



HAL
open science

Systole et petites valeurs propres des surfaces hyperboliques

Pierre Jammes

► **To cite this version:**

| Pierre Jammes. Systole et petites valeurs propres des surfaces hyperboliques. 2021. hal-03431800

HAL Id: hal-03431800

<https://hal.science/hal-03431800>

Preprint submitted on 16 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

SYSTOLE ET PETITES VALEURS PROPRES DES SURFACES HYPERBOLIQUES

par

Pierre Jammes

Résumé. — Soit S une surface hyperbolique orientable compacte de caractéristique d'Euler χ , et $\lambda_k(S)$ la k -ième valeur propre non nulle du laplacien sur S . Selon un célèbre résultat d'Otal et Rosas, $\lambda_{-\chi} > \frac{1}{4}$. Dans cet article, nous montrons que si la systole de S est supérieure à 3,46, alors $\lambda_{-\chi-1} > \frac{1}{4}$. Cette inégalité est vraie aussi pour les surfaces hyperbolique géométriquement finies sans pointe avec la même hypothèse sur la systole.

Abstract. — Let S be a closed orientable hyperbolic surface with Euler characteristic χ , and let $\lambda_k(S)$ be the k -th positive eigenvalue for the Laplacian on S . According to famous result of Otal and Rosas, $\lambda_{-\chi} > \frac{1}{4}$. In this article, we prove that if the systole of S is greater than 3,46, then $\lambda_{-\chi-1} > \frac{1}{4}$. This inequality is also true for geometrically finite orientable hyperbolic surfaces without cusps with the same assumption on the systole.

1. Introduction

Un problème central de la géométrie spectrale des surfaces hyperboliques est l'étude des valeurs propres du laplacien contenues dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$. Un résultat crucial dans ce domaine, dû à J.-P. Otal et E. Rosas est que leur nombre est borné en fonction de la topologie de la surface et que sur une surface de caractéristique d'Euler χ , il y en a au plus $-\chi$ (rappelons que la caractéristique d'Euler d'une surface orientable de genre g est $\chi = 2 - 2g$). Si S est une surface compacte munie d'une métrique hyperbolique, notons $0 = \lambda_0(S) < \lambda_1(S) \leq \lambda_2(S) \leq \dots$ les valeurs propres du laplacien sur S :

Théorème 1.1 ([OR09]). — *Si S est une surface hyperbolique compacte de caractéristique d'Euler χ , alors $\lambda_{-\chi}(S) > \frac{1}{4}$.*

Classification mathématique par sujets (2000). — 58J50, 30F99, 51M10, 53C22.

Mots clefs. — surfaces hyperboliques, systole, petites valeurs propres.

Remarque 1.2. — Dans [OR09], ce théorème est démontré pour toute métrique analytique de courbure négative (la constante $\frac{1}{4}$ étant alors remplacée par le bas du spectre du revêtement universel de S). Il a été étendu à des métriques quelconques dans [BMM16] et à des surfaces non compactes dans [BMM17].

P. Buser avait donné dans [Bus77] des exemples montrant que sur toute surface compacte de caractéristique χ , il existe des métriques hyperboliques telles que $\lambda_{-\chi-1} \leq \frac{1}{4}$. Le but de cet article est de montrer que si on suppose que la systole de S est supérieure à une certaine constante explicite et *indépendante de la topologie*, alors de tels exemples ne peuvent pas exister. Ce résultat s'étend aussi aux surfaces hyperboliques non compactes ne possédant pas de pointes. Rappelons que la systole d'une surface hyperbolique compacte est la longueur minimale de ses géodésiques périodiques :

Théorème 1.3. — *Soit S une surface hyperbolique compacte (ou géométriquement finie sans pointe) orientable de caractéristique d'Euler χ . Si la systole de S est supérieure à 3,46, alors $\lambda_{-\chi-1}(S) > \frac{1}{4}$.*

Remarque 1.4. — On sait qu'il existe des surfaces hyperboliques compactes de systole supérieure à 3,46 entre autres pour les genres 3 à 25 (sauf 8, 12 et 24, pour lesquels la question reste ouverte) et tous les genres impairs (voir [AM16] et les références qui y sont données). On conjecture qu'il en existe en tout genre supérieur ou égal à 3.

Remarque 1.5. — En genre 2, la systole maximale parmi les métriques hyperboliques est $2\text{arcch}(1 + \sqrt{2}) \simeq 3,06 < 3,46$, ce maximum étant atteint par la surface de Bolza. L'hypothèse du théorème 1.3 n'est donc jamais vérifiée en genre 2, mais on sait que pour la surface de Bolza on a $\lambda_1 \simeq 3,84 > \frac{1}{4}$ (voir par exemple [SU13]).

Remarque 1.6. — Le fait que la constante du théorème 1.3 soit indépendante de la topologie est assez remarquable et contraste avec d'autres problèmes similaires. Par exemple, on n'a pas d'énoncé similaire pour $\lambda_1(S)$: une suite de revêtements cycliques d'une surface donnée donne des exemples de surfaces dont le genre tend vers l'infini, la systole est uniformément minorée et $\lambda_1 \rightarrow 0$.

La démonstration du théorème 1.1 repose sur un fait déjà remarqué par J.-P. Otal dans [Ota08] : sur une surface hyperbolique, un domaine nodal d'une fonction propre de valeur propre $\leq \frac{1}{4}$ ne peut pas être de caractéristique d'Euler 1 ou 0. Pour obtenir le théorème 1.3, nous allons montrer que sous son hypothèse de minoration de la systole, un tel domaine ne peut pas non plus être de caractéristique -1. Dans le cas non compact, un argument crucial s'effondre dans le cas où la surface comprend une pointe (voir la remarque 3.2 de la section 3).

L'étude de la géométrie des surfaces hyperboliques menée pour démontrer le théorème 1.3 conduit à un autre résultat qui mérite d'être souligné ici. H. Parlier a montré que pour une métrique hyperbolique de systole maximale sur une surface de genre fixée, une géodésique réalisant la systole ne peut pas être séparante ([Par12]). Nous allons montrer une version de ce résultat en genres 2 et 3 qui

est quantitative en deux sens : d'une part, l'hypothèse n'est pas que la systole est maximale mais qu'elle dépasse une constante explicite, et d'autre part la conclusion est que la longueur d'une géodésique simple séparante est au moins le double de la systole.

Théorème 1.7. — *Soit S une surface hyperbolique compacte orientable de genre 2 ou 3 et γ une géodésique simple séparante de S . Si la systole s de S est supérieure à 2,696, alors la longueur de γ est supérieure à $2s$.*

La section 2 sera consacré à quelques préliminaires de géométrie hyperbolique. En corollaire, nous y démontrerons aussi le théorème 1.7. Dans la section 3, nous donnerons des estimés d'exposants critiques pour les surfaces orientables non compactes de genre 1. Enfin, après avoir rappelé les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.1, nous démontrerons le théorème 1.3 dans la section 4.

2. Quelques lemmes de géométrie hyperbolique

2.1. Deux lemmes de trigonométrie hyperbolique. — On considère un hexagone convexe rectangle du plan hyperbolique dont les cotés consécutifs sont notés a, γ, b, α, c et β (on utilisera abusivement la même notation pour un coté et sa longueur).

Le premier lemme permet d'affirmer que si a, b et c sont grands, a étant le plus grand des trois, alors β et γ sont petits. Avec ces hypothèses, α n'est pas forcément petit. On pourra alors déduire du second lemme que si α est suffisamment grand, alors $a \geq b + c$.

Lemme 2.1. — *Si $a \geq b$ et $a \geq c$, alors*

$$(2.1) \quad \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{b}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

De plus, on a égalité si et seulement si $a = b = c$.

Démonstration. — On part de la relation trigonométrique classique ([Bus92], th. 2.4.1)

$$(2.2) \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b$$

qui donne :

$$\operatorname{ch} \gamma = \frac{\operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b} + \operatorname{coth} a \cdot \operatorname{coth} b.$$

Si $b \geq c$, on a la majoration

$$(2.3) \quad \frac{\operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b} \leq \frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{sh} b^2}$$

et si $c \geq b$, on obtient la même inégalité en écrivant

$$(2.4) \quad \frac{\operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b} \leq \frac{\operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} c \cdot \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{coth} c}{\operatorname{sh} b} \leq \frac{\operatorname{coth} b}{\operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{sh} b^2}.$$

On en déduit

$$(2.5) \quad \operatorname{ch} \gamma \leq \frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{sh} b^2} + \operatorname{coth} a \cdot \operatorname{coth} b \leq \frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{sh} b^2} + \operatorname{coth} b^2 = \frac{\operatorname{ch} b + \operatorname{ch} b^2}{\operatorname{sh} b^2}.$$

En utilisant les identités entre fonctions hyperboliques, on obtient ensuite

$$(2.6) \quad 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ch} \gamma - 1 \leq \frac{\operatorname{ch} b + \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{sh}^2 b}{\operatorname{sh}^2 b} = \frac{\operatorname{ch} b + 1}{\operatorname{sh}^2 b} = \frac{2 \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2}}{4 \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2}},$$

ce qui se simplifie en $\operatorname{sh}^2 \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}}$, soit $\operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{b}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Pour établir l'inégalité (2.3) on a utilisé le fait que $a \geq b$ et $a \geq c$, et en (2.4) le fait que $a \geq b$ et $c \geq b$. L'égalité dans (2.1) va impliquer l'égalité dans (2.3) ou dans (2.4) et dans les deux cas on aura l'égalité $a = b = c$. Réciproquement, on vérifie facilement que si $a = b = c$ on a bien $\operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{b}{2} = \frac{1}{2}$. \square

Lemme 2.2. — *On a l'inégalité $a \geq b + c$ si et seulement si $\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{th} b \cdot \operatorname{th} c \geq 1$.*

Démonstration. — Comme le cosinus hyperbolique est une fonction croissante, il suffit de montrer que $\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{th} b \cdot \operatorname{th} c - 1$ et $\operatorname{ch} a - \operatorname{ch}(b + c)$ sont de même signe. On part à nouveau de la relation (2.2) pour écrire :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a - \operatorname{ch}(b + c) &= \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c \\ &\quad - (\operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c) \\ &= \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c (\operatorname{ch} \alpha - 1) - 2 \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c \\ &= 2 \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c \\ &= \frac{2}{\operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c} (\operatorname{th} b \cdot \operatorname{th} c \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} - 1). \end{aligned}$$

L'inégalité $\operatorname{ch} a \geq \operatorname{ch}(b + c)$ est donc bien équivalente à $\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{th} b \cdot \operatorname{th} c - 1 \geq 0$. \square

2.2. Surface de genre (1,1) de grande systole. — Le dernier lemme de cette section établit que si une surface hyperbolique de genre (1,1) à bord géodésique a une systole suffisamment grande, alors la longueur du bord est au moins égale au double de la systole. Ce résultat permet d'affiner les estimées d'exposant critique de la section suivante. Le théorème 1.7 en est aussi une conséquence directe.

Lemme 2.3. — *Soit S une surface hyperbolique de genre (1,1) à bord géodésique. Si la systole s de S vérifie $s \geq 2,696$, alors la longueur du bord est supérieure à $2s$.*

Démonstration. — On note γ_0 la géodésique qui borde la surface S et γ_1 la plus courte géodésique simple qui découpe S en un pantalon. On découpe ce pantalon en deux hexagones rectangles isométriques en notant γ_2 , γ_3 et γ_3' les arcs qui les bordent, comme sur la figure 1.

On veut appliquer le lemme 2.2 en prenant pour a la moitié de la géodésique γ_0 . Les cotés b et c sont alors deux copies d'un moitié de γ_1 , et α est la géodésique γ_2 . La longueur de γ_1 , qu'on notera l , est minorée par s . Par conséquent $a, b \geq l/2 \geq s/2$.

Il reste à minorer α , c'est-à-dire la longueur de la géodésique γ_2 . Notons x et y les extrémités de γ_2 , et x' le point situé sur la même copie de γ_1 que y et qui

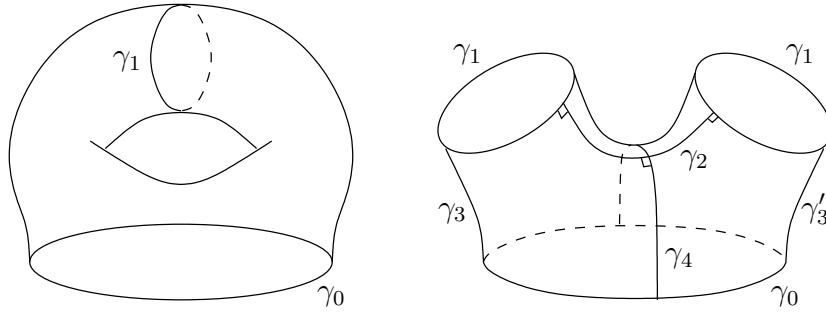
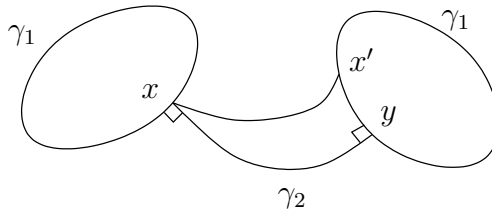


FIGURE 1. Découpage de la surface


 FIGURE 2. Minoration de la longueur de γ_2

s'identifie à x dans S (rappelons que dans S , l'arc γ_2 n'est pas nécessairement une courbe fermée).

Le triangle $xx'y$ est rectangle en y , ce qui permet d'estimer la longueur de γ_2 à l'aide du théorème de Pythagore :

$$(2.7) \quad \cosh(xx') = \cosh(xy) \cdot \cosh(yx').$$

Comme $xx' \geq l$ et $yx' \leq l/2$ on en déduit :

$$(2.8) \quad \cosh \alpha = \cosh(xy) \geq \frac{\cosh l}{\cosh \frac{l}{2}}.$$

Rappelons que b et c sont minorés par $s/2$. De plus, $\sinh^2 \frac{\alpha}{2} = (\cosh \alpha - 1)/2$ est minoré grâce à l'inégalité (2.8). On a donc

$$(2.9) \quad \sinh^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{th} b \cdot \operatorname{th} c \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\cosh s}{\cosh \frac{s}{2}} - 1 \right) \cdot \operatorname{th} \frac{s}{2}.$$

On peut vérifier que le membre de droite est bien minoré par 1 sous l'hypothèse $s > 2,696$. On peut alors appliquer le lemme 2.2 et conclure que la longueur de γ_0 est bien minorée par $2s$.

□

Remarque 2.4. — Dans la figure 2, on peut minorer xy à l'aide de l'inégalité triangulaire : $xy \geq xx' - x'y \geq l - l/2 = l/2$. Cette inégalité, moins précise mais plus pratique que (2.8), nous sera utile dans la section suivante.

Démonstration du théorème 1.7. — Soit S une surface hyperbolique orientable de genre 2 ou 3 et γ une géodésique simple séparante de S . La géodésique γ sépare S en deux surfaces orientables ayant une seule composante de bord, dont au moins une est de genre 1. Le lemme 2.3 appliqué à cette surface de genre 1 assure alors que la longueur de la géodésique γ est au moins égale au double de la systole si $s \geq 2,696$. \square

3. Exposants critiques

Nous allons démontrer dans cette section des majorations d'exposants critiques pour les groupes fuchsien convexes cocompacts dont le quotient est orientable et de caractéristique -1. En particulier, on cherche une condition sur la systole pour que l'exposant critique soit strictement inférieur à $\frac{1}{2}$. On obtient aussi au passage une majoration de la série de Poincaré du groupe fuchsien. Rappelons que si x est un point du plan hyperbolique, la série de Poincaré du groupe Γ est définie par

$$(3.1) \quad P_{\Gamma}(x, s) = \sum_{g \in \Gamma} e^{-sd(x, g \cdot x)}$$

et que son abscisse de convergence ne dépend pas du choix de x .

Théorème 3.1. — Soit $l > 0$ et Γ un sous-groupe convexe cocompact de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ tel que la systole de $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ soit supérieure ou égale à l .

1. Si S est de genre $(0, 3)$, alors $\delta_{\Gamma} \leq \frac{2 \ln 2}{l}$ et pour tout point x du cœur convexe, on a

$$P_{\Gamma}(x, s) \leq \frac{4e^{-s \frac{l}{2}} + 8e^{-sl}}{1 - e^{-s \frac{l}{2}} - 2e^{-sl}}$$

pour $s > \frac{2 \ln 2}{l}$. En particulier, si $l > 4 \ln 2$, alors $\delta_{\Gamma} < \frac{1}{2}$.

2. Si S est de genre $(1, 1)$ et que $l > 2,696$, alors $\delta_{\Gamma} \leq \frac{1,73}{l}$ et il existe un point x du cœur convexe tel que

$$P_{\Gamma}(x, s) \leq \frac{1 + 3e^{-sl}}{1 - 2e^{-sl/2} - e^{-sl} + 2e^{-3sl/2} - 4e^{-2sl}}$$

pour $s > \frac{1,73}{l}$. En particulier, si $l > 3,46$ alors $\delta_{\Gamma} < \frac{1}{2}$.

Remarque 3.2. — Dans le cas où le groupe Γ n'est pas convexe cocompact (c'est-à-dire qu'il contient des éléments paraboliques, et donc que la surface quotient comprend au moins une pointe) un résultat de Beardon assure que son exposant critique est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

Démonstration. — Pour majorer cette série et son abscisse de convergence, on va chercher une minoration de la distance $d(x, g \cdot x)$. On fixe un point x dans le (revêtement du) cœur convexe. Le point de départ de la démonstration est de remarquer qu'un segment géodésique joignant deux points du cœur convexe de S est entièrement contenu dans ce cœur. En effet, une géodésique qui en sort n'y revient jamais. On va donc estimer la distance $d(x, g \cdot x)$ en se restreignant au revêtement universel du cœur convexe.

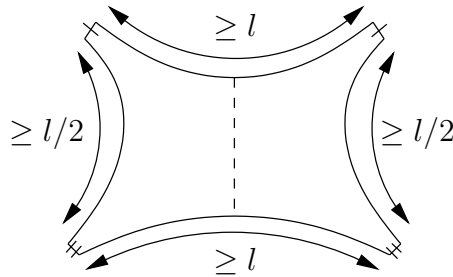


FIGURE 3. Domaine fondamental du cœur convexe

On peut choisir comme domaine fondamental un octogone rectangle formé de deux hexagones, comme sur la figure 3.

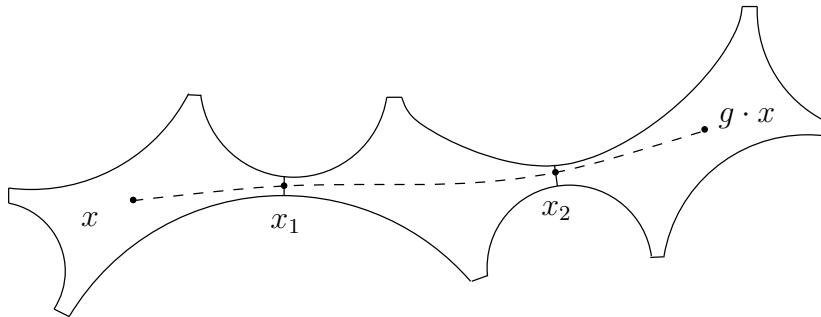


FIGURE 4. géodésique dans le revêtement du cœur convexe

La géodésique de x à $g \cdot x$ traverse plusieurs domaines fondamentaux. On note x_1, \dots, x_n les points d'intersections successifs de cette géodésique avec les frontières des domaines, comme sur la figure 4. On est alors ramené à minorer les distances $d(x_i, x_{i+1})$. Trois configurations sont possibles, illustrées par la figure 5 :

1. Le segment géodésique $[x_i, x_{i+1}]$ longe un bord du domaine sans traverser la frontière entre les deux hexagones (ligne pointillée sur la figure 5). On minore sa longueur par une constante l_1 qui sera précisée plus loin.
2. Le segment traverse le domaine en diagonale. On minore sa longueur par l_2 .
3. Le segment longe un bord du domaine en changeant d'hexagone et on minore la longueur par l_3 .

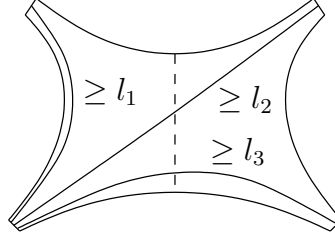


FIGURE 5. Segments de géodésique traversant un domaine fondamental

On peut alors écrire la majoration :

$$(3.2) \quad d(x, g \cdot x) = d(x, x_1) + \sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i) + d(x_n, g \cdot x) \geq \sum_{i=1}^n l_{\alpha_i},$$

avec $\alpha_i \in \{1, 2, 3\}$.

Il est crucial de noter que le domaine fondamental où est situé $g \cdot x$ est entièrement déterminé par la position de x_1 et par le mot $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$. L'élément $g \in \Gamma$ lui-même est donc déterminé par α et la direction (parmi quatre possibles) du segment $[x, x_1]$. On peut donc majorer la série de Poincaré $P_\Gamma(s)$ de la manière suivante :

$$(3.3) \quad P_\Gamma(s) \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} e^{-s \sum_{i=1}^n l_{\alpha_i}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-sl_1} + e^{-sl_2} + e^{-sl_3} \right)^n.$$

Cette dernière série converge si $e^{-sl_1} + e^{-sl_2} + e^{-sl_3} < 1$. Compte tenu de la géométrie du domaine fondamental (cf. Figure 3), on peut minorer l_1 par $l/2$, l_2 et l_3 par l . Il suffit donc que $2e^{-sl} + e^{-s \frac{l}{2}} < 1$ pour que la série converge. En posant $x = e^{-s \frac{l}{2}}$, cette équation devient $2x^2 + x - 1 < 0$, ce qui permet de voir que la condition $e^{-s \frac{l}{2}} < \frac{1}{2}$ est suffisante. La série de Poincaré converge donc pour tout $s > \frac{2 \ln 2}{l}$ ce qui implique que $\delta \leq \frac{2 \ln 2}{l}$.

Pour $s > \frac{2 \ln 2}{l}$, la majoration (3.3) donne

$$(3.4) \quad P_\Gamma(s) \leq \frac{4e^{-s \frac{l}{2}} + 8e^{-sl}}{1 - e^{-s \frac{l}{2}} - 2e^{-sl}}.$$

Dans le cas d'une surface de genre (1,1), on note γ_0 la géodésique qui borde le cœur convexe et on considère le découpage en deux hexagones rectangles définis par $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_4$ et γ_3 et γ_3' (cf. figure 6).

À la différence du cas précédent, on ne va pas découper le revêtement universel du cœur convexe en domaines fondamentaux mais en domaines qui sont des domaines fondamentaux d'un revêtement cyclique (non compact) du cœur de la surface. Un modèle de ces domaines est représenté sur la figure 7 : il est obtenu en découpant le cœur le long de γ_4 et en « déroulant » la surface le long de γ_1 . Les arcs géodésiques $\tilde{\gamma}_i$ sont des relevés des arcs γ_i .

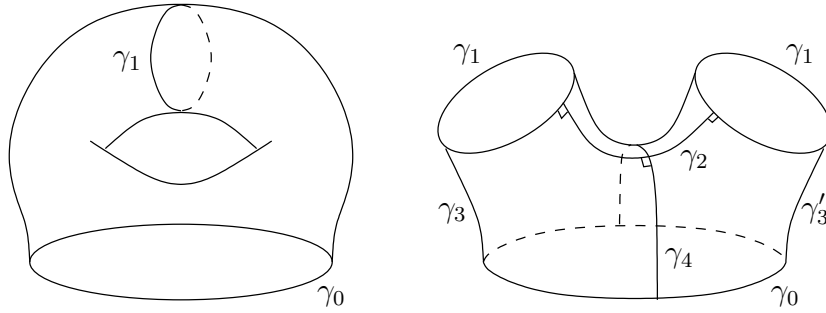


FIGURE 6. Découpage de la surface

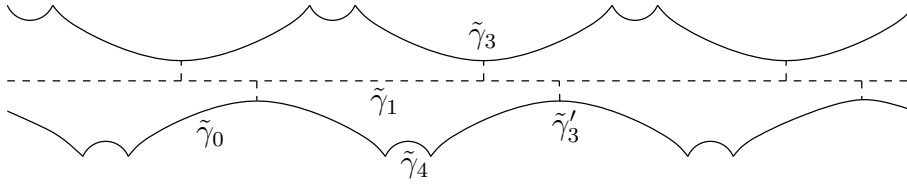


FIGURE 7. Revêtement cyclique du domaine fondamental

On peut reprendre les majorations (3.2) et (3.3) mais avec deux différences. D'une part, les l_i prennent une infinité de valeurs. D'autre part, le segment $[x, x_1]$ peut prendre une infinité de directions. Au lieu de (3.2), on va donc écrire

$$(3.5) \quad d(x, g \cdot x) \geq d(x, x_1) + \sum_{i=1}^n l_{\alpha_i},$$

et remplacer le facteur 4 de l'inégalité (3.3) par la somme d'une série portant sur les distances $d(x, x_1)$.

Pour majorer cette somme $\sum e^{-sd(x, x_1)}$, on s'appuie sur la figure 8. On choisit comme origine x l'extrémité de $\tilde{\gamma}_3$ située sur $\tilde{\gamma}_1$. On a noté x'_i différentes positions possibles de x_1 en fonction du bord par lequel la géodésique sort du domaine. Pour chaque x'_i , on découpe le segment $[x, x'_i]$ en sous-segments délimités par les sous-domaines hexagonaux et on minore la longueur de chaque sous-segment par sa projection orthogonale sur les géodésiques $\tilde{\gamma}_0$ ou $\tilde{\gamma}_1$.

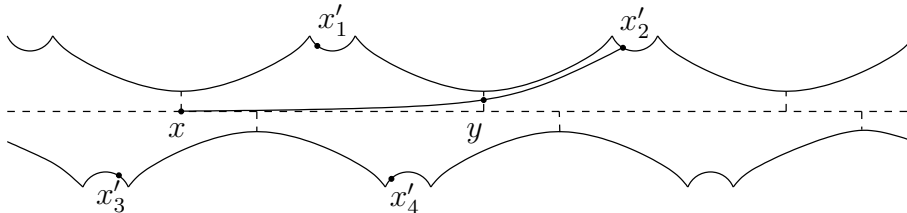


FIGURE 8. Longueur de l'arc géodésique initial

En projetant $[x, x'_1]$ sur $\tilde{\gamma}_0$, on obtient que $d(x, x'_1) \geq l$.

Pour minorer la longueur du segment $[x, x'_2]$, on le découpe en deux segments $[x, y]$ et $[y, x'_2]$. En projetant le premier sur $\tilde{\gamma}_1$ et le second sur $\tilde{\gamma}_0$, on obtient que $d(x, x'_2) \geq 2l$.

En procédant ainsi de suite pour tous les x'_i situés en haut de la figure 8, on obtient une majoration de la somme partielle $\sum e^{-sd(x, x'_i)}$ par $2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-skl}$.

On procède de manière similaire pour les points x'_i du bas de la figure : $d(x, x'_3)$ est minoré par 1, $d(x, x'_4)$ est minoré par l , etc. On obtient une majoration de la somme partielle $\sum e^{-sd(x, x'_i)}$ par $1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-skl}$.

Globalement, la somme $\sum e^{-sd(x, x_1)}$ est donc majorée par

$$(3.6) \quad \sum e^{-sd(x, x_1)} \leq 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-skl} = \frac{1 + 3e^{-sl}}{1 - e^{-sl}}.$$

On peut donc majorer la série de Poincaré par

$$(3.7) \quad \begin{aligned} P_{\Gamma}(s) &\leq \frac{1 + 3e^{-sl}}{1 - e^{-sl}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} e^{-s \sum_{i=1}^n l_{\alpha_i}} \\ &\leq \frac{1 + 3e^{-sl}}{1 - e^{-sl}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_i e^{-sl_{\alpha_i}} \right)^n \end{aligned}$$

pour les valeurs de s où les séries convergent.

Il reste à majorer la somme de la série $\sum_i e^{-sl_{\alpha_i}}$. On doit pour cela minorer la longueur des arcs géodésiques qui traversent le domaine. On va distinguer les géodésiques qui ne coupent pas la géodésique $\tilde{\gamma}_1$ (figure 9) et celles qui la coupent (figure 10). Comme dans le calcul précédent, on découpe l'arc géodé-

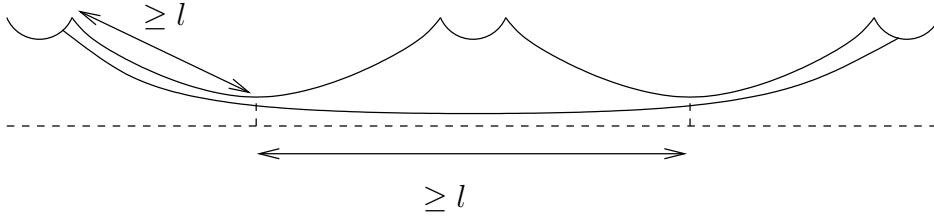


FIGURE 9. Longueur d'un arc géodésique (premier cas)

sique en segments traversant un hexagone et on minore la longueur par celle du bord correspondant de l'hexagone ($\tilde{\gamma}_1$ ou la moitié de $\tilde{\gamma}_0$, cf. figure 9). La somme partielle de $\sum_i e^{-sl_{\alpha_i}}$ correspondant à ces arcs est majorée par

$$(3.8) \quad 2(e^{-2sl} + e^{-3sl} + \dots) = 2 \frac{e^{-2sl}}{1 - e^{-sl}}.$$

Traitons maintenant le 2^e cas. Deux géodésiques, a et a' sur la figure 10, ne passent que par deux hexagones, un de chaque côté de $\tilde{\gamma}_1$. Comme la distance

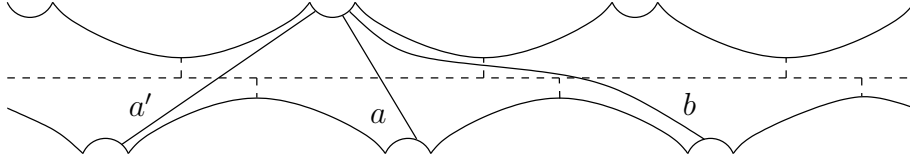


FIGURE 10. Longueur d'un arc géodésique (second cas)

entre γ_4 et γ_1 est minorée par $l/4$ (cf. remarque 2.4), on peut minorer les longueurs de a et a' par $l/2$. Les autres géodésiques (comme b sur la figure 10) se traitent comme dans le premier cas.

La somme $\sum_i e^{-sl\alpha_i}$ est finalement majorée par

$$(3.9) \quad 2e^{-sl/2} + 4 \frac{e^{-2sl}}{1 - e^{-sl}}$$

et la série converge si cette expression est majorée par 1. En posant $x = e^{-sl/2}$, cette condition s'écrit $4x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 < 0$ avec $x > 0$). On peut vérifier numériquement que ce polynôme n'a qu'une racine positive $x \sim 0,4224$. En particulier, si $sl > 1,73$ la série de Poincaré converge, on a donc $\delta_\Gamma < \frac{1,73}{l}$.

On obtient une majoration de la série de Poincaré en combinant l'inégalité (3.7) et la somme de la série géométrique de raison (3.9). On obtient

$$(3.10) \quad \begin{aligned} P_\Gamma(s) &\leq \frac{1 + 3e^{-sl}}{1 - e^{-sl}} \cdot \frac{1}{1 - 2e^{-sl/2} - 4 \frac{e^{-2sl}}{1 - e^{-sl}}} \\ &\leq \frac{1 + 3e^{-sl}}{1 - 2e^{-sl/2} - e^{-sl} + 2e^{-3sl/2} - 4e^{-2sl}}. \end{aligned}$$

□

4. Démonstration du théorème dans le cas des surfaces compactes

La démonstration du théorème 1.3 suit celle du théorème 1.1 et repose sur le lemme de topologie algébrique (dit « de type Borsuk-Ulam ») suivant :

Lemme 4.1 ([Sév02],[OR09]). — Soient k et n deux entiers strictement positifs. Si la sphère \mathbb{S}^n admet une partition en k ensembles \mathbb{S}_i (non nécessairement connexes) tels que :

- pour tout i , \mathbb{S}_i est invariant par l'involution antipodale τ ;
- le revêtement $\mathbb{S}_i \rightarrow \mathbb{S}_i/\tau$ est trivial ;

alors $n \leq k - 1$.

Ce lemme découle d'un résultat plus général de B. Sévenec ([Sév02], lemme 8). Il est appliqué dans [OR09] à la sphère unité de l'espace engendré par les fonctions propres associées aux petites valeurs propres de la surface S . Nous allons rappeler les grandes lignes de la démonstration de [OR09] pour ensuite indiquer comment l'hypothèse de systole minorée permet d'améliorer le résultat (lemme 4.4).

Notons \mathcal{E} l'espace engendré par les fonctions propres associées aux valeurs propres $\leq \frac{1}{4}$ (y compris les fonctions constantes). Soit $f \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$. Son ensemble nodal $\gamma(f) = f^{-1}(0)$ est un graphe localement fini ([OR09], proposition 5), et donc fini puisqu'on suppose que la surface est compacte. Il n'est pas nécessairement connexe et peut contenir des sommets isolés. Sur chaque composante connexe de $S \setminus \gamma(f)$, le signe de f est bien défini.

On note $G(f)$ le graphe obtenu en retirant de l'ensemble nodal les composantes contenues dans des disques. Comme chaque composante de $S \setminus G(f)$ est la réunion d'une composante de $S \setminus \gamma(f)$ et de disques disjoints, on peut leur associer un signe, à savoir celui de f sur la composante de $S \setminus \gamma(f)$.

On note $S^+(f)$ (resp. $S^-(f)$) la réunion des composantes positives (resp. négatives) de $S \setminus G(f)$ qui ne sont pas des disques ou des anneaux. Les ensembles $S^+(f)$ et $S^-(f)$ ne sont pas nécessairement connexes, peuvent être vides, mais sont incompressibles, c'est-à-dire que leur groupe fondamental s'injecte dans celui de S .

En notant $\chi^+(f)$ (resp. $\chi^-(f)$) la caractéristique d'Euler de $S^+(f)$ (resp. $S^-(f)$), on a d'une part $\chi^\pm(f) \leq 0$ par construction (avec égalité si et seulement si S^\pm est vide), et d'autre part $\chi^+(f) + \chi^-(f) \geq \chi(S)$ du fait de l'incompressibilité.

La démonstration de [OR09] se conclut par deux lemmes. Le premier exploite le fait que \mathcal{E} est engendré par les fonctions propres dont les valeurs propres sont petites :

Lemme 4.2 ([OR09], affirmation 6). — *Pour toute fonction non nulle $f \in \mathcal{E}$, on a $\chi^+(f) + \chi^-(f) < 0$.*

L'idée de la démonstration est qu'il existe au moins une composante de $S \setminus \gamma(f)$ sur laquelle le quotient de Rayleigh de f est inférieur à $\frac{1}{4}$. Cette composante a nécessairement une caractéristique d'Euler strictement négative : si elle était égale à 1 ou 0, on pourrait relever cette composante soit au plan hyperbolique, soit à un cylindre hyperbolique. C'est impossible car le relevé de f restreinte à la composante aurait le même quotient de Rayleigh. Or le plan et le cylindre hyperbolique ont un spectre égal à $[\frac{1}{4}, +\infty[$ (le cas où le quotient de Rayleigh est exactement $\frac{1}{4}$ est exclu car le relevé de f serait alors une fonction propre, ce qui est impossible puisqu'il est nul en dehors d'un compact).

Pour appliquer le lemme 4.1, on partitionne la sphère unité $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ en définissant les ensembles \mathbb{S}_i , $\chi(S) \leq i \leq -1$ par

$$(4.1) \quad \mathbb{S}_i = \{f \in \mathcal{E} \setminus \{0\}, \chi^+(f) + \chi^-(f) = i\}.$$

Les ensembles \mathbb{S}_i sont clairement invariants par l'involution antipodale τ puisque $\chi^\pm(-f) = \chi^\mp(f)$. Le second lemme assure que la dernière hypothèse du lemme 4.1 est vérifiée :

Lemme 4.3 ([OR09], lemme 7). — *Pour tout entier $\chi(S) \leq i \leq -1$, le revêtement $\mathbb{S}_i \rightarrow \mathbb{S}_i/\tau$ est trivial.*

Comme les \mathbb{S}_i sont au nombre de $-\chi(S)$, le lemme 4.1 permet alors d'affirmer que $\dim \mathcal{E} \leq -\chi(S)$.

On obtient le théorème 1.3 en montrant que sous l'hypothèse de systole mino-
rée, les parties \mathbb{S}_i ne sont qu'au nombre de $-\chi(S) - 1$:

Lemme 4.4. — *Si la systole de S est supérieure à 3,46, alors \mathbb{S}_{-1} est vide.*

Démonstration. — La démonstration reprend celle du lemme 4.2. Si $f \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ a un quotient de Rayleigh inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$, il existe une composante C de $S \setminus \gamma(f)$ sur laquelle le quotient de Rayleigh de $f|_C$ est aussi $\leq \frac{1}{4}$. D'après l'argument de [OR09], cette composante C ne peut pas se relever au plan ou à un cylindre hyperbolique et sa caractéristique d'Euler ne peut pas être 1 ou 0.

Si la caractéristique de C est -1, alors cette composante se relève à une surface hyperbolique complète S' de caractéristique -1, qui est le quotient du plan hyperbolique par le groupe fondamental de C (qu'on peut voir comme un sous-groupe du groupe fondamental de S du fait de l'incompressibilité). La surface S' est alors un revêtement riemannien de S et sa systole est au moins égale à celle de S .

Si la systole de S (et donc de S') est supérieure à 3,46, un tel relevé ne peut pas exister : en effet, le bas du spectre de S' serait alors $\leq \frac{1}{4}$. Elle serait donc le quotient de \mathbb{H}^2 par un groupe fuchsien d'exposant critique $\leq \frac{1}{2}$, d'après la théorie de Patterson-Sullivan (voir par exemple [Bor07], théorème 14.1). Or, on a vu dans la section précédente (théorème 3.1) que c'est impossible avec une systole plus grande que 3,46.

Par conséquent, la caractéristique d'Euler de C est strictement inférieure à -1, et on a nécessairement $\chi^+(f) + \chi^-(f) < -1$. La fonction f n'appartient donc pas à \mathbb{S}_{-1} . \square

Le théorème 1.3 en découle immédiatement : les ensembles \mathbb{S}_i qui partitionnent la sphère $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ sont seulement au nombre de $-\chi(S) - 1$, donc $\dim \mathcal{E} \leq -\chi(S) - 1$.

5. Le cas des surfaces non compactes

La principale difficulté qui apparaît dans le cas non compact est que le graphe nodal d'une combinaison linéaire de fonctions propres n'est pas forcément fini. Comme on est dans un contexte de courbure -1, on peut se dispenser des techniques d'ensemble nodal approché utilisées dans [BMM16] et [BMM17], ce qui permet une démonstration plus directe que dans [BMM17]. L'idée est de se ramener au cas compact au moyen d'une fonction de coupure : on construit un domaine relativement compact D de S difféomorphe à S et un espace de fonctions \mathcal{E}' sur D ayant les mêmes propriétés que les fonctions de \mathcal{E} . La démonstration du cas compact peut alors s'appliquer à \mathcal{E}' .

Lemme 5.1. — *Soit (S, g) une surface hyperbolique convexe cocompacte et k le nombre de valeurs propres du laplacien sur S contenues dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$. Il existe un domaine relativement compact D de S difféomorphe à S et un espace \mathcal{E}' de fonctions sur D de dimension k tel que*

1. *il existe une constante $\lambda \in [0, \frac{1}{4}[$ telle que le quotient de Rayleigh de toute fonction de \mathcal{E}' soit inférieur à λ ;*

2. chaque fonction de \mathcal{E}' vérifie la condition de Dirichlet et ses lignes nodales sur \bar{D} sont localement celles d'une fonction analytique.

Rappelons que la surface est la réunion d'un cœur convexe (qui est une surface hyperbolique compacte à bord géodésique) et de vasques recollées sur les bords du cœur convexe (voir par exemple [Bor07], ch. 2). En vertu d'un théorème de P. Lax et R. S. Phillips [LP82], sur une surface hyperbolique d'aire infinie, $\frac{1}{4}$ ne peut pas être valeur propre (cf. [Bor07], ch. 7). On se contentera donc d'étudier les valeurs propres dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$.

Démonstration. — Dans chaque vasque de S , on écrit la métrique dans les coordonnées de Fermi

$$(5.1) \quad g = dr^2 + \cosh^2 r dt^2,$$

où la courbe $r = 0$ est la géodésique bordant la vasque.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit une fonction de coupure η_ε par

$$(5.2) \quad \begin{cases} \eta_\varepsilon = 1 & \text{si } r \leq \frac{1}{\varepsilon} \\ \eta_\varepsilon = 2 - \varepsilon r & \text{si } \frac{1}{\varepsilon} < r < \frac{2}{\varepsilon} \\ \eta_\varepsilon = 0 & \text{si } r \geq \frac{2}{\varepsilon} \end{cases}$$

et on prolonge η_ε par 1 en dehors des vasques. Son gradient est nul partout sauf pour $r \in]\frac{1}{\varepsilon}, \frac{2}{\varepsilon}[$ où $|d\eta_\varepsilon| = \varepsilon$, et pour $r = \frac{1}{\varepsilon}, \frac{2}{\varepsilon}$ où il n'est pas défini.

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on définit le domaine D_ε de S comme la réunion du cœur convexe et des domaines définis par $r < \frac{2}{\varepsilon}$ dans chaque vasque. On veut montrer qu'il existe un ε tel que la conclusion du lemme soit vérifiée pour le domaine D_ε .

Soit λ_S la plus grande des valeurs propres du laplacien sur S contenue dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$.

Pour tout $f \in \mathbb{S}$, l'intégrale $\int_{r > \frac{1}{\varepsilon}} f^2$ tend vers 0 en décroissant quand $\varepsilon \rightarrow 0$, de même que $\int_{r > \frac{1}{\varepsilon}} |df|^2$. D'après le théorème de Dini, la famille d'applications $T_\varepsilon : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_\varepsilon(f) = \int_{r > \frac{1}{\varepsilon}} f^2 + \int_{r > \frac{1}{\varepsilon}} |df|^2$ converge donc uniformément vers la fonction nulle quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour tout $f \in \mathbb{S}$, on pose $f_\varepsilon = \eta_\varepsilon f$. Comme $\|f - f_\varepsilon\|^2 \leq T_\varepsilon(f)$, $\|f_\varepsilon\|$ converge uniformément vers 1 sur \mathbb{S} , quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

De plus, comme $df_\varepsilon = f d\eta_\varepsilon + \eta_\varepsilon df$, on a,

$$\begin{aligned} \|df_\varepsilon - df\| &\leq \|f d\eta_\varepsilon\| + \|(1 - \eta_\varepsilon)df\| \\ &\leq \varepsilon + \sqrt{T_\varepsilon(f)}. \end{aligned}$$

Donc $\|df_\varepsilon\|$ converge uniformément sur \mathbb{S} vers $\|df\|$. On en déduit que le quotient de Rayleigh $R(f_\varepsilon)$ de f_ε converge uniformément vers celui de f quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme le quotient de Rayleigh sur \mathbb{S} est majoré par $\lambda_S < \frac{1}{4}$, on peut trouver ε suffisamment petit et $\lambda \in]\lambda_S, \frac{1}{4}[$ tels que $R(f_\varepsilon) < \lambda$ pour tout f .

Un tel ε étant fixé, on définit $D = D_\varepsilon \mathcal{E}' = \{(\eta_\varepsilon f)|_D, f \in \mathcal{E}\}$. Par construction, le quotient de Rayleigh est majoré par λ sur \mathcal{E}' . Comme les fonctions $f \in \mathcal{E}$ et r sont analytiques, les lignes nodales de f_ε sont bien localement celles d'une fonction analytique : celles de f à l'intérieur de D et celles de $\eta_\varepsilon f$ au voisinage du bord de D . \square

Références

- [AM16] H. AKROUT & B. MUETZEL – « Construction of hyperbolic Riemann surfaces with large systoles », *J. Geom.* **107** (2016), p. 187–205.
- [BMM16] W. BALLMANN, H. MATTHIESEN & S. MONDAL – « Small eigenvalues of closed surfaces », *J. Differential Geom.* **103** (2016), no. 1, p. 1–13.
- [BMM17] ———, « Small eigenvalues of surfaces of finite type », *Compos. Math.* **153** (2017), no. 8, p. 1747–1768.
- [Bor07] D. BORTHWICK – *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*, Progress in Mathematics, vol. 256, Birkhäuser, 2007.
- [Bus77] P. BUSER – « Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in $(0, 1/4)$ », *Comment. Math. Helv.* **52** (1977), no. 1, p. 25–34.
- [Bus92] ———, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progress in Mathematics, vol. 106, Birkhäuser, 1992.
- [LP82] P. LAX & R. PHILLIPS – « The asymptotic distribution of lattice points in euclidean and non-euclidean spaces », *J. Functional Analysis* **46** (1982), no. 3, p. 280–350.
- [OR09] J.-P. OTAL & E. ROSAS – « Pour toute surface hyperbolique de genre g , $\lambda_{2g-2} > 1/4$ », *Duke Math. J.* **150** (2009), no. 1, p. 101–115.
- [Ota08] J.-P. OTAL – « Three topological properties of small eigenfunctions on hyperbolic surfaces », in *Geometry and dynamics of groups and spaces.*, Progress in Math., vol. 265, 2008, p. 685–695.
- [Par12] H. PARLIER – « The homology systole of hyperbolic riemann surfaces », *Geom. Dedicata* **157** (2012), no. 1, p. 331–338.
- [Sév02] B. SÉVENNEC – « Multiplicity of the second Schrödinger eigenvalue on closed surfaces », *Math. Ann.* **324** (2002), no. 1, p. 195–211.
- [SU13] A. STROHMAIER & V. USKI – « An algorithm for the computation of eigenvalues, spectral zeta functions and zeta-determinants on hyperbolic surfaces », *Comm. Math. Phys.* **317** (2013), no. 3, p. 827–869.