



**HAL**  
open science

## Modélisation et optimisation de l'atténuation du rayonnement acoustique de plaques minces par dispositifs piézoélectriques shuntés

Da Pereira, Luciano Silva, Walid Larbi, Jean-François Deü

► **To cite this version:**

Da Pereira, Luciano Silva, Walid Larbi, Jean-François Deü. Modélisation et optimisation de l'atténuation du rayonnement acoustique de plaques minces par dispositifs piézoélectriques shuntés. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-03439021

**HAL Id: hal-03439021**

**<https://hal.science/hal-03439021v1>**

Submitted on 22 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation et optimisation de l'atténuation du rayonnement acoustique de plaques minces par dispositifs piézoélectriques shuntés

L. PEREIRA DA SILVA, W. LARBI, J.-F. DEÛ

*Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Conservatoire National des Arts et Métiers, Case courrier 2D6R10, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France*

## Résumé :

*Ce travail concerne la modélisation et l'optimisation de la réduction du rayonnement acoustique de plaques minces dans le domaine de basses fréquences à partir d'éléments piézoélectriques shuntés. Dans un premier temps, les modes de vibration les plus rayonnants de la structure sont identifiés par l'évaluation de la puissance acoustique rayonnée. Ensuite, ces modes sont atténués par l'utilisation de pastilles piézoélectriques connectées à des circuits électriques de type shunt résonants. Des modèles éléments finis d'ordre réduit sont développés pour la structure (plaque avec pastilles piézoélectriques) de façon à prendre en compte les couplages électromécaniques de façon efficace. Ces modèles discrets, basés sur une formulation originale, sont ensuite utilisés pour optimiser le système électromécanique, dans le but de maximiser l'atténuation des vibrations et du bruit rayonné. Pour cela, une procédure d'optimisation, basée sur une technique d'optimisation topologique, est développée pour déterminer les géométries et les emplacements des pastilles piézoélectriques permettant de maximiser le coefficient de couplage électromécanique modal entre les éléments piézoélectriques et le mode mécanique qu'il s'agit d'amortir, ceci de façon indépendante du choix des composants du circuit électrique. Un exemple numérique est finalement présenté afin d'évaluer et d'analyser notre approche.*

## Abstract :

*This work concerns the modeling and optimization of the acoustic radiation reduction of thin structures in the low frequency range using shunted piezoelectric elements. Firstly, the structure most radiating vibration modes are identified by evaluating the sound power radiated. Then, these modes are attenuated by using piezoelectric patches connected to resonant shunted circuits. Reduced-order finite element models are developed for the structure (plate with piezoelectric patches) in order to take into account the electromechanical coupling in an efficient way. These discrete models, based on an original finite element formulation, are then used to optimize the electromechanical system in order to maximize the reduction of vibration and radiated noise. An optimization procedure, based upon topology optimization techniques, is thus developed to determine the geometry and the placement of the piezoelectric patches. This procedure aims to maximize the modal electromechanical coupling factor between the piezoelectric elements and the vibration mode to damp, independently of the choice of electric circuit components. Finally, a numerical example is presented in order to evaluate and analyze our approach.*

**Mots clefs :** rayonnement acoustique, éléments finis, réduction des vibrations, amortissement par dispositifs piézoélectriques shuntés, optimisation topologique.

## 1 Introduction

Dans le cadre de la lutte contre les nuisances sonores et vibratoires, ce travail porte sur la réduction du rayonnement acoustique de plaques minces en basses fréquences par des dispositifs piézoélectriques shuntés. L'approche proposée consiste à déterminer les modes de vibration les plus rayonnants de la structure à partir du calcul de la puissance acoustique rayonnée. L'atténuation de ces modes est ensuite réalisée grâce à l'utilisation de pastilles piézoélectriques collées à la plaque et connectées à des circuits de type shunt résonnant. Une formulation éléments finis, initialement proposée dans [5], est utilisée pour modéliser ce problème électromécanique. Cette formulation, qui ne contient qu'un seul couple de variables électriques par

patch (la différence de potentiel et la charge électrique dans une électrode), permet de prendre en compte des conditions aux limites électriques réalistes en imposant notamment de façon directe l'équipotentialité sur les surfaces des électrodes. De plus, elle permet d'intégrer facilement dans la formulation du problème électromécanique les équations liées aux circuits électriques connectés aux patches piézoélectriques. Un modèle d'ordre réduit est ensuite proposé pour résoudre à moindre coût le problème couplé. Ce modèle est basé sur la projection du système complet sur une base réduite construite à partir des modes de la structure avec patches piézoélectriques court-circuités. Ensuite, une procédure d'optimisation, basée sur la technique d'optimisation topologique présentée dans [4], est développée pour déterminer les géométries et les emplacements des pastilles piézoélectriques permettant de maximiser le coefficient de couplage électromécanique modal entre les éléments piézoélectriques et le mode mécanique qu'il s'agit d'amortir (ceci de façon indépendante du choix des composants du circuit électrique). Des exemples numériques sont finalement présentés afin de valider et d'illustrer les performances de l'approche.

## 2 Rayonnement acoustique de plaques minces bafflées

Dans un premier temps, l'approche proposée consiste à déterminer les modes de vibration les plus rayonnants de la structure à partir du calcul de la puissance acoustique rayonnée. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour calculer la puissance acoustique rayonnée en espace semi-infini par une structure plane bafflée, comme par exemple par transformée spatiale de Fourier [3], ou grâce à l'utilisation de méthodes numériques comme les éléments des frontières [3], ou encore à partir de la méthode des sources élémentaires [1-3]. Pour la méthode des sources élémentaires, qui est utilisée dans la suite de ce travail, le rayonnement total de la structure est la somme des rayonnements des  $N$  sources considérées comme des pistons élémentaires en oscillation harmonique. Pour une pulsation  $\omega$ , la puissance acoustique rayonnée par une plaque bafflée peut alors être calculée par :

$$W(\omega) = \{\mathbf{v}_n\}^H [\mathbf{R}(\omega)] \{\mathbf{v}_n\} \quad (1)$$

où les éléments du vecteur  $\{\mathbf{v}_n\}$  sont les amplitudes complexes de la vitesse normale de chacune des sources élémentaires, l'exposant H fait référence à la transposée conjuguée et  $[\mathbf{R}(\omega)]$  désigne la matrice de résistance acoustique (réelle, symétrique et définie positive). Pour une surface plane bafflée,  $[\mathbf{R}(\omega)]$  peut être déterminée analytiquement (voir par exemple [1-3]).

Cette méthode est valable pour n'importe quelle surface plane bafflée. Seule la connaissance de la géométrie de la surface et de la distribution de vitesse sont nécessaires, quelles que soient les conditions aux limites. Dans ce travail, une approche éléments finis est utilisée pour évaluer ce champ de vitesses en prenant un nombre suffisant d'éléments rayonnants discrets sur la plaque selon la plus petite longueur d'onde considérée.

## 3 Modèle électromécanique

Pour atténuer les vibrations des modes rayonnants de la structure, des pastilles piézoélectriques connectées à des circuits de type shunt résonant (inductance en série avec une résistance) sont utilisées. La formulation éléments finis de ce problème électromécanique, décrite dans [5], est présentée ci-dessus. Outre le déplacement mécanique de la structure, cette formulation utilise un seul couple de variables électriques par patch piézoélectrique : la différence de potentiel et la charge électrique. Ce choix permet de prendre en compte des conditions aux limites électriques réalistes en imposant notamment de façon directe l'équipotentialité sur les surfaces des électrodes. De plus, il permet d'intégrer facilement dans la formulation du problème les équations liées aux circuits électriques connectés aux patches piézoélectriques.

### 3.1 Formulation éléments finis du problème électromécanique

On considère une structure élastique équipée de  $P$  patches piézoélectriques. Chaque patch est connecté à un circuit résonant composé d'une résistance  $R_e^{(p)}$  en série avec une inductance  $L_e^{(p)}$ . Soient  $\{\mathbf{U}\}$  le vecteur des déplacements nodaux de la structure,  $\{\mathbf{Q}\} = [Q^{(1)} Q^{(2)} \dots Q^{(P)}]^T$  et  $\{\mathbf{V}\} = [V^{(1)} V^{(2)} \dots V^{(P)}]^T$  les vecteurs des charges et différences de potentiels aux bornes des  $P$  patches piézoélectriques. Après discrétisation par éléments finis, l'équation matricielle du problème électromécanique, dans le domaine fréquentielle, est :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_c \\ -\mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

où  $[\mathbf{M}_m]$  et  $[\mathbf{K}_m]$  sont les matrices de masse et de rigidité de la structure avec pastilles piézoélectriques;  $[\mathbf{K}_c]$  est la matrice de couplage électromécanique;  $[\mathbf{K}_e] = \text{diag}([C^{(1)} \dots C^{(P)}])$  est une matrice diagonale composée des  $P$  capacités des patches piézoélectriques et  $\{\mathbf{F}\}$  est le vecteur des forces nodales appliquées sur la structure.

Le vecteur des différences de potentiels  $\{\mathbf{V}\}$  est lié au vecteur des charges électriques  $\{\mathbf{Q}\}$  par la relation :

$$\omega^2 [\mathbf{L}_e] \{\mathbf{Q}\} - j\omega [\mathbf{R}_e] \{\mathbf{Q}\} + \{\mathbf{V}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3)$$

où  $j = \sqrt{-1}$  et où  $[\mathbf{R}_e] = \text{diag}([R_e^{(1)} \dots R_e^{(P)}])$  et  $[\mathbf{L}_e] = \text{diag}([L_e^{(1)} \dots L_e^{(P)}])$  sont des matrices diagonales contenant les  $P$  résistances et inductances des circuits shuntés.

En combinant les deux équations précédentes et en considérant l'amortissement mécanique (matrice  $[\mathbf{C}_m]$ ), on trouve le système matriciel suivant écrit uniquement en fonction des vecteurs des degrés de libertés  $\{\mathbf{U}\}$  et de  $\{\mathbf{Q}\}$  :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_e^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

qui correspond à un problème de structure élastique équipée de patches piézoélectriques connectés à des shunts résonnants.

### 3.2 Modèle d'ordre réduit

On propose dans ce paragraphe un modèle d'ordre réduit pour la résolution du système matriciel obtenu dans la section précédente. L'approche consiste à projeter le système sur une base réduite construite à partir des modes de la structure avec patches piézoélectriques court-circuités. Ces modes sont solutions de l'équation  $[\mathbf{K}_m - \omega_i^2 \mathbf{M}_m] \{\boldsymbol{\phi}_i\} = \{\mathbf{0}\}$  où  $\omega_i$  et  $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$  représentent la pulsation propre et le vecteur propre relatifs au  $i$ -ème mode. Ainsi, après projection sur une base tronquée de  $\bar{N}$  modes  $[\boldsymbol{\Phi}] = [\boldsymbol{\phi}_1 \dots \boldsymbol{\phi}_{\bar{N}}]$ , on obtient le système réduit de taille  $\bar{N} \times P$  :

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M}_m \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}_m \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T) \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{K}_e^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

où  $\{\mathbf{q}\}$  est le vecteur des déplacements généralisés tel que  $\{\mathbf{U}(\omega)\} = [\boldsymbol{\Phi}] \{\mathbf{q}(\omega)\}$ .

Cette équation matricielle peut être décomposée en  $\bar{N}$  oscillateurs mécaniques et  $P$  oscillateurs électriques couplés par  $\bar{N}$  coefficients de couplages électromécaniques définis pour le  $i$ -ème mode par :

$$\{\chi_i^{(1)} \chi_i^{(2)} \dots \chi_i^{(P)}\} = \{\boldsymbol{\phi}_i^T\} [\mathbf{K}_c] \quad (6)$$

Outre la réduction considérable de la taille du système matriciel à résoudre, un autre intérêt de cette approche réside dans le fait que la base de projection considérée peut être facilement obtenue à partir d'un calcul élastique donc en utilisant n'importe quel code éléments finis standard.

## 4 Optimisation

Pour augmenter l'amortissement de la structure et donc l'atténuation du rayonnement acoustique, un point important est d'optimiser le système dans son ensemble, c'est-à-dire la position et la géométrie des pastilles ainsi que le choix des composants du circuit électrique du shunt. Il a été montré, dans [5-6], que ces deux optimisations, mécanique et électrique, peuvent être réalisées séparément. De plus il a été prouvé dans [5] que les seuls paramètres à maximiser sont les coefficients de couplages modaux électromécaniques définis pour le  $i$ -ème mode et  $p$ -ème pastille par  $k_i^{(p)} = \chi_i^{(p)} / (\sqrt{C^{(p)}} \omega_i)$ . Puisque les valeurs optimales des composants électriques du shunt sont uniquement fonctions des coefficients de couplage modaux et des caractéristiques des pastilles et de la structure, elles peuvent être calculées dans un second temps. Ainsi, en premier lieu un algorithme d'optimisation basé sur la technique d'optimisation topologique, présentée dans [4], est développé pour déterminer les géométries et les emplacements des pastilles piézoélectriques permettant de maximiser le coefficient de couplage électromécanique modal entre les éléments piézoélectriques et le mode mécanique qu'il s'agit d'amortir, ceci de façon indépendante du choix des composants du circuit électrique. Dans un deuxième temps, les composants électriques du shunt sont calculés à partir des relations présentées dans [6].

L'optimisation topologique consiste à trouver la répartition de matière et les phases de vide dans le domaine de conception, permettant d'optimiser une fonction objective donnée. La résolution d'un problème d'optimisation topologique peut passer par la discrétisation du domaine à optimiser sous forme d'éléments finis. Une densité topologique variant entre 0 et 1 est alors attribuée à chacun des éléments. Le problème est ensuite optimisé en utilisant une méthode de pénalités pour forcer les densités des éléments vers 0 (pas de matière) ou vers 1 (présence de matière). Dans le cadre de notre étude, l'objectif est de déterminer la distribution de matériaux piézoélectrique sur la surface de la structure de façon à maximiser les coefficients de couplages modaux électromécaniques pour les modes à atténuer (modes les plus rayonnants).

Dans ce travail, la solution optimisée est obtenue en utilisant une programmation linéaire séquentielle [4].

## 5 Implémentation numérique

La figure 1.a résume l'approche proposée par ce travail. Dans un premier temps, les modes de vibration les plus rayonnants de la structure sont identifiés par l'évaluation de la puissance acoustique rayonnée, en utilisant la méthode des sources élémentaires (section 2). Ensuite, ces modes sont atténués par l'utilisation de pastilles piézoélectriques connectées à des circuits électriques de type shunt résonants. Le modèle éléments finis proposé dans la section 3 est utilisé pour résoudre le problème électromécanique. Enfin, un algorithme d'optimisation topologique est utilisé pour déterminer les géométries et les emplacements des pastilles piézoélectriques, dans le but de maximiser l'atténuation des vibrations et du bruit rayonné.

La procédure ci-dessus a été implémentée numériquement en utilisant le code de calcul Nastran en association avec le logiciel Matlab et le langage de programmation Awk, comme le montre la figure 1.b.

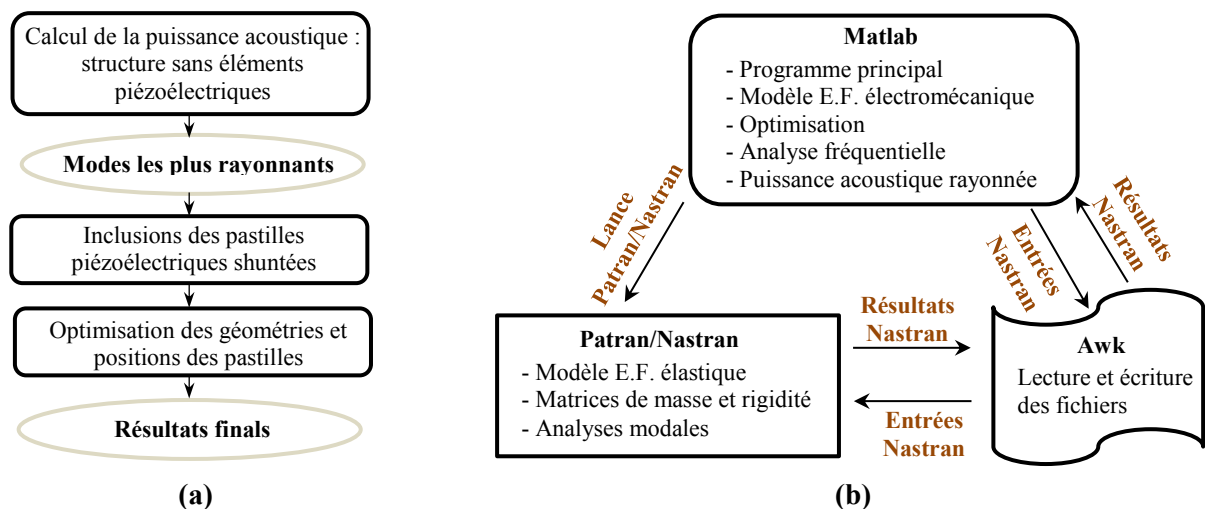


FIG. 1 – (a) Procédure développée. (b) Implémentation numérique.

## 6 Exemple numérique

Pour valider et illustrer l'approche proposée dans ce travail, on considère une plaque rectangulaire bafflée en aluminium ( $E = 70$  GPa,  $\gamma = 0.33$ ,  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup>) de dimensions  $0.4$  m  $\times$   $0.6$  m  $\times$   $0.002$  m avec deux renforts également en aluminium de dimensions  $0.05$  m  $\times$   $0.6$  m  $\times$   $0.002$  m fixés sur la face inférieure de la plaque. La position des renforts ainsi que les conditions aux limites du problème sont données dans la figure 2.a. Un maillage avec 1536 éléments quadrangles à 4 nœuds (en théorie de Reissner-Mindlin) est utilisé pour les calculs éléments finis. La plaque est excitée par deux forces ponctuelles d'amplitude constante et unitaire (1 N) dont la position est donnée dans la figure 2.a. De plus, la plaque rayonne dans un milieu semi-infini rempli d'air ( $\rho_f = 1.2$  kg/m<sup>3</sup> et  $c_f = 340$  m/s).

Le calcul des modes propres du système ainsi que de la puissance acoustique rayonnée dans la bande de fréquence  $[0, 430]$  Hz (courbe en trait continu de la figure 3.a) montrent que les modes 1, 6 et 14 sont les plus rayonnants pour l'excitation appliquée.

Pour réduire le rayonnement acoustique de ces modes, trois pastilles piézoélectriques en PIC151 (voir [5] pour les propriétés mécaniques) d'épaisseur 0.5 mm sont collées sur la plaque. La position ainsi que les géométries de ces pastilles ont été déterminées en utilisant l'algorithme d'optimisation topologique

développé. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 2.c et 2.d. Il faut noter que pour l'algorithme d'optimisation, des zones spécifiques sur la surface supérieure de la plaque ont été prédéfinies pour chacun des 3 modes à atténuer (voir la figure 2.b). De plus, l'aire de chaque pastille a été limitée à  $60 \text{ cm}^2$ .

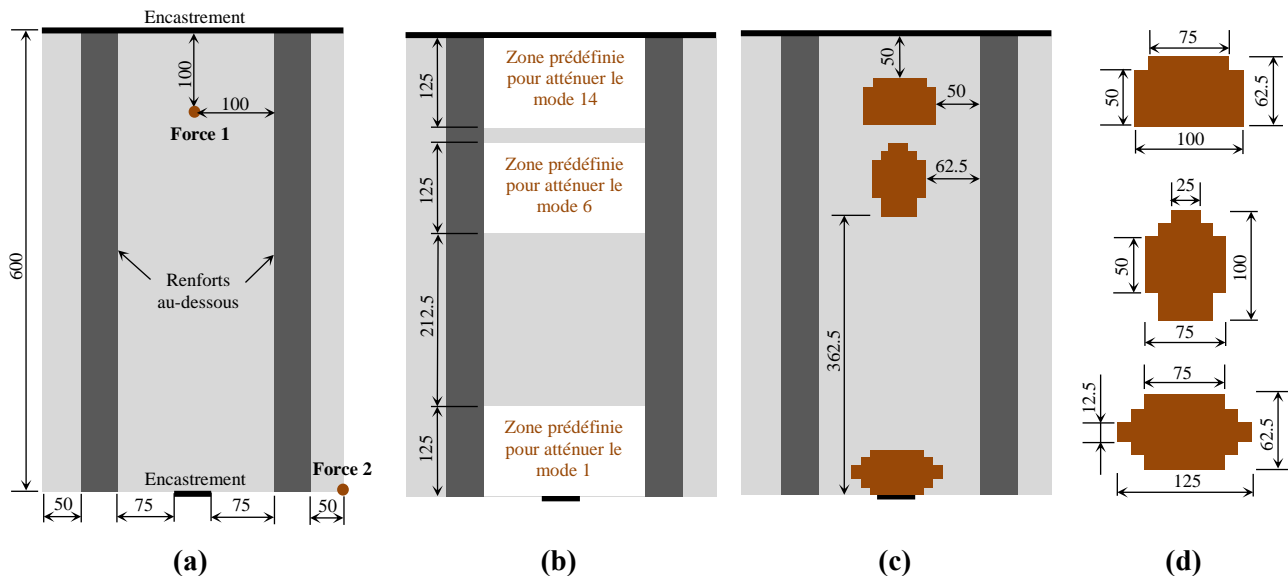


FIG. 2 – (a) Description initial du problème. (b) Zones prédéfinies pour l'optimisation topologique. (c) Application des éléments piézoélectriques sur la plaque. (d) Géométries des pastilles piézoélectriques. (dimensions en mm).

Chacun des trois patches est connecté à un circuit résonant pour atténuer les trois modes les plus rayonnants. Les paramètres électriques ( $R_e^{(p)}$  et  $L_e^{(p)}$ ,  $p = 1, 2, 3$ ) de ces circuits sont calculés à partir des formules données dans [6] pour maximiser l'atténuation. La réponse du système est obtenue par projection modale sur une base construite à partir des quarante premiers modes de la plaque avec les patches en court-circuit. En plus, l'amortissement mécanique est introduit par un coefficient d'amortissement modal  $\xi = 0.005$  pour tous les modes retenus dans la base modale réduite.

La figure 3 présente le rayonnement acoustique du système. Cette figure montre une comparaison de la réponse fréquentielle du système pour trois cas d'études : (i) plaque sans patch, (ii) plaque avec patches en court-circuit et (iii) plaque avec patches shuntés. Cette comparaison illustre la performance du dispositif piézoélectrique sur l'atténuation des vibrations des modes le plus rayonnants. Ceci est dû à la conversion d'une partie de l'énergie de déformation des patches piézoélectriques en une énergie électrique et à sa dissipation en chaleur grâce aux circuits électriques.

## 7 Conclusion

Cette étude a été consacrée au développement de modèles numériques couplés pour tester l'efficacité de systèmes piézoélectriques shuntés sur la réduction du rayonnement acoustique de structures minces dans le domaine des basses fréquences. La technique proposée consiste à déterminer les modes de vibration les plus rayonnants de la structure à partir du calcul de la puissance acoustique rayonnée en champ proche. L'atténuation de ces modes est ensuite réalisée grâce à l'utilisation de patches piézoélectriques collés à la plaque et connectés à des circuits de type shunt résonant. Un modèle éléments finis d'ordre réduit original a été développé et appliqué au problème de réduction du rayonnement acoustique d'une plaque mince avec renforts. Un algorithme d'optimisation topologique a été développé pour déterminer les géométries et les emplacements des pastilles piézoélectriques, dans le but de maximiser l'atténuation des vibrations et du bruit rayonné. Les perspectives de ce travail portent sur l'extension de l'approche à des systèmes complexes et à sa validation expérimentale.

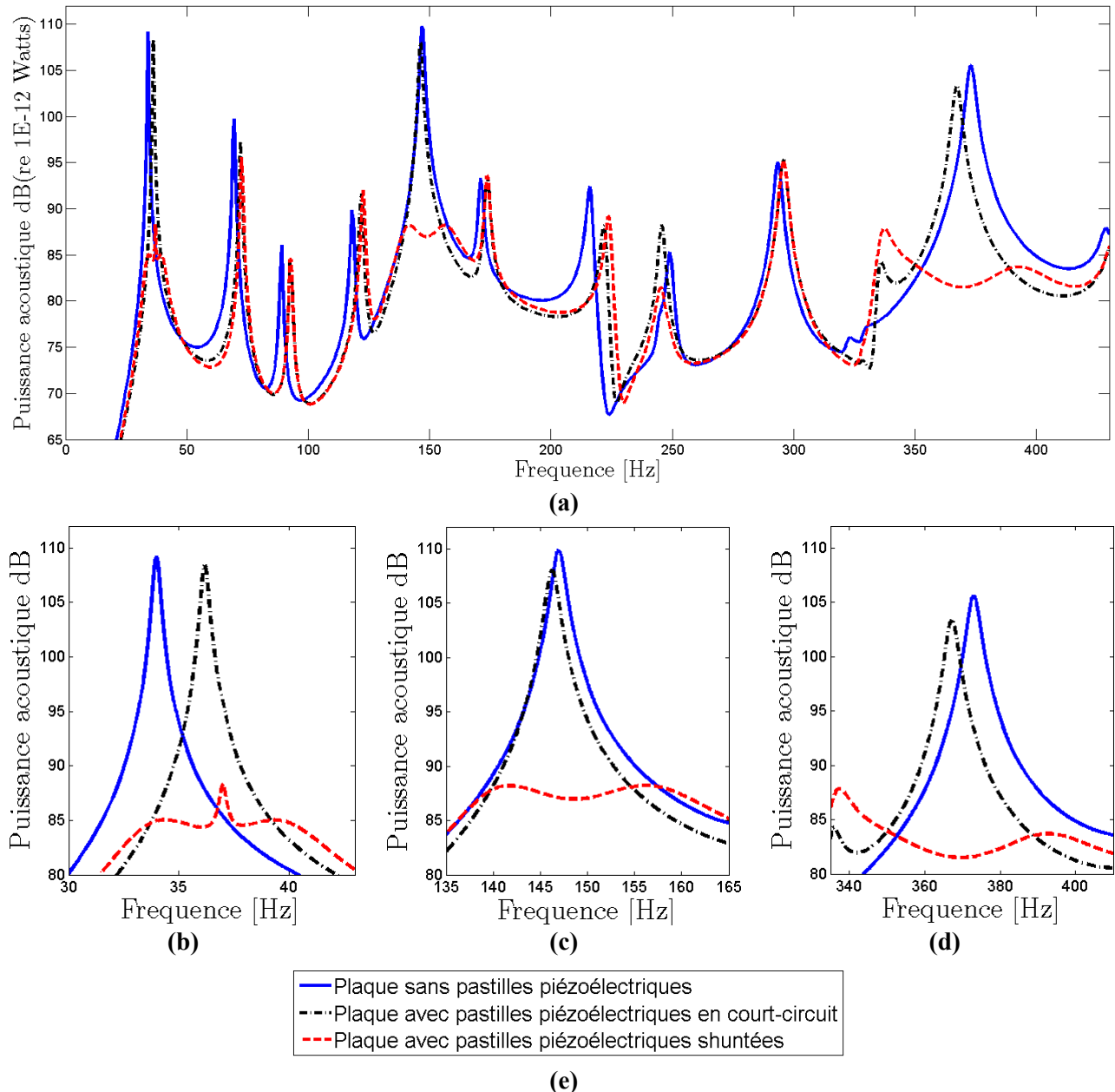


FIG. 3 – (a) Puissance acoustique rayonnée dans la bande fréquentielle d'intérêt. (b) Atténuation du mode 1 (c) Atténuation du mode 6. (d) Atténuation du mode 14. (e) Légende.

## References

- [1] da Silva L.P., Deü J.-F., Larbi W., Trindade M.A., An efficient finite element approach for reduction of structural vibration and acoustic radiation by passive shunted piezoelectric systems. World Congress on Computational Mechanics, São Paulo, Brazil, 2012.
- [2] Elliott S. J., Johnson M. E., Radiation modes and the active control of sound power, Journal of Acoustical Society of America, 94(4), 2194-2204, 1993.
- [3] Filippi P. J. T., Acoustique générale, SFA, Les éditions de physique, 1994.
- [4] Silva E. C. N., Nishiwaki S., Design of piezoelectric transducers using topology optimization, Smart Materials and Structures, 8, 350-364, 1999.
- [5] Thomas O., Deü J.-F., Ducarne J., Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: Efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 80(2), 235-268, 2009.
- [6] Thomas O., Ducarne J., Deü J.-F., Performance of piezoelectric shunts for vibration Reduction, Smart Materials and Structures, 21(1), 015008, 2012.