



HAL
open science

Finitude homologique des foncteurs et applications

Aurélien Djament, Antoine Touzé

► **To cite this version:**

Aurélien Djament, Antoine Touzé. Finitude homologique des foncteurs et applications. 2021. hal-03432809v1

HAL Id: hal-03432809

<https://hal.science/hal-03432809v1>

Preprint submitted on 17 Nov 2021 (v1), last revised 13 Jul 2023 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Finitude homologique des foncteurs et applications

Dédié à S. Betley, T. Pirashvili et L. Schwartz pour leurs contributions pionnières au sujet

Aurélien Djament et Antoine Touzé*

17 novembre 2021

Résumé

Nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un foncteur de longueur finie d'une catégorie additive vers des espaces vectoriels de dimensions finies possède une résolution projective dont les termes sont de type fini. Pour les foncteurs *polynomiaux*, nous étudions également une propriété de finitude homologique plus faible, qui s'applique à la stabilité homologique à coefficients tordus des monoïdes de matrices. Ces résultats s'inspirent de travaux de Schwartz et Betley-Pirashvili, qu'ils généralisent, et utilisent les décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive que nous avons récemment obtenues avec Vespa. Nous montrons également, en guise d'application, une propriété de finitude pour l'homologie stable de groupes linéaires sur des anneaux appropriés.

Abstract

We give sufficient conditions which ensure that a functor of finite length from an additive category to finite-dimensional vector spaces has a projective resolution whose terms are finitely generated. For *polynomial* functors, we study also a weaker homological finiteness property, which applies to twisted homological stability for matrix monoids. This is inspired by works by Schwartz and Betley-Pirashvili, which are generalised; this also uses decompositions *à la Steinberg* over an additive category that we recently got with Vespa. We show also, as an application, a finiteness property for stable homology of linear groups on suitable rings.

Mots clefs : présentation finie ; résolutions ; groupes d'extensions ; foncteurs polynomiaux ; support d'un foncteur ; catégories additives.

Classification MSC 2020 : 18A25, 18E10, 18G15, 20J06, 20M05 ; 18A40, 18E05, 18G31.

*Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille, France.

Introduction

L'étude des propriétés de finitude de l'homologie des groupes infinis constitue un problème classique [7, chap. VIII] notoirement difficile. Par exemple, on ne sait que depuis les années 1980, grâce au travail remarquable de Culler-Vogtmann [9, cor. 6.1.3], que l'homologie du groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe libre de rang fini est un groupe abélien de type fini. Ce résultat profond provient du fait que la représentation triviale de ces groupes possède la propriété pf_∞ (souvent notée FP_∞ dans la littérature anglophone), c'est-à-dire possède une résolution projective dont chaque terme est de type fini.

La condition pf_∞ équivaut à la commutation de foncteurs Ext aux colimites filtrantes; elle fait sens à ce titre dans les catégories abéliennes de Grothendieck, même en l'absence d'objets projectifs (voir la définition 1.1). Elle y a des applications importantes : finitude homologique (proposition 1.13), formules de Künneth (proposition 4.2).

Dans une catégorie *localement noethérienne* telle que les modules sur un anneau noethérien, les objets de type fini possèdent automatiquement la propriété pf_∞ . Mais les catégories de foncteurs de source additive, qui nous intéressent au plus haut chef, sont rarement localement noethériennes [14, pr. 11.1]. Et la noethérianité locale est difficile à établir dans les quelques cas où on peut la démontrer [35, 38].

L'objectif du présent article est d'établir que, même en l'absence de noethérianité locale, de larges classes d'objets fondamentaux des catégories de foncteurs de source additive possèdent la propriété pf_∞ . Nous étudions également une propriété psf_∞ , plus faible mais suffisante pour certaines applications.

Nous illustrons nos résultats par quelques applications : stabilité homologique des monoïdes de matrices sur un anneau quelconque (proposition 3.8), résultats de finitude homologique pour certains groupes linéaires $GL(A)$ (corollaire 6.22).

Signalons que les propriétés pf_∞ ou psf_∞ (avec des terminologies et points de vue variés) ont été étudiées par différents auteurs dans d'autres catégories de foncteurs que celles que nous considérons : Betley et Pirashvili [4, § 5] traitent de foncteurs sur les groupes libres de rang fini; de nombreux articles, tels Church-Ellenberg [8], traitent de foncteurs sur les ensembles finis avec injections (appelés aussi *FI*-modules).

Nous passons maintenant en revue de façon plus détaillée le contenu de l'article. Après des généralités, bien connues des experts mais développées en raison du manque de référence systématique, nous donnons des résultats pour les foncteurs dont la catégorie source est *additive*. Ils concernent souvent des foncteurs *polynomiaux*, notion fondamentale dont l'intérêt en topologie algébrique ou en théorie des représentations ne s'est pas démenti depuis son introduction au début des années 1950 par Eilenberg et MacLane [17]. Ils améliorent des résultats du début des années 1990, tels le *lemme de Schwartz* [21, pr. 10.1] pour les foncteurs polynomiaux entre espaces vectoriels sur un corps fini, qui en garantit la propriété pf_∞ dès qu'ils sont à valeurs de dimensions finies. Nous nommons d'ailleurs dans cet article *lemme de Schwartz généralisé* tout énoncé donnant la propriété pf_∞ ou psf_∞ pour des foncteurs polynomiaux sur une catégorie additive.

Notre principal résultat autour de la propriété psf_∞ , le théorème 3.4, amé-

liore pour sa part le théorème de Betley-Pirashvili [4, § 1, th. p. 710] sur la stabilité homologique à coefficients polynomiaux pour les monoïdes (multiplicatifs) de matrices sur un anneau arbitraire (qui peut se reformuler en termes de propriété psf_∞), donnant une borne de stabilité affine (proposition 3.8), plutôt qu'exponentielle dans [4]. Il suffit pour cela d'appliquer la méthode du lemme de Schwartz [21, § 10] au cas d'un anneau arbitraire à la source des foncteurs. En revanche, cela ne suffit pour obtenir la propriété pf_∞ pour des foncteurs polynomiaux que lorsque les groupes abéliens de morphismes de la catégorie source sont finis. Néanmoins, la méthode de Betley-Pirashvili [4], qui repose sur la construction cubique de MacLane [18], se prête à généralisation à de nombreuses catégories additives à la source. Elle permet d'étudier la propriété pf_∞ pour les foncteurs *additifs*, comme nous l'examinons à la section 5. Le passage à des foncteurs polynomiaux de degré supérieur, que nous abordons dans la section 6, requiert davantage d'hypothèses de finitude. Il s'opère à l'aide de résultats de structure des foncteurs polynomiaux, notamment le théorème de décomposition à la Steinberg pour les foncteurs polynomiaux simples établi par les auteurs et Vespa dans [14].

Le corollaire 6.22 utilise ces résultats pour montrer que l'homologie stable des groupes linéaires sur certains anneaux est de type fini en chaque degré.

En utilisant d'une part des résultats sur la linéarisation de foncteurs additifs établis à la section 7, qui reposent sur des méthodes simpliciales classiques dues à Dold, Kan et Puppe [16], et d'autre part sur le théorème de décomposition [14, th. 4.12] pour les foncteurs simples (non nécessairement polynomiaux) d'une catégorie additive vers des espaces vectoriels de dimensions finies, nous sommes en mesure de donner, dans la section 8, des conditions impliquant la propriété pf_∞ pour de tels foncteurs.

Dans l'appendice, nous donnons des exemples simples mais fondamentaux de catégories de foncteurs qui ne sont pas localement noethériennes, mais *cohérentes*, c'est-à-dire où tout foncteur de présentation finie vérifie automatiquement la propriété pf_∞ , tandis qu'existent des foncteurs de type fini mais pas de présentation finie.

Dans [12], nous montrons que de nombreux groupes de torsion ou d'extensions entre foncteurs simples sur une catégorie additive sont accessibles au calcul. Pour les groupes d'extensions, cela requiert souvent une hypothèse pf_∞ , que les résultats du présent article garantissent dans de nombreux cas.

Remerciements Une partie significative des résultats de cet article figurait dans des versions préliminaires de [14]. Nous sommes très reconnaissants à notre co-auteur de [14] Christine Vespa de nous avoir permis de les exposer ici.

Les auteurs ont bénéficié du soutien partiel de l'Agence Nationale de la Recherche, via le projet ANR ChroK (ANR-16-CE40-0003), le Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01), et, pour le premier auteur, le projet ANR AlMaRe (ANR-19-CE40-0001-01). Ils ne soutiennent pas pour autant le principe de l'ANR, dont ils revendiquent la restitution des moyens aux laboratoires sous forme de crédits récurrents.

Conventions

- Dans tout cet article, k désigne un anneau (unitaire, associatif) commutatif. Les produits tensoriels de base non spécifiée sont pris sur k .

- Si A est un anneau, on note $A\text{-Mod}$ (resp. $\text{Mod-}A$) la catégorie des A -modules à gauche (resp. à droite), et $\mathbf{P}(A)$ la sous-catégorie pleine de $A\text{-Mod}$ des modules projectifs de type fini.
- Si \mathcal{C} est une catégorie, on note $\mathcal{C}(x, y)$ l'ensemble des morphismes de source x et de but y dans \mathcal{C} . De plus, si t est un objet d'une catégorie \mathcal{C} et E un ensemble, on note $t[E]$ (resp. t^E) un coproduit (resp. produit) de copies de t indexées par E , lorsqu'il existe. Ce coproduit (resp. produit) peut être choisi de façon fonctorielle covariante en t , et fonctorielle covariante (resp. contravariante) en E .
- On nomme simplement *petite* une catégorie usuellement appelée *essentiellement petite*, c'est-à-dire possédant un squelette formant un ensemble. Tout au long de l'article, la lettre \mathcal{A} désigne une petite catégorie additive, et les lettres \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{C}' et \mathcal{D}' désignent des petites catégories.
- On désigne par \mathcal{E} et \mathcal{E}' des catégories de Grothendieck, c'est-à-dire des catégories abéliennes cocomplètes, possédant un générateur, et dans lesquelles les colimites filtrantes sont exactes. On rappelle qu'une catégorie de Grothendieck possède toujours des produits [33, chap. 3, cor. 7.10] et un cogénérateur injectif [33, chap. 3, th. 10.10 et lm. 7.12]. En particulier, on peut y définir des groupes d'extensions.
- On désigne par $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ la catégorie des foncteurs de source \mathcal{C} et de but \mathcal{E} . C'est une catégorie de Grothendieck. Lorsque $\mathcal{E} = A\text{-Mod}$, on notera cette catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; A)$ au lieu de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, A\text{-Mod})$.
- Si $\phi : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ est un foncteur entre petites catégories, on note $\phi^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}_2, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}_1, \mathcal{E})$ le foncteur de précomposition par ϕ . C'est un foncteur exact, qui préserve les limites et les colimites.
- On désigne par $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ la catégorie des foncteurs additifs de \mathcal{A} dans \mathcal{E} . C'est une catégorie de Grothendieck. Lorsque $\mathcal{E} = A\text{-Mod}$, on notera cette catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; A)$ au lieu de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, A\text{-Mod})$.

1 La propriété pf_n

Les objets de présentation finie donnent lieu depuis longtemps à des recherches systématiques, telles celles, fondatrices, d'Auslander [2]. La propriété de présentation finie *supérieure*, bien connue, a été étudiée largement dans les catégories de modules, notamment sur les algèbres de groupes [7, chap. VIII, § 4 et 5]. Elle semble toutefois avoir fait l'objet de peu de travaux systématiques dans le cadre plus général des catégories de Grothendieck, avant [6]. Nous ferons dans cette section les rappels nécessaires sur cette propriété, avant de nous concentrer sur le cas des catégories de foncteurs.

1.1 Cas des catégories de Grothendieck

Définition 1.1. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et X un objet d'une catégorie de Grothendieck \mathcal{E} . On dit que X est *de n -présentation finie* (en abrégé, pf_n) si pour toute petite catégorie filtrante I et tout foncteur $\Phi : I \rightarrow \mathcal{E}$, l'application canonique

$$\alpha_i(X, \Phi) : \operatorname{colim}_I \operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, -) \circ \Phi \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, \operatorname{colim}_I \Phi) \quad (1)$$

est bijective pour $i < n$ et injective pour $i < n + 1$.

On note $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$ la classe des objets de \mathcal{E} vérifiant la propriété pf_n .

La terminologie est motivée par la proposition 1.6 ci-après. Pour simplifier certains énoncés, on conviendra que tout objet de \mathcal{E} vérifie pf_n pour $n < 0$.

- Exemple 1.2.** (a) Les objets de 0-présentation finie sont les objets de type fini. Les objets de 1-présentation finie sont les objets de présentation finie.
(b) Tout objet projectif de type fini de \mathcal{E} appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{E})$.
(c) Si \mathcal{E} est localement noethérienne, tout objet de type fini de \mathcal{E} possède la propriété pf_∞ (voir par exemple [6, th. 4.7]).

Les propriétés suivantes sont bien connues ; elles s'obtiennent par des arguments formels d'algèbre homologique. La plupart d'entre elles peuvent se trouver dans [6], par exemple. Nous en omettrons donc la démonstration. Nous indiquons toutefois comment établir rapidement l'énoncé suivant, pour lequel [6, lm. 2.6] suppose une hypothèse supplémentaire superflue (\mathcal{E} localement de présentation finie).

Proposition 1.3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X un objet de \mathcal{E} . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. X appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$;
2. pour toute petite catégorie filtrante I et tout foncteur $\Phi : I \rightarrow \mathcal{E}$, l'application $\alpha_i(X, \Phi)$ est bijective si $i < n$;
3. pour toute petite catégorie filtrante I et tout foncteur $\Psi : I \rightarrow \mathcal{E}$ à valeurs injectives dans \mathcal{E} , l'application $\alpha_i(X, \Psi)$ est bijective si $i < n$.

Démonstration. Les implications $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sont évidentes ; montrons $3 \Rightarrow 1$. Supposons donc 3 satisfaite, et considérons un foncteur $\Phi : I \rightarrow \mathcal{E}$, où I est une petite catégorie filtrante. Alors Φ peut se plonger dans un foncteur Ψ à valeurs injectives — par exemple, $M^{\mathcal{E}(-, M) \circ \Phi}$, où M est un cogénérateur injectif de \mathcal{E} . On a un diagramme commutatif aux colonnes exactes

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{colim}_I \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^{i-1}(X, -) \circ \Psi & \xrightarrow{\alpha_{i-1}(X, \Psi)} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^{i-1}(X, \mathrm{colim}_I \Psi) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{colim}_I \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^{i-1}(X, -) \circ \Psi / \Phi & \xrightarrow{\alpha_{i-1}(X, \Psi / \Phi)} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^{i-1}(X, \mathrm{colim}_I \Psi / \Phi) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{colim}_I \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, -) \circ \Phi & \xrightarrow{\alpha_i(X, \Phi)} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, \mathrm{colim}_I \Phi) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{colim}_I \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, -) \circ \Psi & \xrightarrow{\alpha_i(X, \Psi)} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, \mathrm{colim}_I \Psi) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

qui permet d'obtenir la propriété souhaitée par récurrence, à l'aide d'un argument de décalage, compte-tenu de la nullité de $\operatorname{colim}_I \operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, -) \circ \Psi$ pour $i > 0$, Ψ étant à valeurs injectives. \square

Il est immédiat que la classe $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$ est stable par facteur direct et par somme directe finie. La propriété suivante, relative aux suites exactes courtes, est presque aussi immédiate.

Proposition 1.4. (Cf. [6, pr. 2.8]) *Soient $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte courte de \mathcal{E} et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

1. *Si Y et Z appartiennent à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$, il en est de même pour X .*
2. *Si X appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$ et Y à $\mathbf{pf}_{n-1}(\mathcal{E})$, alors Z appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$.*
3. *Si X appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$ et Z à $\mathbf{pf}_{n+1}(\mathcal{E})$, alors Y appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$.*

Corollaire 1.5. *Soient C_{\bullet} un complexe de chaînes de \mathcal{E} , H_{\bullet} son homologie et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *pour tout $i \in \mathbb{N}$, C_i appartient à $\mathbf{pf}_{n-i}(\mathcal{E})$;*
2. *pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, H_i appartient à $\mathbf{pf}_{n-i-1}(\mathcal{E})$.*

Alors H_0 appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$.

Si \mathfrak{C} est une classe d'objets de \mathcal{E} , on appelle *n-présentation* d'un objet X de \mathcal{E} par des objets de \mathfrak{C} toute suite exacte

$$\begin{aligned} C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow X \rightarrow 0 & \quad \text{si } n \in \mathbb{N}, \text{ ou} \\ \cdots \rightarrow C_i \rightarrow C_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow X \rightarrow 0 & \quad \text{si } n = \infty, \end{aligned}$$

où les C_i appartiennent à \mathfrak{C} .

La terminologie de *n-présentation finie* provient de la proposition suivante, appliquée souvent lorsque la classe \mathcal{G} est constituée d'objets projectifs.

Proposition 1.6. (Cf. [6, pr. 2.12]) *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que \mathcal{E} possède une classe d'objets génératrice \mathcal{G} incluse dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$. Notons \mathcal{G}^{\oplus} la classe des objets de \mathcal{E} qui sont somme directe finie d'éléments de \mathcal{G} .*

1. *Un objet X de \mathcal{E} appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$ si et seulement s'il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow Y \rightarrow G \rightarrow X \rightarrow 0$ avec G dans \mathcal{G}^{\oplus} et Y dans $\mathbf{pf}_{n-1}(\mathcal{E})$.*
2. *Un objet X de \mathcal{E} appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$ si et seulement s'il possède une n-présentation par des objets de \mathcal{G}^{\oplus} .*

Nous terminons cette section par deux énoncés simples concernant l'effet de foncteurs appropriés sur la propriété pf_n . Nous dirons qu'un foncteur $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ détecte les objets de type fini (resp. pf_n) lorsque pour tout X de \mathcal{E} , si $\Phi(X)$ est de type fini (resp. pf_n), alors X est de type fini (resp. pf_n).

Remarque 1.7. Tout foncteur exact, fidèle et cocontinu détecte les objets de type fini.

Proposition 1.8. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que \mathcal{E} possède une classe d'objets génératrice \mathcal{G} incluse dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$. Soit $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ un foncteur exact.*

1. *Si Φ envoie \mathcal{G} dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E}')$, alors Φ préserve la propriété pf_i pour $i \leq n$.*

2. Si Φ envoie \mathcal{G} dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E}')$ et si Φ détecte les objets de type fini, alors Φ détecte les objets pf_i pour tout $i \leq n + 1$.

Démonstration. La première assertion découle directement de la proposition 1.6. La deuxième se déduit de la même proposition, de l'assertion précédente et d'un argument de décalage permettant de raisonner par récurrence sur i . \square

Proposition 1.9. Soient $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ un foncteur possédant un adjoint à droite Ψ , et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que Ψ commute aux colimites filtrantes et que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1. $n \leq 1$;
2. Φ et Ψ sont exacts.

Alors Φ préserve les objets pf_n .

Démonstration. Cela découle de la définition et du fait qu'une adjonction entre foncteurs exacts se propage aux groupes d'extensions. \square

1.2 Cas des catégories de foncteurs

On rappelle que \mathcal{C} désigne une petite catégorie, \mathcal{E} une catégorie de Grothendieck et $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{E} . C'est une catégorie de Grothendieck ; les suites exactes, limites ou colimites s'y déterminent au but.

Nous examinons maintenant comment la propriété pf_n se transmet de \mathcal{E} à $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Si M est un objet de \mathcal{E} , on rappelle que $M[E]$ désigne la somme directe de copies indexées par E , qui peut être choisie fonctoriellement en E et M . Un avatar du lemme de Yoneda s'exprime ainsi :

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})(M[\mathcal{C}(t, -)], F) \simeq \mathcal{E}(M, F(t)) . \quad (2)$$

Cet isomorphisme de groupes abéliens est naturel en les objets M de \mathcal{E} , t de \mathcal{C} et F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Comme l'évaluation en t est exacte et cocontinue, et que $M \mapsto M[\mathcal{C}(t, -)]$ est également exact (les sommes directes sont exactes dans la catégorie de Grothendieck \mathcal{E}), on en déduit, d'après la proposition 1.9 :

Proposition 1.10. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si M appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$, alors le foncteur $M[\mathcal{C}(t, -)]$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}))$ pour tout objet t de \mathcal{C} .

Corollaire 1.11. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que \mathcal{E} possède une classe génératrice \mathcal{G} incluse dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$. Alors $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ possède une classe génératrice incluse dans $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}))$, à savoir la classe des foncteurs $G[\mathcal{C}(t, -)]$, où G appartient à \mathcal{G} et t est un objet quelconque de \mathcal{C} .

Sous les hypothèses du corollaire 1.11, la proposition 1.6 affirme qu'un foncteur est de n -présentation finie si et seulement s'il admet une n -présentation par des sommes directes finies de foncteurs $G[\mathcal{C}(t, -)]$, où G appartient à \mathcal{G} et t est un objet quelconque de \mathcal{C} . C'est souvent dans ce cadre que nous nous placerons.

On peut montrer la préservation de la propriété pf_n par restriction de la catégorie source à l'aide de la propriété utile suivante.

Proposition 1.12. Soient $\xi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur possédant un adjoint à gauche et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Le foncteur $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ qu'induit ξ par précomposition préserve la propriété pf_n .

Démonstration. Ce foncteur est adjoint à gauche à la précomposition par l'adjoint à gauche de ξ , et tout foncteur de précomposition est exact et cocontinu. On peut donc appliquer la proposition 1.9. \square

Un cas particulier important est celui où $\mathcal{E} = k\text{-Mod}$ pour un anneau commutatif k ; on désigne alors par $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. On appelle *projectifs standards* les foncteurs $P_{\mathcal{C}}^t := k[\mathcal{C}(t, -)]$. Il suit de l'isomorphisme de Yoneda (2) que les projectifs standards $P_{\mathcal{C}}^t$, où t est un objet quelconque de \mathcal{C} , forment une famille génératrice de projectifs de type fini de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$. La proposition 1.6 affirme donc qu'un objet de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ est de n -présentation finie si et seulement s'il admet une n -présentation par des somme directes finies de projectifs standards.

L'un des intérêts fondamentaux de la propriété pf_n dans les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ réside dans la propriété de finitude suivante des groupes d'extensions ou de torsion (pour lesquels on pourra se référer à [29, § C.10]). Cette propriété est souvent appliquée en prenant pour \mathfrak{F} la classe des k -modules noethériens, ou finis.

Proposition 1.13. *Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, F et G deux foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et H un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\text{op}}; k)$. Supposons que F appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$, et que G et H prennent leurs valeurs dans une classe \mathfrak{F} de k -modules stable par somme directe finie et par sous-quotient. Alors les k -modules $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)}^i(F, G)$ et $\text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(H, F)$ appartiennent à \mathfrak{F} pour chaque entier $i \leq n$.*

Démonstration. Comme F est pf_n , il admet une résolution projective P_{\bullet} dont les termes de degré inférieur à n sont des sommes finies de projectifs standards. L'isomorphisme de Yoneda $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)(P_{\mathcal{C}}^t, G) \simeq G(t)$ et la stabilité de \mathfrak{F} par somme directe finie montre que les objets du complexe $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)(P_{\bullet}, G)$ sont dans \mathfrak{F} jusqu'en degré n , et la stabilité de \mathfrak{F} par sous-quotient garantit que son homologie est dans \mathfrak{F} jusqu'au degré n . La démonstration du résultat en Tor est similaire. \square

Nous nous intéresserons aussi à des catégories de foncteurs *additifs*. Si \mathcal{A} est une petite catégorie additive, la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ constituée des foncteurs additifs est notée $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$. C'est une catégorie de Grothendieck. Si A est un anneau, on note $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; A)$ pour $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, A\text{-Mod})$. Cette catégorie est engendrée par les objets projectifs de type fini $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(a, -)$, où a parcourt un squelette de \mathcal{A} . On peut donc utiliser la proposition 1.6 dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; A)$ en prenant pour \mathcal{G} la classe de ces foncteurs.

2 Supports et propriété psf_n .

La notion de *support* d'un foncteur (cf. par exemple [11, § 2.3]) constitue un outil de base pour en ramener l'étude à celle de foncteurs définis sur une sous-catégorie. La notion de support de présentation supérieure (ou de support de n -présentation) en est une version dérivée, bien connue des experts. Toutefois, nous n'en connaissons pas de référence explicite, nous en fournissons donc une exposition complète au § 2.1. La notion de support de n -présentation nous permet d'introduire au § 2.2 la propriété de finitude psf_n pour les foncteurs, plus faible que la propriété pf_n (corollaire 2.16). L'important corollaire 2.17 précise le lien entre ces deux propriétés, sous une hypothèse de finitude sur la catégorie source.

Remarque 2.1. Dans le cas des FI -modules, les propriétés pf_n et psf_n ont été examinées en détail par de nombreux auteurs, à l'aide de méthodes inspirées de la combinatoire, de l'algèbre commutative ou de la théorie des représentations — voir par exemple Church-Ellenberg [8].

Notation 2.2. Pour tout foncteur $\phi : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ entre petites catégories, on note $\phi^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}_2, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}_1, \mathcal{E})$ le foncteur de précomposition par ϕ . Son adjoint à gauche, l'extension de Kan à gauche le long de ϕ [31, chap. X], est notée $\phi_! : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}_1, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}_2, \mathcal{E})$.

Dans toute la section 2, on se place dans le cadre suivant : \mathcal{C} désigne une petite catégorie, et \mathcal{D} une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} . On note $\iota_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ou simplement $\iota : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur d'inclusion.

2.1 Supports de présentation supérieure

Le foncteur d'inclusion $\iota : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ étant pleinement fidèle, l'unité d'adjonction $\text{Id} \rightarrow \iota^* \iota_!$ est un isomorphisme. Les propriétés de la coïunité d'adjonction sont plus subtiles, et conduisent à la notion de support.

Définition 2.3. Soit F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. On dit que \mathcal{D} est un *support* (resp. un *support de présentation*) de F si la coïunité $\iota_! \iota^* F \rightarrow F$ est un épimorphisme (resp. un isomorphisme).

Notons $\mathcal{D}_{\text{discr}}$ la sous-catégorie discrète avec les mêmes objets que \mathcal{D} et $\gamma : \mathcal{D}_{\text{discr}} \rightarrow \mathcal{D}$ l'inclusion. L'adjonction entre $\gamma_!$ et γ^* donne lieu à un cotriple (ou comonade) \perp sur $\mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$, voir par exemple [41, § 8.6]. Ce cotriple permet [41, § 8.7] de définir, pour tout foncteur additif $\alpha : \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{B}$ de but une catégorie abélienne, des foncteurs dérivés $\mathbf{L}_i(\alpha) : \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{B}$. On introduit les supports de présentation supérieure comme une version dérivée des supports de présentation.

Définition 2.4. Soit F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

1. Si n est un entier strictement négatif, on convient que \mathcal{D} est toujours un support de n -présentation de F .
2. On dit que \mathcal{D} est un *support de 0-présentation* de F si c'en est un support.
3. Si n est un entier strictement positif ou $n = +\infty$, on dit que \mathcal{D} est un *support de n -présentation* de F si c'en est un support de présentation, et si de plus $\mathbf{L}_i(\iota_!)(\iota^* F) = 0$ pour $0 < i < n$.

Proposition 2.5. Soient $0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow 0$ une suite exacte courte de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

1. Si \mathcal{D} est un support de n -présentation de G et H , c'est un support de n -présentation de F .
2. Si \mathcal{D} est un support de n -présentation de F et un support de $(n - 1)$ -présentation de G , c'est un support de n -présentation de H .
3. Si \mathcal{D} est un support de n -présentation de F et un support de $(n + 1)$ -présentation de H , c'est un support de n -présentation de G .

Démonstration. Cette propriété découle formellement de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte $0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow 0$ en appliquant le foncteur homologique $\mathbf{L}_*(\iota_!)\iota^*$. \square

Définition 2.6. On dit qu'un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ est *induit depuis* $\mathcal{D}_{\text{discr}}$ s'il est isomorphe à une somme directe de foncteurs $\bigoplus_{s \in E} M_s[\mathcal{C}(s, -)]$ pour un ensemble E d'objets de \mathcal{D} et une famille $(M_s)_{s \in E}$ d'objets de \mathcal{E} .

Lemme 2.7. *Tout foncteur induit depuis $\mathcal{D}_{\text{discr}}$ admet \mathcal{D} pour support d' ∞ -présentation.*

Démonstration. Pour toute famille $(M_s)_{s \in E}$, on note $M : \mathcal{D}_{\text{discr}} \rightarrow \mathcal{E}$ le foncteur tel que $M(s) = M_s$ si s est un objet de E et $M(s) = 0$ sinon. Alors le foncteur $\gamma_! M$ est isomorphe à $\bigoplus_{s \in E} M_s[\mathcal{D}(s, -)]$ et le foncteur $\iota_! \gamma_! M$ est isomorphe à $\bigoplus_{s \in E} M_s[\mathcal{C}(s, -)]$. Si F est induit depuis $\mathcal{D}_{\text{discr}}$, il est donc de la forme $i_! \gamma_! M$. Ainsi \mathcal{D} est un support de présentation de \mathcal{D} car la coïunité $\iota_! \iota_* F \rightarrow F$ est un rétracte de l'isomorphisme $\iota_!(\gamma_! M) \rightarrow \iota_!(\iota^* \iota_!)(\gamma_! M)$ induit par l'unité d'adjonction $\text{Id} \xrightarrow{\simeq} \iota^* \iota_!$. De plus, le foncteur $\iota^* F \simeq \gamma_! M$ est \perp -projectif, d'où l'annulation des $\mathbf{L}_i(\iota_!)(i^* F)$ pour $i > 0$, cf. [41, § 8.7]. \square

On rappelle [41, § 8.6 et 8.7] (voir aussi [29, § C.10]) que les foncteurs dérivés $\mathbf{L}_*(\iota_!)$ se calculent sur un foncteur X de $\mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ comme l'homotopie [41, déf. 8.3.6] d'un objet simplicial $N_\bullet^{\mathcal{D}}(X)$ de la catégorie abélienne $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ donné en degré n par

$$N_n^{\mathcal{D}}(X) := \bigoplus_{x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n} X(x_0)[\mathcal{C}(x_n, -)],$$

où la somme est prise sur les suites de flèches composables d'objets de \mathcal{D} . (Cela résulte de la définition et de l'isomorphisme $\iota_!(M[\mathcal{D}(x, -)]) \simeq M[\mathcal{C}(x, -)]$ naturel en les objets x de \mathcal{D} et M de \mathcal{E} .)

Si F est un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, on dispose d'un morphisme canonique $N_\bullet^{\mathcal{D}}(\iota^* F) \rightarrow F$, où F est vu au but comme objet simplicial constant.

On rappelle qu'un morphisme f entre objets simpliciaux d'une catégorie abélienne est dit *n-connexe* si $\pi_i(f)$ est un isomorphisme pour $i < n$ et un épimorphisme pour $i < n + 1$.

Proposition 2.8. *Soient F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
 - (a) *\mathcal{D} est un support de n-présentation de F ;*
 - (b) *F possède une n-présentation par des foncteurs induits depuis $\mathcal{D}_{\text{discr}}$;*
 - (c) *le morphisme simplicial canonique $N_\bullet^{\mathcal{D}}(\iota^* F) \rightarrow F$ est n-connexe.*
2. *Si \mathcal{D} est un support de n-présentation de F , il en est de même pour toute sous-catégorie pleine de \mathcal{C} contenant \mathcal{D} .*

Démonstration. L'équivalence entre (a) et (c) résulte de la définition, et l'implication (c) \Rightarrow (b) est triviale. L'implication (b) \Rightarrow (a) découle du lemme 2.7 et d'une application itérée de la proposition 2.5.

La deuxième assertion provient de l'équivalence (a) \Leftrightarrow (b) et de ce qu'un foncteur induit depuis $\mathcal{D}_{\text{discr}}$ est induit depuis toute sous-catégorie discrète de \mathcal{C} contenant $\mathcal{D}_{\text{discr}}$. \square

Proposition 2.9. *Soient F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *\mathcal{D} est un support de n-présentation de F ;*

2. pour tout foncteur G de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, l'application canonique

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})}^i(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})}^i(\iota^* F, \iota^* G)$$

est bijectif pour $i < n$ et injective pour $i < n + 1$.

Si $n > 0$, elles équivalent également à :

3. pour tout foncteur G de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, l'application canonique

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})}^i(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})}^i(\iota^* F, \iota^* G)$$

est bijectif pour $i < n$.

Démonstration. L'équivalence de 1. et 2. pour $n = 0$ résulte de la définition. On se fixe donc un entier $n > 0$.

Soit M un cogénérateur injectif de \mathcal{E} . Considérons la propriété

4. Pour toute famille d'objets (t_j) de \mathcal{C} , le morphisme canonique

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})(F, \prod_j M^{\mathcal{C}(-, t_j)}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})(\iota^* F, \iota^* \prod_j M^{\mathcal{C}(-, t_j)})$$

est bijectif et $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})}^i(\iota^* F, \iota^* \prod_j M^{\mathcal{C}(-, t_j)}) = 0$ pour $0 < i < n$.

Comme les foncteurs de la forme $\prod_j M^{\mathcal{C}(-, t_j)}$ sont injectifs et que tout foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ se plonge dans un foncteur de ce type, un argument formel de corésolution de G fournit l'implication 4. \Rightarrow 2., et 3. \Rightarrow 4. Comme 2. \Rightarrow 3. évidemment, il suffit de montrer l'équivalence de 1. et 4. Celle-ci découle des isomorphismes naturels

$$\mathcal{E}\left(\bigoplus_j \mathbf{L}_i(\iota_!)(X)(t_j), M\right) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})}^i\left(X, \iota^* \prod_j M^{\mathcal{C}(-, t_j)}\right)$$

qui se déduisent de la propriété universelle [41, 8.7.4]. \square

Dans le cas où \mathcal{D} est réduite à un objet, ces notions permettent de comparer la cohomologie des foncteurs à celle des monoïdes :

Corollaire 2.10. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et t un objet de \mathcal{C} . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\{t\}$ est un support de n -présentation de F ;
2. pour tout foncteur G de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$, l'application canonique

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)}^i(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{k[\mathrm{End}(t)]}^i(F(t), G(t))$$

est bijectif pour $i < n$ et injective pour $i < n + 1$.

Remarque 2.11. Le corollaire 2.10 possède un analogue évident en termes de groupes de torsion.

Remarque 2.12. On dispose d'une notion de co-support, et de co-support de présentation supérieure, en utilisant l'extension de Kan à droite le long de l'inclusion d'une sous-catégorie pleine de la catégorie source. Elle possède des propriétés formelles duales des précédentes dès lors que la catégorie \mathcal{E} vérifie l'axiome

(AB4*) de Grothendieck (exactitude des produits). En effet, dans les considérations précédentes, le fait que \mathcal{E} est une catégorie de Grothendieck n'est utile que via l'axiome (AB4) (exactitude des sommes directes) et la possibilité de faire de l'algèbre homologique dans \mathcal{E} et $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

En revanche, dans une catégorie de Grothendieck, la propriété pf_n n'a pas de propriété « duale » possédant de bonnes propriétés formelles analogues à celles de la notion d'origine, car ces propriétés dépendent de l'axiome (AB5) (exactitude des colimites filtrantes) ; or une catégorie abélienne non nulle ne vérifie jamais simultanément (AB5) et l'axiome dual (AB5*), cf. [33, cor. 8.11].

2.2 La propriété psf_n

Définition 2.13. Soient n un entier et F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. On dit que F est à n -présentation de support fini (ou simplement à support fini, si $n = 0$) — ou, plus brièvement, possède la propriété psf_n — s'il existe une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} ayant un nombre fini d'objets qui en constitue un support de n -présentation. On dit que F vérifie la propriété psf_∞ s'il vérifie psf_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathbf{psf}_n(\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}))$ la classe des foncteurs de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ possédant la propriété psf_n .

Remarque 2.14. On prendra garde que, si F est un foncteur F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ vérifiant la propriété psf_∞ , il n'existe pas nécessairement de sous-catégorie pleine de \mathcal{C} avec un nombre fini d'objets en constituant un support d' ∞ -présentation. Par exemple, dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbb{F}_2); \mathbb{F}_2)$, qui est localement noethérienne par Putman-Sam-Snowden [35, 38], tout foncteur de type fini vérifie psf_∞ , et donc psf_∞ (cf. corollaire 2.16). Mais les foncteurs de type fini de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbb{F}_2); \mathbb{F}_2)$ possédant un support d' ∞ -présentation fini sont beaucoup moins nombreux : Powell [34, th. 5.0.1] en a donné une caractérisation précise qui implique par exemple qu'aucun foncteur simple non constant de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbb{F}_2); \mathbb{F}_2)$ n'a cette propriété. Un phénomène analogue advient dans la catégorie $\mathcal{F}(\Theta; k)$, où Θ est la catégorie des ensembles finis avec injections et k un anneau noethérien, par [11, th. A.9].

Dans l'énoncé suivant, nous disons qu'un foncteur Φ d'une catégorie filtrante I vers $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ est *ponctuellement stationnaire* si pour tout objet t de \mathcal{C} , il existe un objet a de I tel que Φ envoie toute flèche de source a sur un morphisme qui évalué en t est un isomorphisme de \mathcal{E} .

Proposition 2.15. Soient F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F appartient à $\mathbf{psf}_n(\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}))$;
2. pour toute petite catégorie filtrante I et tout foncteur ponctuellement stationnaire $\Phi : I \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, l'application canonique

$$\alpha_i(F, \Phi) : \operatorname{colim}_I \operatorname{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})}^i(F, -) \circ \Phi \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})}^i(F, \operatorname{colim}_I \Phi)$$

est bijective pour $i < n$ et injective pour $i < n + 1$.

Démonstration. Disons que F est psf'_n s'il vérifie la condition 2. L'isomorphisme en Ext déduit de l'adjonction (2) montre que tout foncteur induit depuis une classe finie d'objets de \mathcal{C} est psf'_∞ .

Si \mathcal{D} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} , notons $F_{\mathcal{D}}$ l'image de la coïunité $(\iota_{\mathcal{D}})_! \iota_{\mathcal{D}}^* F \rightarrow F$ (où $\iota_{\mathcal{D}}$ a la signification de l'hypothèse 2.1). Alors $F_{\mathcal{D}}$ est le plus petit sous-foncteur de F qui coïncide avec celui-ci évalué sur \mathcal{D} . Ainsi, le foncteur depuis l'ensemble ordonné (par inclusion) filtrant des sous-ensembles finis d'un squelette de $\text{Ob } \mathcal{C}$ vers $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ envoyant \mathcal{D} sur $F/F_{\mathcal{D}}$ est ponctuellement stationnaire, et sa colimite est nulle. Par conséquent, si F est psf'_0 , il existe un ensemble fini \mathcal{D} d'objets de \mathcal{C} tel que le morphisme canonique $F \rightarrow F/F_{\mathcal{D}}$ soit nul, autrement dit $F_{\mathcal{D}} = F$, c'est-à-dire que \mathcal{D} définit un support fini de F .

On montre alors l'équivalence entre 1 et 2 par récurrence sur n en utilisant les propositions 2.8 et 2.5 et l'observation formelle que le noyau d'un épimorphisme entre foncteurs psf'_n est psf'_{n-1} . \square

Corollaire 2.16. *La propriété pf_n entraîne la propriété psf_n .*

Corollaire 2.17. *Supposons que, pour tous objets a et b de \mathcal{C} , l'ensemble $\mathcal{C}(a, b)$ est fini. Étant donné un foncteur F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. F appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}))$;
2. F appartient à $\mathbf{psf}_n(\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}))$ et est à valeurs dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$.

Démonstration. Supposons que F est psf_n . Alors F est psf_n par le corollaire 2.16. Si t est un objet de \mathcal{C} , le foncteur $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ d'évaluation en t est exact et est adjoint à gauche au foncteur $X \mapsto X^{\mathcal{C}(-, t)}$ (de façon duale de (2)), qui est exact et commute aux colimites parce que $\mathcal{C}(-, t)$ prend ses valeurs dans les ensembles finis. La proposition 1.9 montre donc que $F(t)$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{E})$.

La réciproque découle de l'implication (a) \Rightarrow (c) de la proposition 2.8 combinée aux propositions 1.10 et 1.6. \square

2.3 Supports de présentation supérieure des bifoncteurs

Dans ce paragraphe, \mathcal{D}' désigne une sous-catégorie pleine de \mathcal{C}' .

Proposition 2.18. *Soient B un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}' \times \mathcal{C}, \mathcal{E})$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}$ est un support de n -présentation de B ;
2. pour tout objet t de \mathcal{C} , \mathcal{D}' est un support de n -présentation du foncteur $B(-, t)$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{E})$, et pour tout objet t' de \mathcal{C}' , \mathcal{D} est un support de n -présentation du foncteur $B(t', -)$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

Démonstration. L'implication 1 \Rightarrow 2 découle de l'équivalence (a) \Leftrightarrow (b) de la proposition 2.8. La réciproque se déduit de l'équivalence (a) \Leftrightarrow (c) de la proposition 2.8 et d'un argument standard d'objet bisimplicial [41, § 8.5]. \square

Rappelons que l'homologie de Hochschild (parfois appelée simplement homologie et notée $H_*(\mathcal{C}; B)$, comme dans [29, § C.10], qui explicite le complexe standard la calculant) de la catégorie \mathcal{C} à coefficients dans un bifoncteur B de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}, \mathcal{E})$, notée $HH_*(\mathcal{C}; B)$, est par définition donnée par les foncteurs dérivés à gauche, évalués sur B , du foncteur de cofin [31, chap. IX, § 6] sur \mathcal{C} .

Le résultat classique suivant découle par exemple de [29, (C.10.1)].

Lemme 2.19. Soient F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ et t un objet de \mathcal{C} . Notons B le bifoncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}, \mathcal{E})$ donné par $B(x, y) = F(y)[\mathcal{C}(x, t)]$. Alors $HH_0(\mathcal{C}; B) \simeq F(t)$ naturellement en F et t , et $HH_i(\mathcal{C}; B) = 0$ pour $i > 0$.

Proposition 2.20. Soient B un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}, \mathcal{E})$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que $(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C})$ est un support de n -présentation de B . Alors le morphisme

$$HH_i(\mathcal{D}; \iota^* B) \rightarrow HH_i(\mathcal{C}; B)$$

induit par le foncteur d'inclusion $\iota : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est un isomorphisme pour $i < n$ et un épimorphisme pour $i < n + 1$.

Démonstration. Par la proposition 2.8, le bifoncteur B admet une n -présentation par des sommes directes de foncteurs de la forme $M[\mathcal{C}(-1, x) \times \mathcal{C}(y, -2)]$, où M est un objet de \mathcal{E} et x et y sont des objets de \mathcal{C} dont l'un appartient à \mathcal{D} . La conclusion s'obtient alors par un argument classique de suite spectrale à partir du lemme 2.19. \square

3 Premier lemme de Schwartz généralisé

Le lemme de Schwartz affirme que dans la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(\mathbb{F}_q); \mathbb{F}_q)$, tout foncteur polynomial à valeurs de dimensions finies est psf_∞ . Dans cette section, nous reprenons la méthode de démonstration de cet énoncé de Franjou-Lannes-Schwartz [21, § 10] afin d'en obtenir une version plus générale aussi bien à la source (le corps fini est remplacé par un anneau arbitraire) qu'au but (une catégorie de Grothendieck quelconque plutôt qu'une catégorie d'espaces vectoriels). Nous appliquons ensuite notre lemme de Schwartz généralisé pour améliorer les bornes de stabilité de Betley-Pirashvili [4] (obtenues par une méthode indépendante) pour l'homologie des monoïdes multiplicatifs de matrices à coefficients polynomiaux.

Notation 3.1. Dans toute la section 3, A désigne un anneau. On note $\mathcal{F}(A, k)$ la catégorie de foncteurs $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); k)$.

3.1 La propriété psf_∞ pour les foncteurs polynomiaux sur $\mathbf{P}(A)$

Définition 3.2. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $m \in \mathbb{N}$. On dit qu'un foncteur F de $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$ vérifie la propriété $PSF_n(m)$ si la sous-catégorie pleine de $\mathbf{P}(A)$ ayant pour unique objet A^m constitue un support de n -présentation de F .

Par équivalence de Morita, F vérifie $PSF_n(m)$ si et seulement si la sous-catégorie pleine de $\mathbf{P}(A)$ des facteurs directs de A^m constitue un support de n -présentation de F . En particulier, si n est fini, un foncteur F vérifie la propriété psf_n si et seulement s'il vérifie $PSF_n(m)$ pour un certain entier m .

Comme dans [21, § 10], on note Δ l'endofoncteur de $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$ donné par le scindement naturel $F(V \oplus A) \simeq F(V) \oplus \Delta(F)(V)$; Δ est un foncteur exact, qui commute à toutes les limites et colimites. Un foncteur F est *polynomial*¹ de degré au plus $d \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\Delta^{d+1}(F) = 0$.

1. Cette définition diffère légèrement de celle d'Eilenberg-MacLane [17, chap. II] en termes d'effets croisés, qui nous sera plus utile dans la section 6. Pour des détails sur l'équivalence des deux points de vue, on pourra consulter par exemple [15, § 3].

La clef de cette section réside dans la proposition suivante, qui constitue une variation de la proposition 1.8 pour les propriétés $PSF_n(m)$.

Proposition 3.3. *Soient F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A); \mathcal{E})$ et $n, m \in \mathbb{N}$.*

1. *Si F vérifie $PSF_n(m)$, alors il en est de même pour $\Delta(F)$.*
2. *Si $\Delta(F)$ vérifie $PSF_n(m)$, alors F vérifie $PSF_n(n + m + 1)$.*

Démonstration. La première assertion découle de l'isomorphisme naturel

$$\Delta(M[\mathbf{P}(A)(A^i, -)]) \simeq (M^{\oplus A^i \setminus \{0\}})[\mathbf{P}(A)(A^i, -)],$$

où M est un objet de \mathcal{E} et i un entier naturel, de l'exactitude de Δ et de la proposition 2.8.

Pour établir la suite, on commence par noter que Δ adjoint à droite au foncteur $\Phi : \mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A); \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A); \mathcal{E})$ donné par $\Phi(F)(V) := F(V)[V]/F(V)$ ($F(V)$ est le facteur direct naturel de $F(V)[V]$ correspondant à l'élément 0 de V). Les foncteurs Δ et Φ sont exacts, et le noyau de Δ est constitué des foncteurs constants, de sorte qu'on dispose d'un épimorphisme naturel $F(0) \oplus \Phi\Delta(F) \twoheadrightarrow F$ (dont la composante $\Phi\Delta(F) \rightarrow F$ est la coïté de l'adjonction). Les foncteurs Φ et $\Phi\Delta$ envoient un foncteur induit depuis A^m sur un facteur direct d'un foncteur induit depuis A^{m+1} .

On montre maintenant la deuxième assertion par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ découle de ce qui précède et de la proposition 2.8. Supposons maintenant que l'implication : $\Delta(F)$ vérifie $PSF_{n-1}(r) \Rightarrow F$ vérifie $PSF_{n-1}(n+r)$ est satisfaite (pour tout r) et que $\Delta(F)$ est $PSF_n(m)$, avec $n > 0$. Le cas $n = 0$ montre que F vérifie $PSF_0(m+1)$, donc il existe une suite exacte $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow F \rightarrow 0$ où X est induit depuis A^{m+1} (on utilise constamment, ici, la proposition 2.8). Dans la suite exacte $0 \rightarrow \Delta(Y) \rightarrow \Delta(X) \rightarrow \Delta(F) \rightarrow 0$, $\Delta(X)$ est induit depuis A^{m+1} , donc $PSF_\infty(m+1)$, et $\Delta(F)$ est $PSF_n(m+1)$, donc $\Delta(Y)$ est $PSF_{n-1}(m+1)$, par le troisième point de la proposition 2.5. L'hypothèse de récurrence montre alors que Y est $PSF_{n-1}(n+m+1)$. Appliquant maintenant le deuxième point de la proposition 2.5, on tire de la suite exacte $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow F \rightarrow 0$ que F est $PSF_n(n+m+1)$, ce qui achève la démonstration. \square

Appliquant le deuxième point du lemme par récurrence sur le degré polynomial d , et notant qu'un foncteur constant vérifie $PSF_\infty(0)$, on obtient :

Théorème 3.4 (Premier lemme de Schwartz généralisé). *Soient A un anneau et F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A); \mathcal{E})$, polynomial de degré au plus d . Alors F vérifie $PSF_i(d \cdot (i+1))$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En particulier, F possède la propriété psf_∞ .*

Contrairement au lemme de Schwartz originel, qui porte sur la propriété pf_∞ des foncteurs polynomiaux, le théorème 3.4 porte sur la propriété psf_∞ . Toutefois, en utilisant le corollaire 2.17, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.5. *Soient A un anneau fini et F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A); \mathcal{E})$. Si F est polynomial et à valeurs dans $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{E})$, alors il vérifie la propriété pf_∞ .*

Remarque 3.6. Lorsque la catégorie \mathcal{E} est localement noethérienne, $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A); \mathcal{E})$ est également localement noethérienne (pour A fini) [35, 38], le corollaire 3.5 en découle alors formellement. On notera toutefois que la noethérianité locale de $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A); \mathcal{E})$ est un théorème beaucoup plus difficile à démontrer que les résultats de la présente section.

Si A est un anneau infini, on ne peut pas déduire la propriété pf_∞ de la propriété psf_∞ . On ne peut pas non plus démontrer directement une variante pf_∞ du théorème 3.4 en suivant l'approche de cette section, car le foncteur Δ ne préserve pas les foncteurs de type fini. Une autre approche, permettant de démontrer une version du théorème 3.4 pour la propriété pf_∞ , sera donnée à la section 6.

Le théorème 3.4 combiné au corollaire 2.10 fournit le résultat suivant.

Corollaire 3.7. *Soient F et G des foncteurs de $\mathcal{F}(A, k)$. Supposons que F est polynomial de degré au plus $d \in \mathbb{N}$. Alors le morphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(A,k)}^j(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{k[\mathcal{M}_n(A)]}^j(F(A^n), G(A^n))$$

est injectif pour $n \geq d.(j + 1)$ et bijectif pour $n \geq d.(j + 2)$.

Le corollaire 3.7 améliore et généralise plusieurs résultats connus. Lorsque $A = k$ est un corps fini, une forme faible du corollaire 3.7 (la bijectivité pour n assez grand) est attestée par Kuhn [27, Th. 3.10] comme corollaire du lemme de Schwartz. Un autre cas particulier ($A = k$, pouvant être ici un anneau quelconque, et F égal au foncteur d'inclusion de $\mathbf{P}(A)$ dans $A\text{-Mod}$) avait été démontré antérieurement par Jibladze et Pirashvili [23, pr. 2.13], sous la condition plus restrictive $n \geq 2^j$.

3.2 Stabilité homologique pour les monoïdes de matrices

Les résultats du paragraphe précédent permettent d'améliorer les bornes de stabilité – exponentielles – obtenues par Betley et Pirashvili [4], leur substituant des bornes linéaires, pour l'homologie des monoïdes de matrices. Pour $n \in \mathbb{N}$, et B un bifoncteur de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A); \mathbb{Z})$, $B(A^n, A^n)$ possède une structure naturelle de bimodule sur l'anneau $\mathbb{Z}[\mathcal{M}_n(A)]$ du monoïde multiplicatif des matrices $n \times n$ à coefficients dans A , l'action à droite (resp. gauche) de ce monoïde provenant de la functorialité par rapport à la première (resp. deuxième) variable. L'homologie de Hochschild $HH_*(\mathbb{Z}[\mathcal{M}_n(A)]; B(A^n, A^n))$ de ce bimodule s'identifie à celle de la restriction de B à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{P}(A)$ constituée du A -module libre A^n .

On dispose ainsi, par restriction, de morphismes naturels de groupes abéliens gradués

$$\begin{array}{ccccc} \dots \longrightarrow & HH_*(\mathbb{Z}[\mathcal{M}_n(A)]; B(A^n, A^n)) & \longrightarrow & HH_*(\mathbb{Z}[\mathcal{M}_{n+1}(A)]; B(A^{n+1}, A^{n+1})) & \longrightarrow \dots \\ & & \searrow & \downarrow & \\ & & & HH_*(\mathbf{P}(A); B) & \end{array}$$

où la flèche horizontale est induite par la projection $A^{n+1} \twoheadrightarrow A^n$ sur les n premiers facteurs (sur la première variable de B) et l'inclusion $A^n \hookrightarrow A^{n+1}$ des n premiers facteurs (sur la seconde). Il s'agit d'un *morphisme de stabilisation*, dont l'analogue pour les *groupes* linéaires, et plus généralement pour de nombreuses familles infinies de groupes, a été très étudié, par des méthodes différentes, à partir de travaux inauguraux de Quillen (non publiés) — cf. le survol systématique du sujet par Randal-Williams et Wahl [37].

On dispose d'un diagramme similaire en cohomologie.

La proposition ci-dessous, qui est une variante du corollaire 3.7, constitue donc un résultat de stabilité (co)homologique pour les monoïdes $\mathcal{M}_n(A)$.

Proposition 3.8. *Soient A un anneau et B un bifoncteur de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A); \mathbb{Z})$. Supposons qu'il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que B est polynomial de degré au plus d par rapport à la première variable (c'est-à-dire que, pour tout V , le foncteur $B(-, V)$ est polynomial de degré au plus d), ou par rapport à la seconde. Alors le morphisme canonique*

$$HH_i(\mathbb{Z}[\mathcal{M}_n(A)]; B(A^n, A^n)) \rightarrow HH_i(\mathbf{P}(A); B)$$

est surjectif pour $n \geq d.(i + 1)$ et bijectif pour $n \geq d.(i + 2)$, et le morphisme canonique

$$HH^i(\mathbf{P}(A); B) \rightarrow HH^i(\mathbb{Z}[\mathcal{M}_n(A)]; B(A^n, A^n))$$

est injectif pour $n \geq d.(i + 1)$ et bijectif pour $n \geq d.(i + 2)$.

Démonstration. Pour le morphisme de comparaison homologique, on combine le théorème 3.4 aux propositions 2.18 et 2.20.

La propriété cohomologique s'en déduit comme suit. Le foncteur de dualité $D : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}; \mathbb{Z})^{op} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}; \mathbb{Z})$ (pour une catégorie source \mathcal{C} quelconque) donné par $(DF)(U, V) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(V, U), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est exact et fidèle, et donne lieu à des isomorphismes naturels $HH^i(\mathcal{C}; D(B)) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(HH_i(\mathcal{C}; B), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ceci montre le résultat pour des bifoncteurs B du type $D(B')$, où B' vérifie la condition de polynomialité requise. Comme le morphisme canonique $B \rightarrow D(D(B))$ est injectif, on peut trouver une corésolution de tout bifoncteur B sur \mathcal{C} par des foncteurs de la forme $D(B')$, où les B' vérifient la même condition de polynomialité que B , ce qui permet d'établir le cas général. \square

4 Propriété pf_n et produits tensoriels

Le lemme de Schwartz généralisé du théorème 3.4 porte sur le caractère psf_∞ des foncteurs polynomiaux. Pour obtenir des informations sur le caractère pf_∞ des foncteurs, nous aurons besoin de résultats sur le comportement des propriétés pf_n vis-à-vis des produits tensoriels. Ces résultats font l'objet de la présente section, et seront utilisés notamment dans les démonstrations des théorèmes 6.14 et 8.1.

Remarque 4.1. Dans cette section, nous avons privilégié autant que possible des énoncés peu techniques, au prix parfois d'un défaut d'optimalité. En particulier, nous nous sommes limités aux produits tensoriels entre une catégorie de foncteurs et une catégorie de Grothendieck. Le cadre conceptuel le plus général pour l'étude de la propriété pf_n pour des produits tensoriels est celui du produit tensoriel de catégories de Grothendieck, introduit récemment par Lowen, Ramos Gonzáles et Shoikhet [30]. Dans ce degré de généralité, des problèmes de finitude nouveaux peuvent advenir; l'hypothèse que l'une des catégories de Grothendieck est localement pf_∞ , c'est-à-dire engendrée par $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{E})$ (cf. [6]), est sans doute appropriée pour généraliser les résultats obtenus ici.

4.1 Produits tensoriels

Le cadre général pour les produits tensoriels que nous considérons est le suivant. Si l'on suppose que la catégorie de Grothendieck \mathcal{E} est k -linéaire, on dispose d'un produit tensoriel (au-dessus de k)

$$\otimes : (k\text{-Mod}) \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} .$$

Ce produit tensoriel est le bifoncteur qui commute aux colimites par rapport à chaque variable et tel que $k \otimes X = X$. En l'appliquant au but, on en déduit un *produit tensoriel extérieur* :

$$\boxtimes : \mathcal{F}(\mathcal{C}; k) \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

tel que $(F \boxtimes M)(t) = F(t) \otimes M$.

Un cas fondamental est celui où $\mathcal{E} = \mathcal{F}(\mathcal{D}; k)$: utilisant l'isomorphisme canonique de catégories $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{F}(\mathcal{D}; k)) \simeq \mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k)$, le produit tensoriel précédent fournit un bifoncteur, toujours appelé produit tensoriel extérieur et noté $\boxtimes : \mathcal{F}(\mathcal{C}; k) \times \mathcal{F}(\mathcal{D}; k) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k)$ donné par $(F \boxtimes G)(t, u) = F(t) \otimes G(u)$. Lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, la précomposition par la diagonale $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ de $F \boxtimes G$ égale le produit tensoriel usuel $F \otimes G$, donné par $(F \otimes G)(t) = F(t) \otimes G(t)$.

La formule de Künneth suivante, classique et importante, ne sera pas utilisée dans la suite de l'article ; nous la donnons à titre de motivation.

Proposition 4.2. *Supposons que k est un corps et que \mathcal{E} est k -linéaire. Soient F, G des objets de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$, U et V des objets de \mathcal{E} et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Le morphisme naturel d'espaces vectoriels gradués*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)}^*(F, G) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^*(U, V) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})}^*(F \boxtimes U, G \boxtimes V) \quad (3)$$

est bijectif en degrés $< n$ et injectif en degrés $< n + 1$ dans chacun des deux cas suivants :

1. F et U possèdent la propriété pf_{n-1} ;
2. F appartient à $\mathbf{pf}_{n-1}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ et G est à valeurs de dimensions finies.

Esquisse de démonstration. En résolvant F , on se ramène au cas où ce foncteur est un projectif de type fini $P_{\mathcal{C}}^t = k[\mathcal{C}(t, -)]$. Utilisant (2), on voit que le morphisme (3) s'identifie alors au morphisme canonique $G(t) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^*(U, V) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^*(U, G(t) \otimes V)$, ce qui permet de conclure. \square

Remarque 4.3. Le cas $\mathcal{E} = \mathcal{F}(\mathcal{D}; k)$ de la proposition 4.2 prend une forme plus symétrique ; il est explicitement énoncé et démontré² par Franjou [19, pr. 1.4.1]. Cette formule de Künneth joue un rôle clé dans les calculs de [19] et de [20]. L'importance de cette formule de Künneth dans un cadre général est également soulignée dans [12].

2. La démonstration donnée dans un cas particulier fonctionne pareillement pour toutes les catégories de foncteurs du type mentionné.

4.2 Changement de catégorie but

Nous commençons par le changement de catégorie but de $k\text{-Mod}$ à $K\text{-Mod}$ lorsque K est une k -algèbre.

La propriété suivante s'applique notamment lorsque $k \rightarrow K$ est une extension de corps. Elle sera utile lorsque nous emploierons des résultats de [14] nécessitant un corps de coefficients assez gros au but des catégories de foncteurs.

Proposition 4.4. *Soient F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si K est une k -algèbre plate (resp. fidèlement plate), alors $F \otimes K$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; K))$ si (resp. si et seulement si) F appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$.*

Démonstration. Comme K est k -plate, le foncteur d'extension des scalaires au but $\Phi := - \otimes K : \mathcal{F}(\mathcal{C}; k) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ est exact; de plus, son adjoint à droite, la post-composition par la restriction des scalaires, est exact et commute aux colimites. Par la proposition 1.9, il s'ensuit que Φ préserve la propriété pf_n . Si de plus K est fidèlement plate, Φ est également fidèle, de sorte que la réciproque découle de la proposition 1.8 et de la remarque 1.7. \square

La proposition 4.4 possède un analogue pour les supports de présentation supérieure :

Proposition 4.5. *Soient F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$, \mathcal{D} une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si K est une k -algèbre plate (resp. fidèlement plate), alors \mathcal{D} est un support de n -présentation de $F \otimes K$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ si (resp. si et seulement si) \mathcal{D} est un support de n -présentation de F dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$.*

Démonstration. Cela résulte de l'équivalence (a) \Leftrightarrow (c) de la proposition 2.8, puisqu'une suite de k -modules est exacte seulement si (resp. si et seulement si) la suite de K -modules obtenue en appliquant le foncteur $- \otimes K$ l'est. \square

Corollaire 4.6. *Soient F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si K est une k -algèbre fidèlement plate, alors F vérifie la propriété psf_n dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ si et seulement si $F \otimes K$ vérifie la propriété psf_n dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$.*

Le résultat suivant nous sera utile dans la démonstration du théorème 6.14.

Proposition 4.7. *Supposons que $k \rightarrow K$ est une extension de corps commutatifs et que tout foncteur simple à valeurs de dimensions finies de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ possède la propriété pf_n pour un $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors tout foncteur simple S à valeurs de dimensions finies de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ possède la propriété pf_n .*

Démonstration. Comme S est à valeurs de dimensions finies, il existe un foncteur simple à valeurs de dimensions finies T de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ et un épimorphisme $T \otimes K \twoheadrightarrow S$, dont le noyau N est un foncteur fini à valeurs de dimensions finies (cette propriété élémentaire, qui constitue une variante de l'énoncé fonctoriel [14, pr. 3.11], se montre comme son analogue bien connu pour un module simple de dimension finie sur une algèbre un corps). Comme T appartient par hypothèse à $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k))$, on déduit de la proposition 1.9 que $T \otimes K$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K))$. Il suffit donc de montrer que tous les facteurs de composition de N vérifient la propriété pf_{n-1} , grâce à la proposition 1.4. Comme ceux-ci sont des foncteurs simples à valeurs de dimensions finies de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$, on en déduit l'énoncé par récurrence sur n . \square

Les énoncés suivants concernent le changement de catégorie but plus général de $k\text{-Mod}$ à \mathcal{E} , lorsque \mathcal{E} est une catégorie de Grothendieck k -linéaire. Ils nécessitent une hypothèse de finitude forte sur $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$. Ils nous serviront pour démontrer le théorème 8.1. Les notions de foncteur *absolument simple*, d'objet *fini* (nommé aussi *de longueur finie*), de catégorie *localement finie* ou *localement de type fini* qui y interviennent sont rappelées par exemple dans [14, déf. 3.3] et [33, p. 92, 368 et 371].

Lemme 4.8. *Supposons que k est un corps et que la catégorie \mathcal{E} est k -linéaire. Supposons également que la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ est localement finie et que tous ses objets simples sont absolument simples. Supposons enfin que \mathcal{E} est localement de type fini, ou que les foncteurs simples de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ sont à valeurs de dimensions finies. Alors tout foncteur à support fini de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ possède une filtration finie dont les sous-quotients sont isomorphes à des produits tensoriels extérieurs de la forme $S \boxtimes X$, où S est un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et X un objet de \mathcal{E} .*

Démonstration. Soit F un foncteur à support fini de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$: il existe un nombre fini d'objets t_1, \dots, t_n de \mathcal{C} et des objets X_1, \dots, X_n de \mathcal{E} tels que F soit un quotient de $\bigoplus_{i=1}^n k[\mathcal{C}(t_i, -)] \boxtimes X_i$, par la proposition 2.8. Comme $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ est localement finie, les foncteurs projectifs de type fini $k[\mathcal{C}(t_i, -)]$ sont finis : ils possèdent une filtration finie dont les sous-quotients sont simples, donc absolument simples. L'exactitude en chaque variable de \boxtimes (k est un corps) et le lemme 4.9 ci-dessous permettent donc de conclure. \square

Lemme 4.9. *Soit S est un objet absolument simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$. Supposons de plus que S est à valeurs de dimensions finies, ou bien que \mathcal{E} est localement de type fini. Alors l'image essentielle du foncteur $S \boxtimes - : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ est stable par sous-quotient.*

Démonstration. Le foncteur $S \boxtimes -$ est exact, pleinement fidèle, et commute aux colimites. Comme la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ est engendrée par les foncteurs $T[\mathcal{C}(t, -)]$ (où t est un objet de \mathcal{C} et T un objet de \mathcal{E} , qu'on peut supposer de type fini si \mathcal{E} est localement de type fini), il suffit donc de montrer que tout sous-foncteur F de $S \boxtimes X$ image d'un morphisme $f : T[\mathcal{C}(t, -)] \rightarrow S \boxtimes X$ est de la forme $S \boxtimes Y$, où Y est un sous-objet de X (dans \mathcal{E}). Utilisons l'isomorphisme

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})(T[\mathcal{C}(t, -)], S \boxtimes X) \simeq \mathcal{E}(T, S(t) \otimes X) \simeq S(t) \otimes \mathcal{E}(T, X)$$

où le premier isomorphisme est un cas particulier de (2) et le second est valide si S est à valeurs de dimensions finies ou si T est de type fini. Écrivons l'image de f dans $S(t) \otimes \mathcal{E}(T, X)$ sous la forme $\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i$, où $(\varphi_i)_i$ est une famille libre de l'espace vectoriel $S(t)$: comme S est absolument simple, le morphisme $P_{\mathcal{C}}^t \rightarrow S^{\oplus n}$ dont les composantes dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)(P_{\mathcal{C}}^t, S) \simeq S(t)$ sont les φ_i est surjectif. Par conséquent, l'image F de f égale celle du morphisme

$$S^{\oplus n} \boxtimes T \simeq S \boxtimes T^{\oplus n} \xrightarrow{S \boxtimes \Psi} S \boxtimes X$$

c'est-à-dire $S \boxtimes \text{Im} \Psi$, où $\Psi : T^{\oplus n} \rightarrow X$ est le morphisme dont les composantes $T \rightarrow X$ sont les ψ_i . \square

Proposition 4.10. *Supposons que k est un corps, que la catégorie \mathcal{E} est k -linéaire, que pour tous objets x et y de \mathcal{C} , l'ensemble $\mathcal{C}(x, y)$ est fini, et que la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ est localement finie. Alors tout foncteur à support fini de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ possède la propriété psf_{∞} .*

Démonstration. Grâce au corollaire 4.6, par extension des scalaires au but, on peut supposer que k est algébriquement clos. Comme les ensembles de morphismes entre deux objets de \mathcal{C} sont supposés finis, les simples de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ prennent des valeurs de dimensions finies, et ils sont absolument simples (lemme de Schur). On peut donc utiliser le lemme 4.8 qui (combiné à la proposition 1.4) montre qu'il suffit de voir que les foncteurs $S \boxtimes X$, où S est un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et X un objet de \mathcal{E} , vérifient psf_∞ dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. En effet, X est pf_∞ , donc psf_∞ , dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$, car cette catégorie est localement noethérienne (cf. exemple 1.2(c)). La proposition 2.8 montre que la propriété psf_∞ est préservée par $- \boxtimes X$ (puisque k est un corps), d'où la conclusion. \square

Corollaire 4.11. *Sous les hypothèses de la proposition 4.10, tout foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ à support fini et à valeurs dans $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{E})$ appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}))$.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 4.10 et du corollaire 2.17. \square

4.3 Produits tensoriels de foncteurs pf_n : cas plat

Proposition 4.12. *Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, F et G des foncteurs de $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ et $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{D}; k))$ respectivement. On suppose que F ou G prend ses valeurs dans les k -modules plats. Alors $F \boxtimes G$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$.*

Démonstration. Le résultat se déduit de la proposition 1.6 et des isomorphismes canoniques $P_{\mathcal{C}}^c \boxtimes P_{\mathcal{D}}^d \simeq P_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}^{(c,d)}$. \square

Proposition 4.13. *Supposons que la catégorie \mathcal{C} possède des coproduits finis. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors le produit tensoriel de deux foncteurs de $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ dont l'un est à valeurs k -plates appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 1.6 et des isomorphismes canoniques $P_{\mathcal{C}}^c \otimes P_{\mathcal{C}}^d \simeq P_{\mathcal{C}}^{c*d}$, où $*$ désigne le coproduit de \mathcal{C} . \square

Les propositions 4.12 et 4.13 possèdent les réciproques suivantes.

Proposition 4.14. *Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, F et G des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{D}; k)$ respectivement. On suppose que toutes les valeurs de F et de G sont k -plates, et que chacun d'entre eux possède au moins une valeur fidèlement plate. Alors, si $F \boxtimes G$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$, F (resp. G) est dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ (resp. $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{D}; k))$).*

Démonstration. Comme F est à valeurs plates, le foncteur $\Phi_F := F \boxtimes - : \mathcal{F}(\mathcal{D}; k) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k)$ est exact. Comme F prend une valeur fidèlement plate, Φ_F est également fidèle. De plus, Φ_F commute aux colimites. Il s'ensuit que, si $F \boxtimes G$ est de type fini, alors G est également de type fini, et F également. Cela établit le cas $n = 0$. On raisonne ensuite par récurrence, supposant $0 < n < \infty$ et l'assertion vraie pour la propriété pf_{n-1} .

Supposons donc que $F \boxtimes G$ vérifie pf_n : l'hypothèse de récurrence montre que F et G sont pf_{n-1} . Par conséquent, la proposition 4.12 montre que Φ_F préserve les objets pf_i pour $i \leq n-1$. La proposition 1.8 montre alors (compte-tenu de la première partie de la démonstration) que la propriété pf_n pour $\Phi_F(G)$ implique la même propriété pour G , d'où notre assertion. \square

Proposition 4.15. *Supposons que \mathcal{C} possède des coproduits finis. Soient F et G des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que $F \otimes G$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$, que F et G sont à valeurs plates, et que chacun d'entre eux prend une valeur fidèlement plate. Alors F et G appartiennent à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$.*

Démonstration. Cette proposition s'établit comme la précédente, en utilisant la proposition 4.13 au lieu de la proposition 4.12. \square

4.4 Cas d'un anneau de base principal

Hypothèse 4.16. Dans toute la section 4.4, on suppose que l'anneau k est principal.

Soient F et G des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{D}; k)$ respectivement. On notera $\mathbf{Tor}(F, G)$ le foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k)$ composé de $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \xrightarrow{F \times G} k\text{-Mod} \times k\text{-Mod} \xrightarrow{\text{Tor}_1^k} k\text{-Mod}$. Lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, on notera $\mathbf{Tor}(F, G)$ le foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ composé de la diagonale $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ et de $\mathbf{Tor}(F, G)$.

La proposition 4.12 possède la généralisation suivante.

Proposition 4.17. *Soient F (resp. G) un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{D}; k)$) et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que F et G possèdent la propriété pf_n . Alors le foncteur $F \boxtimes G$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$ si et seulement si $\mathbf{Tor}(F, G)$ appartient à $\mathbf{pf}_{n-2}(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$.*

Démonstration. Soit P_\bullet (resp. Q_\bullet) une résolution projective de F (resp. G), de type fini jusqu'en degré n . Le complexe total de $P_\bullet \boxtimes Q_\bullet$ est constitué de foncteurs projectifs de type fini de $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k)$; comme P_\bullet et Q_\bullet prennent leurs valeurs dans les k -modules projectifs, l'homologie de ce complexe est $F \boxtimes G$ en degré 0, $\mathbf{Tor}(F, G)$ en degré 1 et 0 ailleurs. Le corollaire 1.5 (et l'exemple 1.2(b)) montre alors que $F \boxtimes G$ est pf_n dès lors que $\mathbf{Tor}(F, G)$ vérifie pf_{n-2} . La réciproque s'établit de façon analogue, à partir de la proposition 1.4. \square

On démontre de la même façon :

Proposition 4.18. *Supposons que \mathcal{C} possède des coproduits finis. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, F et G des foncteurs de $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$. Le foncteur $F \otimes G$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ si et seulement si $\mathbf{Tor}(F, G)$ est dans $\mathbf{pf}_{n-2}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$.*

On peut facilement, à partir de là, exhiber un produit tensoriel non pf_2 de foncteurs sur une catégorie additive vérifiant chacun la propriété pf_2 , comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 4.19. Supposons que \mathcal{C} est la catégorie des groupes abéliens de type fini et que $k = \mathbb{Z}$. Prenons F et G égaux au foncteur d'inclusion vers \mathbf{Ab} et considérons, pour un nombre premier p , le foncteur T_p de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ associant à un groupe abélien de type fini sa composante p -primaire. Le foncteur F est représentable, donc projectif de type fini, et a fortiori pf_∞ dans $\mathbf{Add}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$. Le théorème 5.11 ci-après implique qu'il appartient également à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{C}; \mathbb{Z}))$. En revanche, $\mathbf{Tor}(F, F)$ n'est pas de type fini, car il est isomorphe à la somme directe infinie sur les nombres premiers p des $\mathbf{Tor}(T_p, T_p)$, qui sont tous non nuls.

Si V est un k -module, nous noterons V_{tor} son sous-module de torsion. Pour $x \in k$, nous désignerons par ${}_xV$ le sous-module $\text{Hom}_k(k/(x), V)$ des éléments de V annihilés par x . Pour un foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$, nous noterons F_{tor} (resp. ${}_xF$) le sous-foncteur de F obtenu par postcomposition de F avec $V \mapsto V_{\text{tor}}$ (resp. $V \mapsto {}_xV$). Nous dirons que F est *de torsion bornée* s'il existe $x \in k \setminus \{0\}$ tel que l'inclusion ${}_xF \hookrightarrow F_{\text{tor}}$ soit une égalité — on dit alors que F est de torsion *bornée par x* .

On rappelle par ailleurs que, si \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{E} sont des catégories k -linéaires, un foncteur $T : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ est dit *k -bilinéaire* si, pour tous objets a, a' de \mathcal{A} et b, b' de \mathcal{B} , l'application $\mathcal{A}(a, a') \times \mathcal{B}(b, b') \rightarrow \mathcal{E}(T(a, b), T(a', b'))$ induite par T est k -bilinéaire. On notera $\mathbf{Bil}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}; k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}; k)$ constituée des foncteurs k -bilinéaires.

Dans les deux lemmes suivants, si x est un élément non nul de k , on note $\overline{\mathcal{A}}_x$ la sous-catégorie pleine de $k\text{-Mod}$ constituée des modules dont la torsion est bornée par x , et \mathcal{A}_x la sous-catégorie pleine des modules de type fini de $\overline{\mathcal{A}}_x$.

Lemme 4.20. *Soient x un élément non nul de k et B un foncteur de $\mathbf{Bil}(\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_x; k)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. B prend ses valeurs dans les k -modules de type fini ;
2. B est noethérien ;
3. B appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathbf{Bil}(\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_x; k))$.

Démonstration. Comme l'anneau k est principal, tout objet de \mathcal{A}_x est isomorphe à une somme directe finie de k -modules indécomposables, et l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets indécomposables, dont nous noterons \mathcal{S} un ensemble de représentants, est *fini*.

Comme le foncteur

$$ev_{\mathcal{S}} : \mathbf{Bil}(\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_x; k) \rightarrow (k\text{-Mod})^{\mathcal{S} \times \mathcal{S}} \quad X \mapsto (X(U, V))_{(U, V) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}}$$

est exact et pleinement fidèle, tout objet X de $\mathbf{Bil}(\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_x; k)$ tel que $ev_{\mathcal{S}}(X)$ soit noethérien est lui-même noethérien. Comme \mathcal{S} est fini et que k est un anneau noethérien, cela montre l'implication $1 \Rightarrow 2$.

La catégorie $\mathbf{Bil}(\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_x; k)$ est engendrée par les foncteurs $\mathcal{A}_x(U, -) \boxtimes \mathcal{A}_x(V, -)$ pour U, V dans \mathcal{A}_x . Comme ces foncteurs sont à valeurs de type fini, on en déduit l'implication réciproque $2 \Rightarrow 1$ et le caractère localement noethérien de la catégorie $\mathbf{Bil}(\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_x; k)$. Celui-ci entraîne l'équivalence de 2 et 3, grâce à l'exemple 1.2(c). \square

Lemme 4.21. *Soient x un élément non nul de k et $T : \overline{\mathcal{A}}_x \times \overline{\mathcal{A}}_x \rightarrow k\text{-Mod}$ un foncteur k -bilinéaire vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. si U et V sont des objets de \mathcal{A}_x , $T(U, V)$ est un k -module de type fini ;
2. T commute aux colimites filtrantes.

Alors il existe une résolution de T par des sommes directes finies de foncteurs du type $(U, V) \mapsto ({}_aU) \otimes ({}_bV)$, où $(a, b) \in k^2$.

Démonstration. L'équivalence $1 \Leftrightarrow 3$ du lemme 4.20 et la proposition 1.6 montrent que la restriction de T à $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_x$ possède une résolution par des sommes directes finies de foncteurs du type $(U, V) \mapsto ({}_aU) \otimes ({}_bV)$. Étant donné que ces foncteurs, ainsi que T , commutent aux colimites filtrantes, cette résolution s'étend en une résolution de T de la forme souhaitée. \square

Proposition 4.22. Soient F (resp. G) un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{D}; k)$) et $n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que :

1. F et G possèdent la propriété pf_n ;
2. F et G sont de torsion bornée;
3. pour tout $x \in k \setminus \{0\}$, ${}_x F$ et ${}_x G$ vérifient la propriété pf_m .

Alors :

- (A) le foncteur $F \boxtimes G$ appartient à $\mathbf{pf}_{\min(n, m+2)}(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$;
- (B) le foncteur $\mathbf{Tor}(F, G)$ appartient à $\mathbf{pf}_{\min(n, m)}(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$;
- (C) si $T : (k\text{-Mod}) \times (k\text{-Mod}) \rightarrow k\text{-Mod}$ est un bifoncteur k -bilinéaire qui commute aux colimites filtrantes et envoie toute paire de k -modules de type fini sur un k -module de type fini, alors le foncteur $T \circ (F \times G)$ appartient à $\mathbf{pf}_{\min(n, m)}(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$.

Démonstration. Soit x un élément non nul de k . On va montrer, plus précisément, les propriétés suivantes (où $n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$) :

- (A) _{n} si F (resp. G) est un foncteur de $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ (resp. $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{D}; k))$), à valeurs dans $\overline{\mathcal{A}}_x$, et que pour tout $x \in k \setminus \{0\}$, ${}_x F$ et ${}_x G$ vérifient la propriété pf_{n-2} , alors $F \boxtimes G$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$;
- (B) _{n} si F (resp. G) est un foncteur de $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ (resp. $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{D}; k))$), à valeurs dans $\overline{\mathcal{A}}_x$, et que pour tout $x \in k \setminus \{0\}$, ${}_x F$ et ${}_x G$ vérifient la propriété pf_n , alors le foncteur $\mathbf{Tor}(F, G)$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$;
- (C) _{n} si F (resp. G) est un foncteur de $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ (resp. $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{D}; k))$), à valeurs dans $\overline{\mathcal{A}}_x$, que pour tout $x \in k \setminus \{0\}$, ${}_x F$ et ${}_x G$ vérifient la propriété pf_n , et que $T : (k\text{-Mod}) \times (k\text{-Mod}) \rightarrow k\text{-Mod}$ est comme dans (C), alors le foncteur $T \circ (F \times G)$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k))$;
- (D) _{n} si F (resp. G) est un foncteur de $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ (resp. $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{D}; k))$), à valeurs dans $\overline{\mathcal{A}}_x$, et si pour tout $x \in k \setminus \{0\}$, ${}_x F$ et ${}_x G$ vérifient la propriété pf_n , alors pour tout $(a, b) \in k^2$, le foncteur $({}_a F) \boxtimes ({}_b G)$ vérifie pf_n .

On procède selon le schéma de récurrence suivant :

$$(A)_n \Rightarrow (D)_n \Rightarrow (C)_n \Rightarrow (B)_n \Rightarrow (A)_{n+2}$$

(Comme ces propriétés sont vides pour $n < 0$, il n'y a pas d'initialisation).

Si F et G vérifient les hypothèses de (D) _{n} , alors tous leurs sous-foncteurs ${}_a F$ et ${}_b G$ vérifient les hypothèses de (A) _{n} , d'où l'implication (A) _{n} \Rightarrow (D) _{n} .

L'implication (D) _{n} \Rightarrow (C) _{n} s'obtient en appliquant le lemme 4.21 à la restriction de T à $\overline{\mathcal{A}}_x \times \overline{\mathcal{A}}_x$, puis le corollaire 1.5.

L'implication (C) _{n} \Rightarrow (B) _{n} résulte de ce que le foncteur \mathbf{Tor}^k commute aux colimites filtrantes et envoie toute paire de k -modules de type fini sur un module de type fini.

La proposition 4.17 fournit l'implication (B) _{n} \Rightarrow (A) _{$n+2$} . □

Notation 4.23. On note $\mathbf{Tpf}_n(\mathcal{C}; k)$ la classe des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout $x \in k$, le foncteur ${}_x F$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$;
2. la torsion de F est bornée.

Corollaire 4.24. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et F (resp. G) un foncteur de $\mathbf{Tpf}_n(\mathcal{C}; k)$ (resp. $\mathbf{Tpf}_n(\mathcal{D}; k)$). Alors $F \boxtimes G$ et $\mathbf{Tor}(F, G)$ appartiennent à $\mathbf{Tpf}_n(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; k)$.

Démonstration. Il est immédiat que les foncteurs $F \boxtimes G$ et $\mathbf{Tor}(F, G)$ sont de torsion bornée, comme F et G . Pour vérifier le caractère pf_n de ${}_x(F \boxtimes G)$ et ${}_x\mathbf{Tor}(F, G)$, on applique l’assertion (C) de la proposition 4.22 aux bifoncteurs $(U, V) \mapsto {}_x(U \otimes V)$ et $(U, V) \mapsto {}_x\mathrm{Tor}^k(U, V)$. \square

Corollaire 4.25. Supposons que \mathcal{C} possède des coproduits finis. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, F et G des foncteurs de $\mathbf{Tpf}_n(\mathcal{C}; k)$. Alors $F \otimes G$ et $\mathbf{Tor}(F, G)$ appartiennent à $\mathbf{Tpf}_n(\mathcal{C}; k)$.

Démonstration. Cela résulte du corollaire 4.24 et de la proposition 1.12, puisque la diagonale de \mathcal{C} est adjointe à droite au coproduit $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. \square

Le corollaire suivant nous servira au § 6.4.

Corollaire 4.26. Supposons que \mathcal{C} possède des coproduits finis. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et \mathfrak{P} une classe d’objets de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ telle que :

1. \mathfrak{P} est stable par sous-objet ;
2. tout foncteur de \mathfrak{P} est noethérien ;
3. \mathfrak{P} est incluse dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$.

Si F_1, \dots, F_r appartiennent à \mathfrak{P} , alors $F_1 \otimes \dots \otimes F_r$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$.

Démonstration. Si F est un foncteur noethérien, son sous-foncteur F_{tor} est de type fini, donc F est de torsion bornée. Les première et troisième hypothèses sur \mathfrak{P} montrent par ailleurs que ${}_xF$ vérifie pf_n pour tout $x \in k$ et tout $F \in \mathfrak{P}$. Ainsi, \mathfrak{P} est incluse dans $\mathbf{Tpf}_n(\mathcal{C}; k)$, et le corollaire 4.25 permet de conclure. \square

5 La propriété pf_n pour les foncteurs additifs

La catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ est généralement beaucoup plus facile à étudier que $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ (par exemple, pour $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, la catégorie des foncteurs additifs est équivalente à celle des (k, A) -bimodules, par le théorème d’Eilenberg-Watts). Certaines propriétés de finitude des foncteurs additifs (comme la noethérianité) sont trivialement équivalentes dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$, mais ce n’est pas le cas pour la propriété pf_n . Dans cette section nous expliquons comment l’inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ se comporte vis-à-vis de la propriété pf_n .

Précisément, nous montrons à la proposition 5.7 que la propriété pf_n est toujours préservée par l’inclusion si k est une \mathbb{Q} -algèbre. Nous montrons aux théorèmes 5.9 et 5.11 que si $k = \mathbb{Z}$ ou si k contient un corps fini, la préservation de la propriété pf_n est reliée à la propriété de transfert $(T_{n,p})$ ci-dessous.

Dans l’énoncé suivant, on note ${}_pV = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, V)$ le sous-groupe de p -torsion d’un groupe abélien V .

Proposition et définition 5.1. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et p un nombre premier. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- ($T_{n,p}^1$) Pour tout $i \leq n$, l’inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p) \hookrightarrow \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ préserve les objets pf_i .

- $(T_{n,p}^2)$ Pour tout $i \leq n$, un foncteur de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ appartient à la classe $\mathbf{pf}_i(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p))$ si et seulement s'il appartient à $\mathbf{pf}_i(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$.
- $(T_{n,p}^3)$ Pour tout objet a de \mathcal{A} , le foncteur ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ appartient à la classe $\mathbf{pf}_{n-2}(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$.
- $(T_{n,p}^4)$ Pour tout objet a de \mathcal{A} , le foncteur ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ appartient à la classe $\mathbf{pf}_{n-2}(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p))$.

Lorsqu'elles sont satisfaites, nous dirons que la petite catégorie additive \mathcal{A} satisfait la propriété de transfert $(T_{n,p})$.

Démonstration. L'équivalence entre $(T_{n,p}^1)$ et $(T_{n,p}^3)$ découle des suites exactes $0 \rightarrow {}_p\mathcal{A}(a, -) \rightarrow \mathcal{A}(a, -) \xrightarrow{p} \mathcal{A}(a, -) \rightarrow \mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p \rightarrow 0$, de la proposition 1.4 et de l'exemple 1.2(b).

On montre ensuite par récurrence sur n que les quatre conditions sont équivalentes. Plus précisément, pour $n = 0$ les quatre conditions sont vraies quelle que soit la catégorie \mathcal{A} , et sont donc trivialement équivalentes. Supposons démontré que les quatre conditions $(T_{i,p}^k)$ sont équivalentes pour tout $i < n$. Alors pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ et tout $i < n$ on a l'implication :

$$(T_{n,p}^k) \Rightarrow (T_{i,p}^k) \Rightarrow ((T_{i,p}^1) + (T_{i,p}^2) + (T_{i,p}^3) + (T_{i,p}^4)).$$

On obtient alors l'équivalence entre les quatre conditions $(T_{n,p}^k)$ à l'aide des implications suivantes.

$$\begin{aligned} (T_{n,p}^2) &\Rightarrow (T_{n,p}^1); & ((T_{n,p}^1) + (T_{n-1,p}^2)) &\Rightarrow (T_{n,p}^2); \\ ((T_{n,p}^4) + (T_{n-2,p}^1)) &\Rightarrow (T_{n,p}^3); & ((T_{n,p}^3) + (T_{n-2,p}^2)) &\Rightarrow (T_{n,p}^4). \end{aligned}$$

Parmi ces implications, $((T_{n,p}^1) + (T_{n-1,p}^2)) \Rightarrow (T_{n,p}^2)$ provient de la proposition 1.8, qui s'applique à l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p) \hookrightarrow \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ grâce à la remarque 1.7. Les autres implications sont immédiates. \square

Exemple 5.2. La propriété $(T_{n,p})$ est vérifiée pour tout n dans chacun des cas suivants :

1. lorsque la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ est localement noethérienne (en effet l'exemple 1.2(c) montre que $(T_{n,p}^4)$ est satisfaite);
2. lorsque la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est localement noethérienne (car cela implique que la sous-catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ l'est également);
3. lorsque la catégorie \mathcal{A} est \mathbb{Z}/p -linéaire;
4. lorsque les groupes abéliens de morphismes dans la catégorie \mathcal{A} sont sans p -torsion;
5. lorsque la catégorie \mathcal{A} possède des conoyaux (car ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ est alors isomorphe au foncteur $\mathcal{A}(a/p, -)$, où a/p désigne le conoyau de $p \cdot \text{Id}_a$).

Les travaux d'Auslander [3] donnent de nombreux exemples de petites catégories abéliennes \mathcal{A} telles que $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ n'est pas localement noethérienne (par exemple, la catégorie des modules à gauche de type fini sur une \mathbb{Z}/p -algèbre finie de type de représentation infini), qui entrent donc dans le dernier cas mais pas dans les deux premiers.

Exemple 5.3. Si $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p) \hookrightarrow \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ s'identifie à la restriction $\mathbf{Mod}\text{-}A \rightarrow \mathbf{Mod}\text{-}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p)$ le long de l'épimorphisme canonique $A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$. Ainsi, $\mathbf{P}(A)$ possède la propriété $(T_{n,p})$ si et seulement si l'idéal ${}_pA$ des éléments de A annulés par multiplication par p est dans $\mathbf{pf}_{n-2}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$.

Cet idéal peut ne pas être de type fini, comme l'illustre l'exemple de l'anneau $A = \mathbb{Z} \oplus V$, où V est un \mathbb{Z}/p -espace vectoriel infini, avec la multiplication $(a, v).(b, w) = (ab, aw + bv)$. Pour un tel anneau A , $\mathbf{P}(A)$ ne possède pas la propriété $(T_{n,p})$ si $n > 1$.

Remarque 5.4. L'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p) \hookrightarrow \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ ne préserve pas toujours la propriété pf_n (sauf si $n \leq 1$), cf. l'exemple 5.3. La propriété $(T_{n,p})$ constitue donc une caractéristique intéressante d'une catégorie additive \mathcal{A} . À l'inverse, l'inclusion $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ préserve toujours les objets pf_n , et ne dit rien de la catégorie \mathcal{A} . Cette préservation résulte des suites exactes courtes $0 \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)] \xrightarrow{p} \mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)] \rightarrow \mathbb{Z}/p[\mathcal{A}(a, -)] \rightarrow 0$, de l'exemple 1.2(b) et de la proposition 1.8.

Nos résultats de transfert de la propriété pf_n de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ à $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ (tirés essentiellement des premières versions prépubliées de [14]) reposent sur la *construction cubique de MacLane*, dont la proposition ci-dessous résume les propriétés utiles.

Proposition 5.5 (Eilenberg-MacLane, Cartan, Dold-Puppe...). *Il existe un complexe de chaînes Q_* d'endofoncteurs des groupes abéliens possédant les propriétés suivantes.*

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est un facteur direct du foncteur $V \mapsto \mathbb{Z}[V^{2^n}]$.
- (2) L'homologie de Q_* en degré nul est isomorphe au foncteur identité.
- (3) L'homologie de Q_* est nulle en degré 1 et isomorphe en chaque degré supérieur ou égal à 2 à une somme directe finie de foncteurs du type $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$ ou $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -)$ pour des nombres premiers p . Le plus bas degré où le foncteur $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$, resp. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -)$, apparaît comme facteur direct de l'homologie de Q_* est $2p - 2$, resp. $2p - 1$.

Démonstration. La construction cubique de MacLane [18, § 12] (on pourra aussi consulter la présentation plus récente de Johnson-McCarthy [25, § 6]) fournit le complexe désiré. En effet ce complexe, évalué sur V , calcule (fonctoriellement en V) l'homologie stable (à coefficients entiers) des espaces d'Eilenberg-MacLane associés à V , de sorte que (2) est clair et (3) résulte du calcul par Cartan [1, exp. 11, § 6, Th. 2] de cette homologie; (1) découle de la définition explicite du complexe. \square

Par la formule des coefficients universels, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 5.6. *Si l'anneau k contient un corps premier, il existe un complexe de chaînes Q_*^k de foncteurs $\mathbf{Ab} \rightarrow k\text{-}\mathbf{Mod}$ possédant les propriétés suivantes.*

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n^k est un facteur direct du foncteur $V \mapsto k[V^{2^n}]$.
- (2) L'homologie de Q_*^k en degré nul est isomorphe à $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Z}} k$.
- (3) Si k est de caractéristique nulle, l'homologie de Q_*^k est nulle en degrés strictement positifs.

- (4) Si k est de caractéristique $p > 0$, l'homologie de Q_*^k est isomorphe en chaque degré non nul à une somme directe finie de foncteurs du type $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$ ou $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -)$. Le plus bas degré strictement positif où le foncteur $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$, resp. $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -)$, apparaît comme facteur direct de l'homologie de Q_* est $2p - 3$, resp. $2p - 2$.

Proposition 5.7. *Supposons que k est une \mathbb{Q} -algèbre. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ préserve les objets pf_n .*

Démonstration. D'après la proposition 1.8, il suffit de montrer que les foncteurs additifs $\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ appartiennent à $\mathbf{pf}_{\infty}(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$. Cela résulte du corollaire 5.6, qui montre que le complexe $Q_*^k \circ \mathcal{A}(a, -)$ est une résolution projective dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ de $\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} k$, dont tous les termes sont de type fini. \square

Remarque 5.8. La conclusion vaut plus généralement lorsqu'on remplace au but des foncteurs les k -modules par une catégorie de Grothendieck \mathbb{Q} -linéaire localement pf_n .

Le théorème suivant est l'analogie de la proposition 5.7 en caractéristique positive. Il fournit également une nouvelle caractérisation de la propriété de transfert $(T_{n,p})$.

Théorème 5.9. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que k est un anneau non nul de caractéristique p première. Alors \mathcal{A} vérifie la propriété $(T_{n,p})$ si et seulement si l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ préserve la propriété pf_i pour tout $i \leq n + 2p - 3$.*

Démonstration. Supposons que \mathcal{A} vérifie la propriété $(T_{n,p})$, et montrons que l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ préserve la propriété pf_i pour $i \leq n + 2p - 3$. D'après les propositions 1.8 et 4.4, il suffit pour cela de montrer que la propriété

$$(HR_i) \quad \mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p \text{ est dans } \mathbf{pf}_i(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)) \text{ pour tout } a \in \text{Ob } \mathcal{A}$$

est vraie pour tout $i \leq n + 2p - 3$. Nous la démontrons par récurrence sur i . La propriété (HR_0) est vérifiée car $\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$ est un quotient de $\mathbb{Z}/p[\mathcal{A}(a, -)]$. Supposons (HR_i) vérifiée, avec $i < n + 2p - 3$. La proposition 1.8 montre alors que l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ préserve la propriété pf_j pour $j \leq i$. Comme \mathcal{A} vérifie de plus $(T_{n,p})$, les foncteurs ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ sont dans $\mathbf{pf}_m(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p))$ pour $m = \min\{i, n - 2\}$. Considérons maintenant le complexe $Q_*^{\mathbb{Z}/p} \circ \mathcal{A}(a, -)$ de la proposition 5.6. Il est constitué de foncteurs projectifs de type fini de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$. Son homologie en degré nul est isomorphe à $\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$, son homologie est nulle en degrés j pour $0 < j < 2p - 3$, son homologie de degré $2p - 3$ est dans $\mathbf{pf}_{i-(2p-3)}(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p))$, et en degrés $j \geq 2p - 4$, son homologie est constituée de foncteurs de $\mathbf{pf}_m(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p))$ avec $m \geq i - j$. On en déduit alors (HR_{i+1}) par le corollaire 1.5.

Réciproquement, supposons que l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ préserve la propriété pf_j pour tout $j \leq n + 2p - 3$. D'après la proposition 4.4, cela implique que les foncteurs $\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$ sont pf_{n+2p-3} , donc que l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ préserve la propriété pf_j pour tout $j \leq n + 2p - 3$. Nous allons montrer que \mathcal{A} vérifie $(T_{n,p})$ par récurrence. Comme toute catégorie additive, \mathcal{A} vérifie $(T_{0,p})$. Supposons que \mathcal{A} vérifie $(T_{i,p})$, avec $i < n$. Alors les foncteurs ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ sont dans $\mathbf{pf}_{i-2}(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p))$. Soit C_* le complexe $Q_*^{\mathbb{Z}/p} \circ$

$\mathcal{A}(a, -)$; notons Z_j le foncteur des cycles de degré j de ce complexe, et B_j le foncteur des bords de degré j . En utilisant les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow Z_{2p-3} \rightarrow C_{2p-3} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow H_0(C) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow B_{2p-3} \rightarrow Z_{2p-3} \rightarrow H_{2p-3}(C) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow Z_{2p-2} \rightarrow C_{2p-2} \rightarrow B_{2p-3} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

le fait que les foncteurs C_j sont projectifs de type fini (donc pf_∞), le fait que $H_0(C)$ et $H_{2p-3}(C)$ sont des sommes directes finies de copies de $\mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$ (donc pf_{n+2p-3}) et le troisième point de la proposition 1.4, on obtient que le foncteur Z_{2p-2} appartient à $\mathbf{pf}_{n-2}(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$. Par ailleurs, le complexe tronqué décalé $T_* = C_{*+2p-1}$ pour $* \geq 0$ est un complexe de projectifs de type fini, dont les groupes d'homologie en degré non nul sont pf_{i-2} . Le corollaire 1.5 montre donc que son homologie de degré nul, le foncteur B_{2p-2} , appartient à $\mathbf{pf}_{i-1}(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$. On déduit alors du deuxième point de la proposition 1.4 que le foncteur $H_{2p-2}(C)$, donc son facteur direct ${}_p\mathcal{A}(a, -)$, appartient à $\mathbf{pf}_m(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$ pour $m = \min\{i, n-2\}$, donc pour $m = i-1$. Ainsi \mathcal{A} vérifie $(T_{i+1,p})$. \square

Remarque 5.10 (Cf. remarque 5.8). Sous l'hypothèse du théorème 5.9, plus généralement, l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \hookrightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ préserve la propriété pf_n si la catégorie \mathcal{E} est \mathbb{Z}/p -linéaire et localement pf_n .

En se basant sur la proposition 5.5 et raisonnant comme pour le sens direct du théorème 5.9, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.11. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si \mathcal{A} vérifie la propriété $(T_{n-2p+2,p})$ pour tout p premier, alors l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ préserve la propriété pf_n .*

Remarque 5.12. Sous l'hypothèse du théorème 5.11, plus généralement, l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; A) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; A)$ préserve la propriété pf_n si A est un anneau dont le groupe abélien sous-jacent est sans torsion.

6 Deuxième lemme de Schwartz généralisé

Dans la section 3, nous avons montré que les foncteurs polynomiaux sur $\mathbf{P}(A)$ (où A est un anneau) vérifient la propriété psf_∞ , généralisant le lemme de Schwartz [21, Prop. 10.1]. L'objectif de la présente section est d'établir une autre généralisation du lemme de Schwartz, donnant cette fois la propriété pf_∞ pour des foncteurs polynomiaux.

Nous obtenons en fait deux résultats en ce sens. Le premier, valable lorsque l'anneau de coefficients au but k est un corps, est le théorème 6.14. Il repose sur les résultats de [14] qui indiquent que, sous des hypothèses raisonnables, un foncteur polynomial simple de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ s'écrit comme un produit tensoriel de foncteurs du type $E \circ A$ où E est un foncteur polynomial de $\mathcal{F}(k, k)$ et A un foncteur additif dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$. Pour établir le théorème 6.14, nous étudions tout d'abord dans les sections 6.1 et 6.2 comment la propriété pf_n est préservée par postcomposition par un foncteur polynomial E .

Le deuxième résultat, valable pour $k = \mathbb{Z}$, est énoncé au théorème 6.17 et au corollaire 6.18. On l'obtient en analysant la filtration polynomiale des foncteurs.

Nous appliquons ensuite nos résultats pour obtenir de nouveaux résultats de finitude pour l'homologie de Hochschild des catégories et les groupes $\mathrm{GL}(A)$.

Notation 6.1. On désigne par $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ (resp. $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}; k)$, et $\mathcal{P}ol_d(A, k)$, si A est un anneau) la sous-catégorie pleine des foncteurs polynomiaux de degré au plus d de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$, $\mathcal{F}(A, k)$).

Les rappels utiles sur la notion de foncteur polynomial, qui remonte à Eilenberg-MacLane [17, chap. II], peuvent se trouver par exemple dans [14, §2].

Si F est un foncteur de $\mathcal{F}(k, k)$, nous noterons \tilde{F} son extension de Kan à gauche le long de l'inclusion pleinement fidèle de $\mathbf{P}(k)$ dans la catégorie des k -modules plats. Le foncteur $F \mapsto \tilde{F}$ est *exact* car $\tilde{F}(M)$ s'obtient par colimite des $F(V)$ pour V dans $\mathbf{P}(k)$ muni d'un morphisme k -linéaire vers V , et cette colimite est *filtrante* pour V plat.

6.1 Postcomposition par un foncteur polynomial

On rappelle que l'anneau k est dit *solide* si la multiplication $k \otimes_{\mathbb{Z}} k \rightarrow k$ est un isomorphisme.

Lemme 6.2. *Supposons que l'anneau k est solide et noethérien. Soient $d \in \mathbb{N}$ et F un foncteur de $\mathcal{F}(k, k)$ polynomial de degré au plus d , et dont les valeurs sont des k -modules de type fini. Alors il existe un complexe de chaînes C_\bullet de $\mathcal{F}(k, k)$, d'homologie notée H_\bullet , possédant les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $i \in \mathbb{N}$, le foncteur C_i est une somme directe finie de copies de la d -ème puissance tensorielle T^d sur k ;*
2. *pour tout $i > 0$, H_i est un foncteur polynomial de degré strictement inférieur à d , à valeurs dans les k -modules de type fini ;*
3. *il existe un morphisme $H_0 \rightarrow F$ dont le noyau et le conoyau sont des foncteurs polynomiaux de degré strictement inférieur à d à valeurs dans les k -modules de type fini.*

Démonstration. Comme l'anneau k est solide, le foncteur

$$\mathcal{F}(k, k) \rightarrow k[\mathfrak{S}_d]\text{-Mod} \quad X \mapsto cr_d(X)(k, \dots, k)$$

(où \mathfrak{S}_d désigne le groupe symétrique sur d lettres et cr_d le d -ième effet croisé, comme dans [14]) induit une équivalence $\mathcal{P}ol_d(k, k)/\mathcal{P}ol_{d-1}(k, k) \xrightarrow{\cong} k[\mathfrak{S}_d]\text{-Mod}$, par un résultat classique de Pirashvili [32]. On en déduit aisément que le complexe $C_\bullet := T^d \otimes_{k[\mathfrak{S}_d]} R_\bullet$, où R_\bullet est une résolution du $k[\mathfrak{S}_d]$ -module $cr_d(F)(k, \dots, k)$

par des modules libres de rang fini (une telle résolution existe car F est à valeurs de type fini sur k et que cet anneau est noethérien), convient. \square

Proposition 6.3. *Supposons que \mathcal{C} possède des coproduits finis et que l'anneau k est solide et noethérien. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, F un foncteur polynomial de $\mathcal{F}(k, k)$ à valeurs dans les k -modules de type fini, et X un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ à valeurs plates. Si X appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$, alors il en est de même pour $\tilde{F} \circ X$.*

Démonstration. Soit d le degré polynomial de F ; par récurrence, on peut supposer que $\tilde{G} \circ X$ vérifie pf_n si G est un foncteur polynomial de degré $< d$, à valeurs de type fini, de $\mathcal{F}(k, k)$. Considérons un complexe C_\bullet donné par le lemme 6.2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le foncteur $\tilde{C}_i \circ F$ possède la propriété pf_n , grâce au premier point de ce lemme et à la proposition 4.13. Pour $i > 0$, l'hypothèse de récurrence

et le deuxième point du lemme 6.2 montrent que $\tilde{H}_i \circ F$ vérifie pf_n . L'exactitude de $F \mapsto \tilde{F}$ et de la précomposition par X , combinée au corollaire 1.5, montre que $\tilde{H}_0 \circ F$ est pf_n . Utilisant la dernière assertion du lemme 6.2 et l'hypothèse de récurrence, on en tire un morphisme $\tilde{H}_0 \circ X \rightarrow \tilde{F} \circ X$ dont source, noyau et conoyau vérifient la propriété pf_n . La proposition 1.4 implique que son but $\tilde{F} \circ X$ vérifie également pf_n , d'où la conclusion. \square

Remarque 6.4. On ne peut pas s'affranchir en général de l'hypothèse de platitude des valeurs de X . L'exemple 4.19 donne un cas particulier de ce phénomène lorsque $k = \mathbb{Z}$ et que F est la deuxième puissance tensorielle.

6.2 Postcomposition par un foncteur polynomial strict

Afin de lever l'hypothèse, restrictive (cf. la description de tous les anneaux solides par Bousfield-Kan [5, pr. 3.5]), de solidité de k dans la proposition 6.3, nous sommes conduits à considérer des foncteurs polynomiaux *stricts*.

Soit $d \in \mathbb{N}$. On rappelle que la catégorie, qu'on désigne par $\mathcal{P}_d(k)$ (qui est notée $\mathbf{Rep} \Gamma_k^d$ dans le survol [26] auquel on renvoie pour plus de détails sur cette notion qui remonte à Friedlander-Suslin [22]) des foncteurs polynomiaux stricts³ homogènes de poids d sur k est la catégorie des foncteurs k -linéaires $\Gamma_k^d(\mathbf{P}(k)) \rightarrow k\text{-Mod}$, où $\Gamma_k^d(\mathbf{P}(k))$ désigne la catégorie avec les mêmes objets que $\mathbf{P}(k)$ et pour morphismes $(\Gamma_k^d(\mathbf{P}(k)))(U, V) := \Gamma_k^d(\mathbf{P}(k)(U, V))$, où Γ_k^d (notée simplement Γ^d s'il n'y a pas d'ambiguïté) désigne la d -ème puissance divisée (sur k), c'est-à-dire les invariants sous l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_d de la d -ème puissance tensorielle sur k . La catégorie $\mathcal{P}_d(k)$ est une catégorie de Grothendieck k -linéaire; elle est équivalente à la catégorie des modules à gauche sur l'algèbre de Schur $S_{d,n}(k) := \text{End}_{k[\mathfrak{S}_d]}((k^n)^{\otimes d})$ pour $n \geq d$. Comme $S_{d,n}(k)$ est une k -algèbre finie, elle est noethérienne si l'anneau k est noethérien, $\mathcal{P}_d(k)$ est donc alors une catégorie localement noethérienne. On dispose d'un foncteur d'oubli exact et fidèle $\mathcal{P}_d(k) \rightarrow \mathcal{F}(k, k)$ dont l'image est incluse dans les foncteurs polynomiaux de degré au plus d ; par abus, on note de la même façon un foncteur de $\mathcal{P}_d(k)$ et son image dans $\mathcal{F}(k, k)$.

Proposition 6.5. *Supposons que la catégorie \mathcal{C} possède des coproduits finis et que l'anneau k est noethérien. Soient $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, E un foncteur de type fini de $\mathcal{P}_d(k)$ et X un foncteur de $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$. On suppose que X prend ses valeurs dans les k -modules plats. Alors $\tilde{E} \circ X$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$.*

Démonstration. Comme k est noethérien, $\mathcal{P}_d(k)$ est une catégorie localement noethérienne, de sorte que E appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{P}_d(k))$. Comme $\mathcal{P}_d(k)$ est engendrée [26, p. 1000] par les foncteurs projectifs de type fini $\Gamma^{d,V} := \Gamma^d(\text{Hom}_k(V, -))$, où V est un objet de $\mathbf{P}(k)$, l'exactitude de $E \mapsto \tilde{E}$, la proposition 1.6 et l'exemple 1.2(c) montrent qu'il suffit de voir que $\Gamma^d \circ X$ vérifie la propriété pf_n , quitte à remplacer X par $\text{Hom}_k(V, -) \circ X$ (qui est pf_n comme X).

Le caractère pf_n de X , combiné à la proposition 1.6 et à la correspondance de Dold-Kan (cf. la démonstration de la proposition 7.1 ci-après) montrent qu'il existe un objet simplicial R_\bullet de la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ tel que R_m est, pour tout $m \leq n$, une somme directe finie de foncteurs projectifs $P_{\mathcal{C}}^t$ avec $t \in \text{Ob} \mathcal{C}$, dont l'homotopie est isomorphe à X en degré nul et triviale en degré supérieur.

3. Contrairement à certains auteurs, nous autorisons les foncteurs polynomiaux stricts à prendre leurs valeurs dans les k -modules arbitraires (pas seulement projectifs de type fini).

Comme R_\bullet et son homotopie sont k -plats, on en déduit que $\Gamma^d \circ R_\bullet$ a une homotopie isomorphe à $\Gamma^d \circ X$ en degré nul, et triviale en degré supérieur. Or, pour $m \leq n$, $\Gamma^d \circ R_m$ est isomorphe à $\left(\Gamma_{\mathbb{Z}}^d \circ \left(\bigoplus_{j=1}^r \mathbb{Z}[\mathcal{C}(t_j, -)]\right)\right) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ pour des objets t_1, \dots, t_r appropriés de \mathcal{C} . Comme \mathbb{Z} est un anneau solide noethérien, la proposition 6.3 montre que $\Gamma_{\mathbb{Z}}^d \circ \left(\bigoplus_{j=1}^r \mathbb{Z}[\mathcal{C}(t_j, -)]\right)$ appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{C}; \mathbb{Z}))$. Comme il est à valeurs \mathbb{Z} -plates, cela implique par la proposition 4.4 que $\Gamma^d \circ R_m$ appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{C}; k))$ pour $m \leq n$, de sorte que la correspondance de Dold-Kan et le corollaire 1.5 permettent de conclure. \square

Remarque 6.6. On peut s'affranchir de l'hypothèse de noethérianité de k , si l'on suppose que E appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{P}_d(k))$.

La proposition 6.5 admet la réciproque partielle suivante.

Proposition 6.7. *On suppose que k est un corps. Soient E un endofoncteur polynomial strict non constant des k espaces vectoriels, X un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si le foncteur $\tilde{E} \circ X$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$, alors il en est de même de X .*

Démonstration. Le terme constant $X(0)$ de X est de dimension finie sur k , car le foncteur constant en $\tilde{E}(X(0))$ est facteur direct de $\tilde{E} \circ X$, et donc dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$, autrement dit $\tilde{E}(X(0))$ est de dimension finie, ce qui implique la même propriété pour $X(0)$ puisque E est non constant. Comme $\tilde{E} \circ \bar{X}$ (où l'on a décomposé $X \simeq \bar{X} \oplus X(0)$) est facteur direct de $\tilde{E} \circ X$, et donc dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$, on peut supposer que X est réduit (i.e. $X(0) = 0$).

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ le degré au sens d'Eilenberg-MacLane de E (qui peut être strictement inférieur à son poids, ou degré polynomial strict). Alors $cr_d(E)$ est un multifoncteur polynomial strict en d variables sur les k -espaces vectoriels, qui est non nul et additif par rapport à chaque variable. C'est donc [40, pr. B.3] une somme directe non vide de foncteurs du type $(V_1, \dots, V_d) \mapsto V_1^{(i_1)} \otimes \dots \otimes V_d^{(i_d)}$, où les exposants entre parenthèses désignent des itérations convenables de la torsion de Frobenius (qu'on prend par convention triviale si k est de caractéristique nulle). Le lemme 6.8 ci-dessous et le fait que le foncteur $cr_d : \mathcal{F}(\mathcal{A}; k) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}^d; k)$ préserve la propriété pf_n (car c'est un facteur direct de la précomposition par la somme directe itérée $\mathcal{A}^d \rightarrow \mathcal{A}$, adjointe de chaque côté à la diagonale itérée, on peut donc appliquer la proposition 1.12), on en déduit qu'il existe (i_1, \dots, i_d) tel que le foncteur $X^{(i_1)} \otimes \dots \otimes X^{(i_d)}$ appartienne à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$. Par la proposition 4.15, on en déduit que $X^{(i)}$ vérifie pf_n pour un $i \in \mathbb{N}$. Il en est de même pour X par la proposition 4.4. \square

Le résultat élémentaire suivant est classique, il suit par exemple de la démonstration de la proposition 1.6 de [24].

Lemme 6.8. *Si F est un foncteur réduit, alors $cr_d(E) \circ F^{\times d}$ est facteur direct de $cr_d(E \circ F)$.*

Remarque 6.9. La proposition 6.7 demeure valide (et se montre de façon analogue) lorsque E est un foncteur polynomial (non nécessairement strict) non constant de $\mathcal{F}(k, k)$, si k est une extension finie de son sous-corps premier.

Remarque 6.10. L'énoncé et la démonstration de la proposition 6.7 procèdent d'un esprit très analogue aux résultats de Kuhn [28, th. 4.8 et lm. 4.12]. Kuhn

utilise le foncteur décalage plutôt que les effets croisés, méthode qui pourrait s'appliquer dans notre situation seulement avec des hypothèses supplémentaires sur \mathcal{A} : les foncteurs de décalage de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ préservent la propriété pf_n si et seulement si tous les groupes abéliens de morphismes $\mathcal{A}(x, y)$ sont *finis*.

6.3 Foncteurs polynomiaux à valeurs dans des espaces vectoriels de dimensions finies

Dans toute la section 6.3, on suppose que k est un corps. L'outil essentiel que nous allons utiliser pour aborder la propriété pf_n pour les foncteurs polynomiaux à valeurs dans des espaces vectoriels de dimensions finies, à partir des résultats de la section 5 sur les foncteurs additifs, est la notion de décomposition à la Steinberg introduite dans [14]. Nous en considérons ici une généralisation :

Définition 6.11. On appelle *décomposition à la Steinberg généralisée* d'un foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ tout isomorphisme

$$F \simeq \bigotimes_{i=1}^r \tilde{E}_i \circ A_i \quad (4)$$

où les E_i sont des foncteurs polynomiaux stricts de type fini non constants sur k et les A_i des foncteurs additifs de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$.

Si les E_i sont des *foncteurs élémentaires* et que les A_i sont des foncteurs absolument simples à valeurs de dimensions finies, on parle de *décomposition à la Steinberg*, cf. [14].

Proposition 6.12. *Si k est un corps, n un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ possédant une décomposition à la Steinberg généralisée (4), alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *le foncteur F appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$;*
2. *tous les foncteurs additifs A_i appartiennent à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$.*

Démonstration. Si l'on suppose que les foncteurs A_i vérifient la propriété pf_n , il en est de même pour les $\tilde{E}_i \circ A_i$ grâce à la proposition 6.5. On conclut que F possède lui-même la propriété pf_n par la proposition 4.13.

Réciproquement, si F possède la propriété pf_n , alors il en est de même pour les $\tilde{E}_i \circ A_i$ grâce à la proposition 4.15. La proposition 6.7 donne donc la conclusion. \square

Remarque 6.13. Dans le cas d'une décomposition à la Steinberg (non généralisée), la démonstration du sens réciproque se simplifie, car la démonstration de la proposition 4.15 est plus directe lorsque E est un foncteur élémentaire (de plus, pour X additif, on n'a plus besoin de considérer le terme constant, ni d'utiliser le lemme 6.8) : il est en effet immédiat que le dernier effet croisé non nul d'un foncteur élémentaire est somme directe de copies de $(V_1, \dots, V_d) \mapsto V_1 \otimes \dots \otimes V_d$.

Théorème 6.14 (Deuxième lemme de Schwartz généralisé). *Soient k un corps et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que tous les foncteurs additifs simples à valeurs de dimensions finies de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ appartiennent à $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k))$. Supposons également que k est de caractéristique nulle, ou bien que k est de caractéristique*

$p > 0$ et que \mathcal{A} possède la propriété $(T_{n,p})$ de la section 5. Alors tout foncteur polynomial fini et à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$.

Démonstration. Les hypothèses faites sur \mathcal{A} ainsi que le théorème 5.9 (ou la proposition 5.7 en caractéristique nulle) montrent que les foncteurs additifs absolument simples à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ sont dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$. Par la proposition 6.12, on en déduit que tout foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ possédant une décomposition à la Steinberg possède la propriété pf_n .

Si k est algébriquement clos, tout foncteur polynomial simple à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ possède une décomposition à la Steinberg [14, th. 5.5]. Comme $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$ est stable par extensions (proposition 1.4), tout foncteur polynomial fini et à valeurs de dimensions finies est dans $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$.

Le cas général se ramène au précédent en plongeant k dans une clôture algébrique, grâce aux propositions 4.7 et 4.4. \square

Remarque 6.15. Si $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ pour un anneau A , le théorème garantit que tout foncteur polynomial à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(A, k)$ vérifie la propriété pf_∞ , sous une hypothèse supplémentaire sur k et A . En effet, tout foncteur polynomial à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(A, k)$ est fini [14, lm. 11.10]. En revanche, en général, un foncteur polynomial à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(A, k)$ peut ne pas être de présentation finie, car un (k, A) -bimodule de dimension finie sur k n'est pas nécessairement de présentation finie — voir aussi le corollaire A.7 pour une approche directe.

Ainsi nos deux énoncés (théorèmes 3.4 et 6.14) donnant des propriétés de finitude homologique de foncteurs polynomiaux qui généralisent le lemme de Schwartz ne se recoupent qu'avec des catégories source et but bien particulières.

6.4 Quelques énoncés à valeurs entières

Dans toute cette section, l'anneau de base est $k = \mathbb{Z}$. On pourrait le remplacer sans peine par un autre anneau principal, mais nous nous focalisons sur les entiers, qui suffisent pour l'application principale que nous avons en vue, le corollaire 6.22 ci-après.

Lemme 6.16. *Si la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ est localement noethérienne, alors tout produit tensoriel de foncteurs additifs de type fini sur \mathcal{A} appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$.*

Démonstration. Un foncteur additif de type fini appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$ par le théorème 5.11. Le cas général s'en déduit grâce au corollaire 4.26. \square

Théorème 6.17 (Lemme de Schwartz à valeurs entières). *Soit $d \in \mathbb{N}$. Supposons que la catégorie $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ est localement noethérienne. Alors tout foncteur de type fini et polynomial de degré au plus d de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ possède la propriété pf_∞ .*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur d . La propriété est triviale pour $d = 0$.

On suppose donc $d > 0$, et que les foncteurs polynomiaux de type fini et de degré $< d$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ possèdent la propriété pf_∞ . Soit F un foncteur de type fini de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$. Alors le multifoncteur multiadditif $cr_d(F)$ est de type fini, ce qui implique que le foncteur $G := (\delta_d^* cr_d(F))_{\mathfrak{S}_d}$ de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$, où $\delta_d : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^d$ est

la diagonale itérée, est également de type fini, donc noethérien par hypothèse sur $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$. Le recollement usuel de catégories de foncteurs polynomiaux montre que la coïmité $G \rightarrow F$ a un noyau X et un conoyau Y de degré strictement inférieur à d . Les foncteurs X (qui est un sous-objet du foncteur noethérien G) et Y sont de type fini, l'hypothèse de récurrence montre donc qu'ils appartiennent à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$. Au vu de la proposition 1.4, il suffit de montrer que G est dans $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$ pour conclure à la même propriété pour F .

On vérifie d'abord que le foncteur $\delta_d^* cr_d(F)$ appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$. En effet, $cr_d(F)$ est de type fini dans la sous-catégorie pleine $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^d; \mathbb{Z})$ qui sont additifs par rapport à chaque variable. Cette catégorie est localement noethérienne, car la catégorie $\Sigma \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) \simeq \mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) / \mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ des multifoncteurs multiadditifs *symétriques* (cf. Pirashvili [32], et [14, § 2.6], dont on suit les notations) l'est, comme quotient de la catégorie localement noethérienne $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ par une sous-catégorie localisante (utiliser pour finir le foncteur d'oubli $\Sigma \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ et son adjoint, qui sont exacts et fidèles et préservent les objets de type fini). Comme la catégorie $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ est engendrée par les foncteurs $A_1 \boxtimes \cdots \boxtimes A_d$, où les A_i sont des foncteurs de type fini de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$, le lemme 6.16 montre que $\delta_d^* cr_d(F)$ appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$. Pour montrer que c'est aussi le cas de $G = (\delta_d^* cr_d(F))_{\mathfrak{S}_d}$, on considère le complexe barre pour le groupe \mathfrak{S}_d calculant $H_*(\mathfrak{S}_d; \delta_d^* cr_d(F))$: en chaque degré, c'est une somme directe d'un nombre fini de copies de $\delta_d^* cr_d(F)$, donc un foncteur de $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$, et $H_i(\mathfrak{S}_d; \delta_d^* cr_d(F))$ est, en chaque degré $i > 0$, polynomiale de degré *strictement* inférieur à d (grâce au recollement polynomial usuel). Les $H_i(\mathfrak{S}_d; \delta_d^* cr_d(F))$ sont également de type fini, car les termes du complexe sont noethériens (grâce à l'hypothèse sur $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$). Ainsi, l'hypothèse de récurrence entraîne que $H_i(\mathfrak{S}_d; \delta_d^* cr_d(F))$ appartient à $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$ pour $i > 0$. Le corollaire 1.5 permet de conclure que $G = H_0(\mathfrak{S}_d; \delta_d^* cr_d(F))$ est aussi dans $\mathbf{pf}_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$, d'où le théorème. \square

Corollaire 6.18. *Soit A un anneau dont le groupe additif est de type fini. Alors tout foncteur polynomial de type fini de $\mathcal{F}(A, \mathbb{Z})$ possède la propriété pf_∞ .*

Démonstration. L'hypothèse sur A entraîne que les catégories $\mathcal{P}ol_d(A, \mathbb{Z})$ sont localement noethériennes, grâce par exemple à [11, pr. 4.8]. La conclusion découle donc du théorème 6.17. \square

6.5 Application à des propriétés de finitude homologique

Proposition 6.19. *Soient A un anneau dont le groupe additif est de type fini et $B : \mathbf{P}(A)^{\text{op}} \times \mathbf{P}(A) \rightarrow \mathbf{Ab}$ un bifoncteur. On suppose que B est polynomial et à valeurs dans les groupes abéliens de type fini. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'homologie de Hochschild $HH_n(\mathbf{P}(A); B)$ est un groupe abélien de type fini.*

Démonstration. La catégorie des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A)^{\text{op}} \times \mathbf{P}(A); \mathbb{Z})$ est engendrée par les produits tensoriels extérieurs $F \boxtimes G$, où F (resp. G) est un foncteur polynomial de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A)^{\text{op}}; \mathbb{Z})$ (resp. $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); \mathbb{Z})$) à valeurs de type fini. Un tel produit tensoriel extérieur est noethérien par le lemme 6.20 ci-dessous. Il s'ensuit que B possède une résolution par un complexe de chaînes dont chaque terme est une somme directe finie de foncteurs de ce type, de sorte qu'il suffit de montrer que $HH_n(\mathbf{P}(A); F \boxtimes G)$ est un groupe abélien de type fini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous F, G comme précédemment. On note déjà que $\text{Tor}_n^{\mathbf{P}(A)}(F, G)$

est un groupe abélien de type fini, par le théorème 6.17 et la proposition 1.13. Comme $\mathrm{Tor}(F, G) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}} \circ (F, G)$ est également un foncteur polynomial à valeurs de type fini, on en déduit le résultat souhaité en raisonnant par récurrence sur le degré homologique et en utilisant le lien entre homologie de Hochschild et groupes de torsion [29, (C.10.1)] (qui se réduit ici à une suite exacte longue puisque l'anneau \mathbb{Z} est de dimension homologique 1). \square

Lemme 6.20. *Soit $F : \mathbf{P}(A) \rightarrow \mathcal{E}$ un foncteur polynomial dont les valeurs sont des objets noethériens de la catégorie \mathcal{E} . Alors F est un objet noethérien de la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$.*

Démonstration. Cela découle de ce que le foncteur d'évaluation

$$\mathrm{Pol}_d(\mathbf{P}(A), \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \quad F \mapsto F(A^d)$$

est exact et fidèle (cf. [14, démonstration du lemme 11.10]) pour tout $d \in \mathbb{N}$. \square

En guise d'application, considérons la propriété (HGLF) suivante pour un anneau A :

(HGLF) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe abélien $H_n(\mathrm{GL}(A); \mathbb{Z})$ est de type fini. (Ici, $\mathrm{GL}(A)$ désigne le groupe linéaire stable $\mathrm{colim}_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{GL}_i(A)$.)

Exemple 6.21. Quillen [36] a montré qu'un anneau d'entiers de corps de nombres vérifie la propriété (HGLF).

Corollaire 6.22. *Soient A un anneau dont le groupe additif est de type fini et I un idéal bilatère nilpotent de A . Si A/I vérifie la propriété (HGLF), alors il en est de même pour A .*

Démonstration. En raisonnant par récurrence sur l'indice de nilpotence de I , on voit qu'il suffit de traiter le cas où $I^2 = 0$. Le morphisme de groupes surjectif $\mathrm{GL}(A) \rightarrow \mathrm{GL}(A/I)$ a alors un noyau abélien qui s'identifie à $\mathfrak{gl}(I)$, le groupe additif stable $\mathrm{colim}_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{gl}_i(I)$ des matrices carrées à coefficients dans I . Grâce à la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_{r,s}^2 = H_r(\mathrm{GL}(A/I); H_s(\mathfrak{gl}(I); \mathbb{Z})) \Rightarrow H_{r+s}(\mathrm{GL}(A); \mathbb{Z}),$$

il suffit de démontrer que le groupe abélien $H_r(\mathrm{GL}(A/I); H_s(\mathfrak{gl}(I); \mathbb{Z}))$ est de type fini pour chaque $(r, s) \in \mathbb{N}^2$.

Le $\mathrm{GL}(A/I)$ -module gradué $H_*(\mathfrak{gl}(I); \mathbb{Z})$ s'identifie à $\mathrm{colim}_{i \in \mathbb{N}} H_*(B(A^i, A^i); \mathbb{Z})$, où $B : \mathbf{P}(A/I)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{P}(A/I) \rightarrow \mathbf{Ab}$ est le bifoncteur $(U, V) \mapsto \mathrm{Hom}_{A/I}(U, A) \otimes_{A/I} I \otimes_{A/I} V$ (I est un $(A/I, A/I)$ -bimodule car $I^2 = 0$). Comme B est polynomial (de degré au plus 2) et que l'homologie $H_d(-; \mathbb{Z})$ définit pour tout $d \in \mathbb{N}$ un endofoncteur polynomial (de degré d , par la formule de Künneth) des groupes abéliens, les $H_d(-; \mathbb{Z}) \circ B : \mathbf{P}(A/I)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{P}(A/I) \rightarrow \mathbf{Ab}$ sont des foncteurs polynomiaux (de degré au plus $2d$). Par conséquent, le théorème de Scorichenko [39] (voir [10, th. 5.6] pour une version publiée) fournit des isomorphismes naturels de groupes abéliens gradués

$$H_*(\mathrm{GL}(A/I); H_s(\mathfrak{gl}(I); \mathbb{Z})) \simeq HH_*(\mathrm{GL}(A/I) \times \mathbf{P}(A/I); H_s(-; \mathbb{Z}) \circ B)$$

où $\mathrm{GL}(A/I)$ opère *trivialement* sur le bimodule de coefficients. Ainsi, la formule de Künneth et l'hypothèse (HGLF) pour A/I montrent qu'il suffit de vérifier que les groupes abéliens $HH_n(\mathbf{P}(A/I); H_s(-; \mathbb{Z}) \circ B)$ sont de type fini. Or B , donc aussi les $H_s(-; \mathbb{Z}) \circ B$, sont à valeurs de type fini, puisque le groupe additif sous-jacent à I est de type fini. La proposition 6.19 donne donc la conclusion. \square

7 La propriété pf_n pour les foncteurs antipolynomiaux

Dans cette section nous étudions la propriété pf_n pour les foncteurs antipolynomiaux au sens de [14] (nous rappelons la définition ci-dessous). Les résultats découlent du transfert de la propriété pf_n par le foncteur de k -linéarisation $k[-]$ établie à la proposition 7.1.

Proposition 7.1. *Soient $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un foncteur additif et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si A appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab}))$, alors $k[A]$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$.*

Démonstration. La proposition 1.6 montre qu'il existe une résolution projective $P_\bullet \rightarrow A$ de A dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ telle que P_i est un foncteur représentable pour $i \leq n$. Par conséquent, il existe un objet simplicial R_\bullet dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ tel que R_i est également représentable pour $i \leq n$, et dont l'homotopie est concentrée en degré nul, où elle est isomorphe à A , grâce à la correspondance de Dold-Kan (voir par exemple [16, § 3]). En linéarisant, on obtient un objet simplicial $k[R_\bullet]$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$, dont l'homotopie est concentrée en degré nul, et isomorphe à $k[A]$. Cet objet simplicial est projectif de type fini dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ en chaque degré $\leq n$. Considérant le complexe de chaînes associé, et utilisant la proposition 1.6, on voit que $k[A]$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$. \square

Remarque 7.2. Pour $n \leq 1$, le résultat figure dans [14, lm. 13.10], qui établit également la réciproque (si l'anneau k est non nul⁴) : si $k[A]$ est de type fini, ou de présentation finie, dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$, alors A possède la même propriété dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$. Lorsque $k = \mathbb{Z}$, on dispose d'un isomorphisme naturel gradué $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})}^*(\mathbb{Z}[A], B) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})}^*(A, B)$ (qui se déduit du cas du degré nul, immédiat, par une utilisation de la correspondance de Dold-Kan identique à celle de la démonstration précédente) qui montre que, pour tout n , si $\mathbb{Z}[A]$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$, alors A appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}))$. Nous ignorons si cette réciproque persiste pour la propriété pf_n avec $n > 1$ lorsque k est un corps, par exemple.

Corollaire 7.3. *Soient \mathcal{B} une petite catégorie additive, $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur additif et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que, pour tout objet a de \mathcal{A} , le foncteur additif $\Phi^* \mathcal{A}(a, -)$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Add}(\mathcal{B}, \mathbf{Ab}))$. Alors le foncteur de précomposition $\Phi^* : \mathcal{F}(\mathcal{A}; k) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{B}; k)$ préserve la propriété pf_n .*

Démonstration. La proposition 7.1 montre que $\Phi^*(P_{\mathcal{A}}^t)$ appartient à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{B}; k))$ pour tout objet t de \mathcal{A} . La conclusion découle donc de la proposition 1.8. \square

Si k est un corps, on rappelle [14, § 4.1] que la catégorie additive \mathcal{A} est dite k -triviale si les groupes abéliens $\mathcal{A}(x, y)$ sont finis et d'ordre inversible dans k

⁴. [14] suppose que k est un corps, mais la démonstration s'applique sans changement à tout anneau non nul.

pour tous objets x et y de \mathcal{A} . Un idéal \mathcal{I} de \mathcal{A} (c'est-à-dire un sous-foncteur de $\text{Hom}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$) est dit k -cotrivial si la catégorie additive \mathcal{A}/\mathcal{I} est k -triviale, et un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ est dit *antipolynomial* s'il se factorise à travers la réduction modulo un idéal k -cotrivial de \mathcal{A} .

Corollaire 7.4. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que k est un corps, que, pour tout idéal k -cotrivial \mathcal{I} de \mathcal{A} , la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; k)$ est localement noethérienne et que pour tout objet a de \mathcal{A} , le foncteur $\mathcal{I}(a, -)$ appartient à $\mathbf{pf}_{n-1}(\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab}))$. Alors tout foncteur antipolynomial de type fini de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ est pf_n .*

Démonstration. Le foncteur $\mathcal{I}(a, -)$ est dans $\mathbf{pf}_{n-1}(\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab}))$ si et seulement si $(\mathcal{A}/\mathcal{I})(a, -)$ est dans $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab}))$, par la proposition 1.4 (et l'exemple 1.2(b)). Par conséquent, l'énoncé résulte du corollaire 7.3. \square

Remarque 7.5. Pour $n = 1$, la réciproque du corollaire 7.4 est vraie : si tout foncteur antipolynomial de type fini de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ est de présentation finie, alors le foncteur $\mathcal{I}(a, -)$ est de type fini dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ pour tout idéal k -cotrivial \mathcal{I} . Cela provient de la réciproque partielle de la proposition 7.1 mentionnée à la remarque 7.2, à appliquer aux foncteurs antipolynomiaux de type fini $k[(\mathcal{A}/\mathcal{I})(a, -)]$.

Rappelons [14, Ex. 4.4] qu'un idéal bilatère d'un anneau A est dit k -cotrivial si A/I est un anneau fini de cardinal inversible dans k . Les idéaux k -cotriviaux de A sont en bijection avec les idéaux k -cotriviaux de la catégorie $\mathbf{P}(A)$, cette bijection envoyant l'idéal I de A sur l'idéal $\mathcal{I} = I \cdot \text{Hom}_{\mathbf{P}(A)}$ de $\mathbf{P}(A)$. Ainsi $\mathbf{P}(A)/\mathcal{I} \simeq \mathbf{P}(A/I)$ de sorte que la propriété de noethérianité locale est vérifiée pour $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, par Putman-Sam-Snowden [35, 38]. L'hypothèse sur les foncteurs $\mathcal{I}(a, -)$ est quant à elle équivalente au caractère pf_{n-1} de I comme A -module à droite, d'après le théorème d'Eilenberg-Watts (cf. par exemple [14, Prop. 2.1]). On déduit donc du corollaire 7.4 le résultat suivant.

Corollaire 7.6. *Supposons que k est un corps. Soient A un anneau et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si tout idéal k -cotrivial de A est pf_{n-1} comme A -module à droite, alors tout foncteur antipolynomial de type fini de $\mathcal{F}(A, k)$ est pf_n .*

Exemple 7.7. Si A est noethérien à droite, l'exemple 1.2(c) et le corollaire 7.6 montrent que tout foncteur antipolynomial de type fini de $\mathcal{F}(A, k)$ est pf_{∞} .

Remarque 7.8. En revanche, si A possède un idéal k -cotrivial I qui n'est pas de type fini comme idéal à droite (par exemple, si A est un anneau de polynômes en une infinité d'indéterminées sur un corps fini de caractéristique différente de k , l'idéal d'augmentation I vérifie ces propriétés), alors il existe un foncteur antipolynomial *simple* (qui est automatiquement à valeurs de dimensions finies) de $\mathcal{F}(A, k)$ qui n'est pas de présentation finie. Cela provient de la stabilité par extensions des foncteurs de présentation finie (cf. proposition 1.4), de la remarque 7.5 et du fait que les foncteurs antipolynomiaux de type fini de $\mathcal{F}(A, k)$ sont finis [14, cor. 11.8].

8 La propriété pf_n pour les foncteurs finis à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$

On suppose dans toute cette section que k est un corps. Nous déduisons des sections précédentes et des résultats de [14, §4] le critère suivant pour qu'un

foncteur fini de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ vérifie la propriété pf_n .

Théorème 8.1. *Soit k un corps et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On fait les hypothèses suivantes :*

1. *pour tout idéal k -cotrivial $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$, la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; k)$ est localement finie, et pour tout objet a de \mathcal{A} , $\mathcal{I}(a, -)$ appartient à $\mathbf{pf}_{n-1}(\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab}))$;*
2. *tous les foncteurs additifs simples à valeurs de dimensions finies appartiennent à $\mathbf{pf}_n(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k))$;*
3. *k est de caractéristique nulle, ou bien de caractéristique $p > 0$ et tous les foncteurs ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ appartiennent à $\mathbf{pf}_{n-2}(\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p))$.*

Alors tout foncteur F fini et à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ possède la propriété pf_n .

Démonstration. D'après [14, th. 4.10], il existe un idéal k -cotrivial \mathcal{I} de \mathcal{A} et un foncteur B de $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; k)$, polynomial par rapport à la deuxième variable, tels que F soit isomorphe à la composée de B et du foncteur canonique $\psi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$. Via l'isomorphisme canonique $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; k) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{A}/\mathcal{I}, \mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$, B est à valeurs dans les foncteurs polynomiaux finis prenant des valeurs de dimensions finies. Ces derniers appartiennent à $\mathbf{pf}_n(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$ grâce au théorème 6.14. Le corollaire 4.11 permet d'en déduire que B possède également la propriété pf_n . Pour conclure, il suffit de noter que le foncteur de précomposition $\psi_{\mathcal{I}}^* : \mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; k) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ préserve la propriété pf_n , par le corollaire 7.3. \square

Si $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ pour un anneau A , on peut déduire des travaux de Putman-Sam-Snowden [35, 38] que la condition de finitude locale de la première assertion du théorème 8.1 est vérifiée [14, pr. 11.7]. Par conséquent :

Corollaire 8.2. *Soient k un corps, A un anneau et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que :*

1. *tout idéal k -cotrivial de A vérifie la propriété pf_{n-1} comme A -module à droite ;*
2. *tous les (k, A) -bimodules simples de dimension finie sur k vérifient la propriété pf_n (dans la catégorie des (k, A) -bimodules) ;*
3. *k est de caractéristique nulle, ou bien de caractéristique $p > 0$ et l'annulateur de p dans A est pf_{n-2} comme A/p -module à droite.*

Alors tout foncteur fini à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(A, k)$ possède la propriété pf_n .

Si l'anneau A est noethérien à droite, les première et troisième conditions du corollaire 8.2 sont vérifiées (avec $n = \infty$). Si $A \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est noethérien à droite, la deuxième condition est satisfaite. En particulier :

Corollaire 8.3. *Soit k un corps et A un anneau tels que A et $A \otimes_{\mathbb{Z}} k$ soient noethériens à droite. Alors tout foncteur fini à valeurs de dimensions finies de $\mathcal{F}(A, k)$ vérifie la propriété pf_{∞} .*

Exemple 8.4. Si A est un anneau commutatif de type fini, ou bien si A est un anneau noethérien à droite et que k est une extension de type fini de son sous-corps premier, les conditions du corollaire 8.3 sont satisfaites.

A La propriété pf_∞ dans $\mathcal{F}(k, k)$ pour un corps localement fini k

On suppose ici que k est un **corps localement fini**, de caractéristique p . La catégorie $\mathcal{F}(k, k)$ a été beaucoup étudiée lorsque k est fini (voir entre autres [21, 19, 27, 28]), mais presque pas sinon, à notre connaissance. Pourtant, le cas où k est la clôture algébrique de \mathbb{F}_p , par exemple, est extrêmement naturel.

On rappelle qu'une catégorie de Grothendieck est dite *cohérente* si elle est localement de présentation finie et que tout objet de présentation finie vérifie la propriété pf_∞ . On renvoie par exemple à [6, déf. 4.6 et th. 4.7] pour davantage de détails à ce sujet.

Si κ est un sous-corps de k , on note $\iota^\kappa : \mathbf{P}(\kappa) \rightarrow \mathbf{P}(k)$ le foncteur d'extension des scalaires.

Lemme A.1. *L'extension de Kan à gauche $\iota_1^\kappa : \mathcal{F}(\kappa, k) \rightarrow \mathcal{F}(k, k)$ le long de ι^κ est exacte.*

Démonstration. L'adjonction entre restriction des scalaires et induction associées à $\kappa \rightarrow k$ donne, par précomposition, un isomorphisme canonique $\iota_1^\kappa(T) \simeq \tilde{T} \circ \rho$, où $\rho : \mathbf{P}(k) \rightarrow \kappa\text{-Mod}$ est le foncteur de restriction des scalaires restreint à $\mathbf{P}(k)$ et \tilde{T} désigne, comme dans la section 6, l'extension de Kan à gauche de T le long de l'inclusion $\mathbf{P}(\kappa) \rightarrow \kappa\text{-Mod}$. Comme le foncteur $T \mapsto \tilde{T}$ est exact (puisque k est plat sur κ), cela donne la conclusion. \square

Lemme A.2. *Le foncteur $\iota_1^\kappa : \mathcal{F}(\kappa, k) \rightarrow \mathcal{F}(k, k)$ préserve la propriété pf_∞ .*

Démonstration. Le foncteur ι_1^κ envoie les générateurs projectifs de type fini $P_{\mathbf{P}(\kappa, k)}^{\kappa^n}$ (où n parcourt \mathbb{N}) de $\mathcal{F}(\kappa, k)$ sur les foncteurs projectifs de type fini $P_{\mathbf{P}(k, k)}^{\kappa^n}$ de $\mathcal{F}(k, k)$. La conclusion découle donc du lemme A.1 et de la proposition 1.8. \square

Lemme A.3. *Si F est un foncteur de présentation finie de $\mathcal{F}(k, k)$, il existe un sous-corps fini κ de k et un foncteur T de $\mathbf{pf}_1(\mathcal{F}(\kappa, k))$ tels que $F \simeq \iota_1^\kappa(T)$.*

Démonstration. Considérons une suite exacte

$$\bigoplus_{j=1}^m P_{\mathbf{P}(k)}^{k^{b_j}} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n P_{\mathbf{P}(k)}^{k^{a_i}} \rightarrow F \rightarrow 0.$$

Notons κ le sous-corps de k engendré par les coefficients des matrices de $\mathcal{M}_{b_j, a_i}(k)$ apparaissant dans la flèche de gauche de cette suite, via les isomorphismes canoniques $\mathcal{F}(k, k)(P_{\mathbf{P}(k)}^{k^{b_j}}, P_{\mathbf{P}(k)}^{k^{a_i}}) \simeq k[\mathcal{M}_{b_j, a_i}(k)]$. Comme k est localement fini, κ est fini. Alors le conoyau T du morphisme $\bigoplus_{j=1}^m P_{\mathbf{P}(\kappa)}^{\kappa^{b_j}} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n P_{\mathbf{P}(\kappa)}^{\kappa^{a_i}}$ donné par les mêmes éléments de $k[\mathcal{M}_{b_j, a_i}(\kappa)]$ convient. \square

Proposition A.4. *La catégorie $\mathcal{F}(k, k)$ est cohérente.*

Démonstration. Si κ est un corps fini, la catégorie $\mathcal{F}(\kappa, k)$ est localement noethérienne d'après les travaux de Putman-Sam-Snowden [35, 38]. En particulier, tout foncteur de présentation finie de cette catégorie vérifie pf_∞ . La conclusion découle donc des lemmes A.2 et A.3. \square

On note $I : \mathbf{P}(k) \rightarrow k\text{-Mod}$ le foncteur d'inclusion. Pour $r \in \mathbb{N}$, on désigne par $I^{(r)}$ la composée de I et du foncteur d'induction $k\text{-Mod} \rightarrow k\text{-Mod}$ le long du morphisme de Frobenius r -itéré $k \rightarrow k \quad \lambda \mapsto \lambda^{p^r}$. Comme k est parfait, c'est aussi la restriction le long de l'automorphisme de k inverse du précédent.

Lemme A.5. *Il existe dans $\mathcal{F}(k, k)$ une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{n \geq 1} I^{(n!)} \rightarrow \prod_{n \geq 1} I^{(n!)} \rightarrow I^{\oplus \mathbb{R}} \rightarrow 0$$

où ! désigne la factorielle.

Démonstration. Le foncteur $\prod_{n \geq 1} I^{(n!)} / \bigoplus_{n \geq 1} I^{(n!)}$ est additif; comme sa valeur sur k a la puissance du continu et que k est dénombrable, il suffit de montrer que l'action de chaque scalaire $\lambda \in k$ à la source correspond à la multiplication par λ au but. C'est évident pour $\lambda = 0$; sinon, λ est un élément d'ordre fini d , étranger à p , dans le groupe multiplicatif k^\times , car k est localement fini de caractéristique p . Par conséquent, si r est l'ordre de p dans $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$, pour $n \geq r$, λ opère par $\lambda^{p^{-n!}} = \lambda$ sur $I^{(n!)}$. Comme $\prod_{n \geq 1} I^{(n!)} / \bigoplus_{n \geq 1} I^{(n!)} = \prod_{n \geq r} I^{(n!)} / \bigoplus_{n \geq r} I^{(n!)}$, cela établit le lemme. \square

Proposition A.6. *Supposons que k est infini.*

1. Pour tout $n \geq 1$, $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^*(I, I^{(n!)}) = 0$.
2. Le k -espace vectoriel $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^1(I, \bigoplus_{n \geq 1} I^{(n!)})$ a une dimension au moins égale au continu.

Démonstration. Pour tout entier $r > 0$, il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $\lambda^{p^{-r}} \neq 1$, puisque k est infini. L'action centrale du scalaire λ à la source des foncteurs induit sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^*(I, I^{(r)})$ la multiplication par λ (action sur I) et la multiplication par $\lambda^{p^{-r}}$ (action sur $I^{(r)}$), donc $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^*(I, I^{(r)}) = 0$ pour $r > 0$.

Comme les produits sont exacts dans $\mathcal{F}(k, k)$, on en déduit

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^*\left(I, \prod_{n \geq 1} I^{(n!)}\right) \simeq \prod_{n \geq 1} \text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^*(I, I^{(n!)}) = 0.$$

Grâce au lemme A.5, cela fournit un isomorphisme $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^i(I, \bigoplus_{n \geq 1} I^{(n!)}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^{i-1}(I, I^{\oplus \mathbb{R}})$ pour $i \in \mathbb{N}^*$. Le monomorphisme canonique $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^*(I, I)^{\oplus \mathbb{R}} \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^*(I, I^{\oplus \mathbb{R}})$ permet de conclure. \square

Corollaire A.7. *Pour un corps infini et localement fini k , le foncteur I de $\mathcal{F}(k, k)$ est un foncteur simple, additif, à valeurs de dimensions finies, mais pas de présentation finie.*

Remarque A.8. 1. Le foncteur $I^{(d)}$ appartient à l'image de $\mathcal{P}_d(k)$ dans $\mathcal{F}(k, k)$.

Le phénomène qu'illustre la proposition A.6 explique ainsi pourquoi on se restreint dans [12] aux foncteurs polynomiaux stricts dont seul un nombre fini de composantes homogènes sont non nulles. On remarquera toutefois que, pour un corps k de caractéristique $p > 0$ qui n'est pas localement fini, ce phénomène ne se produit pas : considérer l'action d'une homothétie de rapport transcendant sur \mathbb{F}_p suffit alors à obtenir l'annulation de groupes d'extensions du type $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k, k)}^*(F, \bigoplus_{n \neq d} G_n)$ où F (resp. G_n) est un objet de $\mathcal{P}_d(k)$ (resp. $\mathcal{P}_n(k)$).

2. Les arguments utilisés dans cet appendice sont très analogues à des arguments classiques dans des catégories de (bi)modules. De façon plus générale, ils s’inscrivent dans l’étude cohomologique de *poids* dans des catégories abéliennes appropriées — voir [13] pour une exposition systématique appliquée aux catégories de foncteurs.

Références

- [1] Séminaire Henri Cartan : Algèbres d’Eilenberg-MacLane et homotopie. 7e année 1954/55. 2e éd., revue et corrigée. École Normale supérieure. Paris : Secrétariat mathématique (Hektograph.) (1956)., 1956.
- [2] Maurice Auslander. Coherent functors. In *Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965)*, pages 189–231. Springer, New York, 1966.
- [3] Maurice Auslander. A functorial approach to representation theory. In *Representations of algebras (Puebla, 1980)*, volume 944 of *Lecture Notes in Math.*, pages 105–179. Springer, Berlin-New York, 1982.
- [4] Stanisław Betley and Teimouraz Pirashvili. Twisted (co)homological stability for monoids of endomorphisms. *Math. Ann.*, 295(4) :709–720, 1993.
- [5] A. K. Bousfield and D. M. Kan. The core of a ring. *J. Pure Appl. Algebra*, 2 :73–81, 1972.
- [6] Daniel Bravo, James Gillespie, and Marco A. Pérez. Locally type fp_n and n -coherent categories. arXiv :1908.10987.
- [7] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [8] Thomas Church and Jordan S. Ellenberg. Homology of FI-modules. *Geom. Topol.*, 21(4) :2373–2418, 2017.
- [9] Marc Culler and Karen Vogtmann. Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.*, 84(1) :91–119, 1986.
- [10] Aurélien Djament. Sur l’homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.
- [11] Aurélien Djament. Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux. *Fund. Math.*, 233(3) :197–256, 2016.
- [12] Aurélien Djament and Antoine Touzé. Functor homology over an additive category. En préparation.
- [13] Aurélien Djament and Antoine Touzé. Poids dans les catégories de foncteurs et applications. En préparation.
- [14] Aurélien Djament, Antoine Touzé, and Christine Vespa. Décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive. Prépublication disponible sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02103934>, acceptée aux *Annales Scientifiques de l’ENS*.
- [15] Aurélien Djament and Christine Vespa. Foncteurs faiblement polynomiaux. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (2) :321–391, 2019.
- [16] Albrecht Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11 :201–312, 1961.

- [17] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.
- [18] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Homology theories for multiplicative systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 :294–330, 1951.
- [19] Vincent Franjou. Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques. *J. Algebra*, 179(2) :501–522, 1996.
- [20] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.
- [21] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.
- [22] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2) :209–270, 1997.
- [23] Mamuka Jibladze and Teimuraz Pirashvili. Cohomology of algebraic theories. *J. Algebra*, 137(2) :253–296, 1991.
- [24] B. Johnson and R. McCarthy. Deriving calculus with cotriples. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(2) :757–803, 2004.
- [25] Brenda Johnson and Randy McCarthy. Linearization, Dold-Puppe stabilization, and Mac Lane’s Q -construction. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(4) :1555–1593, 1998.
- [26] Henning Krause. Koszul, Ringel and Serre duality for strict polynomial functors. *Compos. Math.*, 149(6) :996–1018, 2013.
- [27] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II. *K-Theory*, 8(4) :395–428, 1994.
- [28] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III. *K-Theory*, 9(3) :273–303, 1995.
- [29] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998. Appendix E by Maria O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.
- [30] Wendy Lowen, Julia Ramos González, and Boris Shoikhet. On the tensor product of linear sites and Grothendieck categories. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (21) :6698–6736, 2018.
- [31] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [32] T. I. Pirashvili. Polynomial functors. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruz. SSR*, 91 :55–66, 1988.
- [33] N. Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules*. Academic Press, London-New York, 1973. London Mathematical Society Monographs, No. 3.
- [34] Geoffrey M. L. Powell. The structure of indecomposable injectives in generic representation theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(10) :4167–4193, 1998.
- [35] Andrew Putman and Steven V. Sam. Representation stability and finite linear groups. *Duke Math. J.*, 166(13) :2521–2598, 2017.

- [36] Daniel Quillen. Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers. In *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 179–198. Lecture Notes in Math., Vol. 341, 1973.
- [37] Oscar Randal-Williams and Nathalie Wahl. Homological stability for automorphism groups. *Adv. Math.*, 318 :534–626, 2017.
- [38] Steven V. Sam and Andrew Snowden. Gröbner methods for representations of combinatorial categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 30(1) :159–203, 2017.
- [39] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring*. PhD thesis, Evanston, 2000.
- [40] Antoine Touzé. Connectedness of cup products for polynomial representations of GL_n and applications. *Ann. K-Theory*, 3(2) :287–329, 2018.
- [41] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.