

**CORRIGENDUM ET ADDENDUM À L'ARTICLE *FINITUDE  
HOMOLOGIQUE DES FONCTEURS SUR UNE CATÉGORIE  
ADDITIVE ET APPLICATIONS***

AURÉLIEN DJAMENT AND ANTOINE TOUZÉ

RÉSUMÉ. On corrige une borne inexacte dans deux énoncés de [2] et améliore, au théorème 1, un autre énoncé de cet article dont on supprime une hypothèse superflue.

ABSTRACT. We correct a wrong bound in two statements of [2] and improve, in theorem 1, another statement of this article in which we remove an unnecessary assumption.

Nous commençons par rectifier le corollaire 5.7, puis le théorème 5.9 de [2]. Ces corrections n'ont pas d'incidence sur les autres résultats de l'article. En effet, la partie (4) du corollaire 5.7 — la seule de l'énoncé qui diffère de la version originelle — est utilisée uniquement pour établir le théorème 5.9. Ce théorème est quant à lui seulement employé pour démontrer le théorème 6.14, et le théorème 5.9 corrigé en permet la même utilisation pour le théorème 6.14.

**Corollaire 5.7 corrigé.** *Si l'anneau  $k$  contient un corps premier, il existe un complexe de chaînes  $Q_*^k$  de foncteurs  $\mathbf{Ab} \rightarrow k\text{-Mod}$  possédant les propriétés suivantes.*

- (1) *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n^k$  est un facteur direct du foncteur  $V \mapsto k[V^{2^n}]$ .*
- (2) *L'homologie de  $Q_*^k$  en degré nul est isomorphe à  $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Z}} k$ .*
- (3) *Si  $k$  est de caractéristique nulle, l'homologie de  $Q_*^k$  est nulle en degrés strictement positifs.*
- (4) *Si  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ , l'homologie de  $Q_*^k$  est isomorphe en chaque degré non nul à une somme directe finie de foncteurs du type  $-\otimes_{\mathbb{Z}} k$  ou  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ . Le plus bas degré strictement positif où le foncteur  $-\otimes_{\mathbb{Z}} k$ , resp.  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ , apparaît comme facteur direct de l'homologie de  $Q_*$  est  $2p - 2$ , resp. 1.*

Seul le dernier point diffère de [2, cor. 5.7], qui comporte une erreur de degré. La méthode de démonstration est inchangée : elle suit de [2, prop. 5.6] et de la formule des coefficients universels. L'erreur de degré se répercute sur le théorème 5.9 de [2], qui se rectifie comme suit. On rappelle que la condition  $(T_{n,p})$  qui apparaît dans l'énoncé est introduite et discutée dans [2, § 5.1].

---

Les auteurs remercient Christine Vespa d'avoir attiré leur attention sur [3, Appendix to Lecture IV].

**Théorème 5.9 corrigé.** *Soit  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Supposons que  $k$  est un anneau de caractéristique  $p$  première. Alors  $\mathcal{A}$  vérifie la propriété  $(T_{n,p})$  si et seulement si le foncteur d'inclusion  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  préserve la propriété  $pf_i$  pour tout  $i \leq n$*

Ce résultat peut se démontrer comme [2, th. 5.9], en utilisant la version corrigée du corollaire 5.7. Nous donnerons toutefois ci-dessous une autre démonstration, plus rapide et plus satisfaisante, de ce théorème, à partir du théorème 1 ci-après.

On peut par ailleurs s'affranchir de l'hypothèse  $(T_{n-2p+2,p})$  dans l'énoncé de [2, th. 5.11], obtenant le résultat plus fort suivant :

**Théorème 1.** *L'inclusion  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  préserve la propriété  $pf_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .*

Ce résultat se déduit du théorème suivant :

**Théorème 2.** [3, th. 4.10] *Il existe un complexe de chaînes  $C_\bullet$  d'endofoncteurs de la catégorie des groupes abéliens tel que :*

- (1) *pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n$  est une somme directe finie de foncteurs de la forme  $V \mapsto \mathbb{Z}[V^{\oplus r}]$ , où  $r \in \mathbb{N}$ ;*
- (2) *l'homologie de  $C_\bullet$  est isomorphe à l'identité en degré 0 et nulle en degrés strictement positifs.*

Le théorème 2 est attribué par Scholze, dans [3], à Deligne (non publié) ; il figure aussi (avec un point de vue un peu différent) dans Breen [1, § 3]. Pour la complétude de notre travail, nous en esquissons une démonstration avec la terminologie de [2] (voir [3, Appendix to Lecture IV] pour les détails).

*Esquisse de démonstration du théorème 2.* En utilisant [2, prop. 5.6 et cor. 1.6], on montre par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que le foncteur I d'inclusion dans  $\mathbf{Ab}$  de la sous-catégorie additive pleine  $\mathbf{ab}$  des groupes abéliens libres de rang fini appartient à  $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathbf{ab}; \mathbb{Z}))$  (cf. la démonstration du sens direct de [2, th. 5.9]). Ainsi, I possède une résolution projective  $P_\bullet$ , donc chaque terme  $P_n$  est une somme directe finie de foncteurs de la forme  $V \mapsto \mathbb{Z}[V^r]$  pour différents entiers naturels  $r$ . L'extension de Kan à gauche de  $P_\bullet$  le long de l'inclusion  $\mathbf{ab} \hookrightarrow \mathbf{Ab}$  fournit un complexe de chaînes  $C_\bullet$  d'endofoncteurs de  $\mathbf{Ab}$  qui vérifie les conditions requises (cf. [3], pages 29-30, démonstration de l'implication THEOREM 4.14  $\Rightarrow$  THEOREM 4.10).  $\square$

*Démonstration du théorème 1.* Comme les foncteurs  $\mathcal{A}(a, -)$  (où  $a$  parcourt les objets de  $\mathcal{A}$ ) constituent une famille génératrice d'objets projectifs de type fini de la catégorie abélienne  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ , il suffit de montrer qu'ils vérifient la propriété  $pf_\infty$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ , d'après [2, prop. 1.9(1)]. Si  $C_\bullet$  est le complexe donné par le théorème 2, alors  $C_\bullet \circ \mathcal{A}(a, -)$  est une résolution projective de  $\mathcal{A}(a, -)$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  dont les termes sont de type fini, ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Démonstration du théorème 5.9 corrigé.* On peut se contenter de montrer le résultat lorsque  $k = \mathbb{Z}/p$ . En effet, le foncteur d'inclusion  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  préserve la propriété  $pf_i$  si et seulement si  $\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} k$  appartient à  $\mathbf{pf}_i(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$  pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$ , par [2, prop. 1.9(1)]. Or cette condition équivaut à l'appartenance de  $\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$  à  $\mathbf{pf}_i(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p))$  grâce à l'isomorphisme  $\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} k \simeq (\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}/p} k$  et à [2, prop. 3.3], puisque  $k$  est une  $\mathbb{Z}/p$ -algèbre fidèlement plate.

Dans le diagramme commutatif (à isomorphisme près) d'inclusions

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p) \\
 \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})
 \end{array}$$

le foncteur  $\delta$  préserve la propriété  $pf_i$  pour tout  $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  par le théorème 1, de même que le foncteur  $\gamma$ , grâce aux suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)] \xrightarrow{p} \mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)] \rightarrow (\mathbb{Z}/p)[\mathcal{A}(a, -)] \rightarrow 0.$$

En utilisant [2, prop. 1.9(2)], on voit que les foncteurs  $\gamma$  et  $\delta$  *détectionnent* également la propriété  $pf_i$  pour tout  $i$ . Il s'ensuit que  $\alpha$  préserve la propriété  $pf_i$  pour  $i \leq n$  si et seulement s'il en est de même pour  $\beta$ , ce qui est exactement la condition  $(T_{n,p})$  de [2, § 5.1] (sous la forme  $(T_{n,p}^1)$ ), d'où le théorème.  $\square$

#### RÉFÉRENCES

1. Lawrence Breen, *Extensions du groupe additif*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1978), no. 48, 39–125. MR 516914
2. Aurélien Djament and Antoine Touzé, *Finitude homologique des foncteurs sur une catégorie additive et applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **376** (2023), no. 2, 1113–1154. MR 4531671
3. Peter Scholze, *Lectures on Condensed Mathematics*, <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf>.

CNRS, UNIV. SORBONNE PARIS NORD, UMR 7539 - LABORATOIRE ANALYSE, GÉOMÉTRIE ET APPLICATIONS, 99 AV. J.-B. CLÉMENT, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE

*Email address:* [djament@math.cnrs.fr](mailto:djament@math.cnrs.fr)

*URL:* <https://djament.perso.math.cnrs.fr/>

UNIV. LILLE, CNRS, UMR 8524 - LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ, F-59000 LILLE, FRANCE

*Email address:* [antoine.touze@univ-lille.fr](mailto:antoine.touze@univ-lille.fr)

*URL:* <https://pro.univ-lille.fr/antoine-touze/>