) + T(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \forall x \in [0, L] \tag{1}$$

où  $T(t)$  correspond à la force de tension dans la poutre. Cette dernière est constante en fonction de l’abscisse et vaut :

$$T(t) = ES \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \quad \forall x \in [0, L] \tag{2}$$

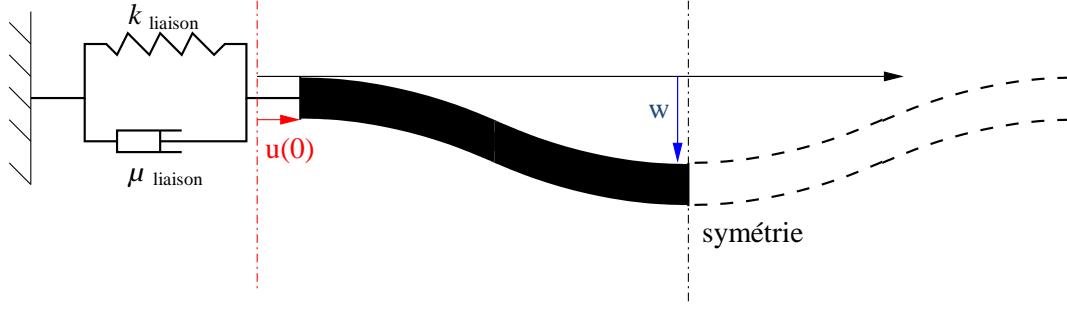


FIG. 3 – Schéma du modèle analytique avec les conditions aux limites non idéales.

Des conditions aux limites non-idéales au niveau de l'encastrement sont introduites, ainsi qu'une condition de symétrie au centre de la poutre ( $x=L$ ) :

$$T(t) = k_{liaison} \cdot u(0, t) + \mu_{liaison} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) \quad (3)$$

$$w(0, t) = 0; \frac{\partial w}{\partial t}(0, t) = 0; u(L, t) = 0; \frac{\partial w}{\partial t}(L, t) = 0; \frac{\partial^3 w}{\partial t^3}(L, t) = 0 \quad (4)$$

Il est alors possible d'exprimer le déplacement horizontal  $u(0,t)$  en fonction du déplacement vertical  $w$ . Dans ce calcul nous ne prenons pas en compte le terme  $\mu_{liaison} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(0, t)$  qui est négligeable devant  $k_{liaison} \cdot u(0, t)$ . Ainsi, le problème dynamique final considéré ne comporte plus qu'un seul champ de déplacement  $w(x,t)$  et se met sous la forme :

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \rho S a_{excit} \cos(\Omega t) + f_{nl} \left( w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

## 4 Simulations non-linéaires

Afin d'estimer la réponse vibratoire non-linéaire du système précédemment modélisé, des méthodes non-linéaires peuvent être mises en place. Dans cette section, nous proposons d'explicitier brièvement la technique de développement multi-échelles [2] et la méthode de balance harmonique [3].

### 4.1 Développement multi-échelles

Dans un premier temps, nous proposons de traiter le problème par la méthode de développement multi-échelles, comme cela a déjà pu être détaillé pour une poutre encastrée-libre [4]. Toutes les grandeurs sont adimensionnées (notées avec un  $\sim$ ). On décompose la flèche  $\tilde{w}$  et le temps  $\tilde{t}$  en fonction d'un petit paramètre  $\varepsilon$  arbitraire.

$$\tilde{w} = \varepsilon \tilde{w}_1 + \varepsilon^2 \tilde{w}_2 + \varepsilon^3 \tilde{w}_3 + \dots \quad (6)$$

$$\tilde{t} = \tilde{t}_0 + \varepsilon \tilde{t}_1 + \varepsilon^2 \tilde{t}_2 + \dots \quad (7)$$

Le terme non-linéaire étant proportionnel en amplitude à  $\tilde{w}^3$ , il est d'ordre  $\varepsilon^3$ . Les termes d'amortissement et d'excitation sont adimensionnés de sorte qu'ils soient également d'ordre  $\varepsilon^3$ . Après dérivation par rapport à  $\tilde{t}$ , les équations dynamiques selon les ordres  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^3$  s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}_0^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_3}{\partial \tilde{t}_0^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}_3}{\partial \tilde{x}^4} = -2 \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}_0 \partial \tilde{t}_2} - \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}_0} + \tilde{a}_{excit} + \left( \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{x}^2} \quad (9)$$

L'équation (8) nous permet de décrire  $\tilde{w}_1$  comme une solution du problème harmonique, dont l'amplitude complexe est indéterminée. En utilisant le fait que le problème harmonique traité dans notre cas est auto-adjoint, ce dernier admet des solutions si la projection du second membre de l'équation (9) sur  $\tilde{w}_1$  est nulle.

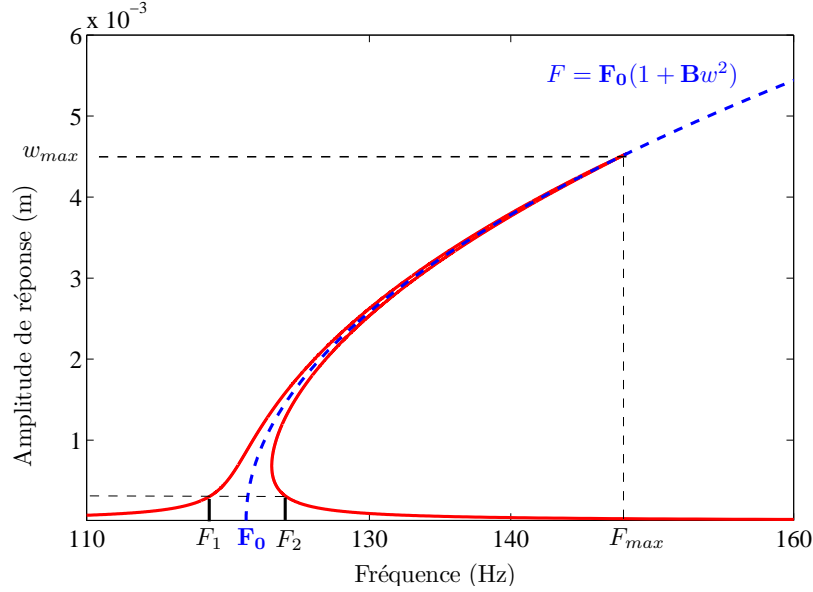


FIG. 4 – Courbe de réponse fréquentielle paramétrique obtenue par développement multi-échelles.

On obtient alors une condition de solvabilité qui définit l'amplitude complexe de  $\tilde{w}_1$ . Il existe plusieurs expressions de cette condition de solvabilité selon la fréquence à laquelle on excite le système. Le système ayant été excité autour de son premier mode propre, on considère que la distance  $\frac{F_{excit}-F_0}{F_0}$  (nommée detuning) est d'ordre  $\varepsilon^2$ . Cette hypothèse permet d'obtenir une équation de la courbe de réponse fréquentielle au voisinage de la résonance. En exprimant cette équation en fonction de grandeurs dimensionnées mesurables, on obtient l'équation (10) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \left( 1 + \mathbf{B} w^2 \pm \mathbf{C} \sqrt{\left( \frac{a_{excit}}{(2\pi\mathbf{F}_0)^2 w} \right)^2 - (\mathbf{D} - \mathbf{E} w^2)} \right) \quad (10)$$

où  $\mathbf{F}$  représente la fréquence d'excitation,  $\mathbf{F}_0$  représente la fréquence propre du premier mode et  $w$  représente l'amplitude de déplacement de la flèche au point de mesure.  $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  s'expriment en fonction des paramètres physiques du modèle.

## 4.2 Technique de balance harmonique

La méthode de balance harmonique [3] permet d'approximer la réponse vibratoire stationnaire d'un système non-linéaire. Pour appliquer cette technique à notre cas d'étude, l'équation dynamique (5) du système est projetée sur la forme spatiale du premier mode propre. On obtient ainsi un problème non-linéaire à 1 degré de liberté de la forme :

$$K \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + D \cdot \frac{dw}{dt} + M \cdot w = \Gamma a_{excit} \cos(\Omega t) + \Delta \cdot \left( k_{liaison} \cdot w^3 + 2 \cdot \mu_{liaison} \cdot w^2 \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \right) = f_{nl}(t) \quad (11)$$

A noter qu'il est possible d'enrichir le problème en projetant l'équation (5) sur d'autres modes propres de la structure, on obtiendrait un problème non-linéaire à plusieurs degrés de liberté. La méthode de balance harmonique propose alors de rechercher la solution non-linéaire stationnaire du système (à  $\Omega$  fixé) sous la forme d'une série de Fourier tronquée :

$$w(t) = B_0 + \sum_{k=1}^m (A_k \sin(k\Omega t) + B_k \cos(k\Omega t)) \quad (12)$$

où  $\Omega$  correspond à la pulsation du système.  $A_k$  et  $B_k$  (pour  $k=1\dots m$ ) définissent les coefficients de Fourier de la réponse non-linéaire et  $m$  l'ordre maximal de la série de Fourier retenu. De même, les efforts non-linéaires sont approximatés sous la forme d'une série de Fourier tronquée :

$$f_{nl}(t) = C_0 + \sum_{k=1}^m (S_k \sin(k\Omega t) + C_k \cos(k\Omega t)) \quad (13)$$

$S_k$  et  $C_k$  (pour  $k=1\dots m$ ) définissent les coefficients de Fourier des efforts non-linéaires. Ainsi, on transforme ainsi un problème de dimension infinie en temps en un problème non-linéaire discret qui peut être résolu par une méthode de Newton. À chaque ordre  $k$ , on a à résoudre le système non-linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} K - (k\Omega)^2 M & -k\Omega D \\ k\Omega D & K - (k\Omega)^2 M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k \\ C_k \end{bmatrix} \quad (14)$$

L'une des difficultés survient lors de l'estimation des coefficients de Fourier  $S_k$  et  $C_k$  du terme non-linéaire. Elle peut être résolue par une technique AFT (Alternating Frequency Time) : partant des coefficients de Fourier de  $w$ , il s'agit de projeter  $w$  sur une base temporelle par transformée de Fourier inverse. Le terme non-linéaire est alors calculé sur cette base temporelle par l'intermédiaire de l'expression analytique associée. Enfin, une transformée de Fourier permet d'obtenir les coefficients de Fourier  $S_k$  et  $C_k$  des efforts non-linéaires. L'ensemble de cette procédure peut être synthétisé de la façon suivante :

$$[B_0 \ A_1 \ B_1 \ \dots \ A_m \ B_m] \xrightarrow{FFT^{-1}} (w(t), \dot{w}(t)) \Rightarrow f_{nl}(w(t), \dot{w}(t), \Omega, t) \xrightarrow{FFT} [C_0 \ S_1 \ C_1 \ \dots \ S_m \ C_m]$$

Pour finir, afin de reproduire le pic de résonance obtenu expérimentalement et analytiquement par la méthode des développements multi-échelles, une méthode de continuation est proposée. Cette dernière va permettre de retrouver l'ensemble du pic de résonance raidissant (parties stables et instables). Dans notre étude, une formulation de pseudo-arclength est mise en place.

## 5 Résultats et comparaison essai-calculs

Dans un premier temps, un recalage du modèle analytique par la méthode multi-échelles à partir de la réponse non-linéaire est réalisé. En effet, dans le modèle analytique proposé, trois paramètres physiques sont à estimer et par conséquent à recalibrer à partir des essais expérimentaux. En considérant l'expression analytique de la courbe de résonance non-linéaire obtenue à partir du développement multi-échelles (4), les paramètres  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  sont directement liés aux caractéristiques des courbes de réponse fréquentielle. Avec les notations de la figure 4, on a les relations suivantes :

$$\mathbf{F}_0 = \frac{F_1 + F_2}{2} \quad (15)$$

$$\text{Detuning} = \frac{F_{\max} - \mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_0} = \mathbf{B} w_{\max}^2 \quad (16)$$

$$\text{Inverse du facteur de surtension} = \frac{a_{\text{excit}}}{(2\pi\mathbf{F}_0)^2 w_{\max}} = \mathbf{D} + \mathbf{E} w_{\max}^2 \quad (17)$$

À partir de chaque courbe expérimentale que nous avons obtenue, le detuning et le facteur de surtension peuvent être identifiés pour ensuite permettre le recalage des paramètres  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  par régressions linéaires.

Ce recalage montre aussi l'importance de la modélisation des liaisons. Dans le cas d'un encastrement idéal, avec la condition  $u(0,t) = 0$ , le paramètre  $\mathbf{B}$  est maximal. Expérimentalement, on identifie  $\mathbf{B}_{\text{exp}} / \mathbf{B}_{\text{encastrement}} = 44\%$ . La prise en compte d'une liaison non idéale est ainsi indispensable à une bonne modélisation non-linéaire. Aussi, dans le modèle présenté, l'introduction d'une dissipation linéaire dans la liaison permet de rendre compte du fait que la dissipation du système augmente avec le niveau d'excitation. Ce paramètre supplémentaire nous permet d'avoir une bonne corrélation essai-calcul pour une large plage de niveaux d'excitation (de 1 à 10 m.s<sup>-2</sup>), comme le montre la figure 5.

Pour finir, la réponse du modèle recalé précédemment a été également simulée par la technique de balance harmonique. Les deux résultats de simulation sont très proches, moins de 3% d'écart en tout point de la courbe. La très bonne corrélation entre simulation numérique et essais expérimentaux, quelle que soit le niveau d'excitation et la méthode de simulation, traduit une bonne modélisation et caractérisation des effets non-linéaires dans le système poutre étudié.

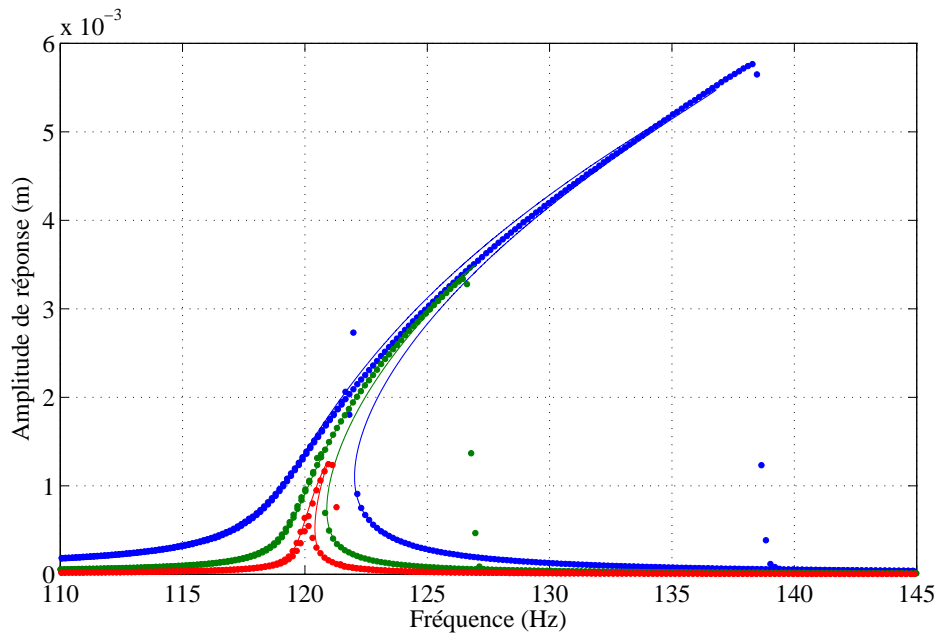


FIG. 5 – Comparaison essai (points) - calcul par développement multi-échelles (trait plein) pour 3 niveaux d'excitation. 1 m.s<sup>-2</sup> (rouge), 3 m.s<sup>-2</sup> (vert) et 10 m.s<sup>-2</sup> (bleu).

## 6 Conclusion

Cette étude illustre une démarche allant de la modélisation du système, la réalisation d'essais expérimentaux, jusqu'à la mise en place de techniques numériques non-linéaires et comparaisons essais-calculs. La méthode de développement multi-échelles nous a permis d'obtenir une expression analytique de la courbe de réponse fréquentielle, un recalage simple du modèle non-linéaire étant alors réalisable. Une seconde méthode de balance harmonique a également permis d'illustrer la possibilité de retrouver les courbes de résonance non-linéaire par approximation de la réponse et des efforts non-linéaires sous la forme d'une série de Fourier tronquée. Pour finir, ce travail met l'accent sur l'importance de la modélisation des liaisons pour retranscrire correctement une non linéarité géométrique et ainsi aboutir à une corrélation essais-calcul tout à fait satisfaisante.

## Remerciements

Les auteurs remercient tous les agents du CEA/CESTA qui ont rendu ce projet possible, et plus particulièrement l'équipe des essais qui a fourni des résultats expérimentaux d'une grande qualité.

## Références

- [1] Nayfeh A.H. Nonlinear transverse vibrations of beams that properties that vary along the length, *Journal of the Acoustical Society of America*, 53(3), 1973
- [2] Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, 1979
- [3] Sinou J-J. Nonlinear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings, *Mechanism and Machine Theory*, 44(9), 1713-1732, 2009
- [4] Tabbador M., Influence of nonlinear boundary conditions on the single-mode response of a cantilever beam, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 4915-4931, 2000.