

# Homogénéisation en viscoélasticité non linéaire : estimations basées sur les premiers et seconds moments des champs

M. El Bachir SECK\*, Mihail GARAJEU\*, Renaud MASSON\*\*

\*Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Aix Marseille Université, Centre National de Recherche Scientifique, France

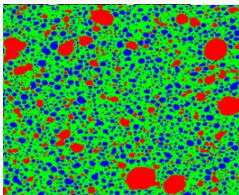
\*\*CEA, DEN, Département d'études des combustibles, France

Congrès Français de Mécanique, Lille, 28 Août - 01 Septembre, 2017



- 1 Introduction
- 2 Formulation du problème
- 3 Construction de différentes méthodes d'estimation
- 4 Comparaison des différentes approches
- 5 Conclusion et perspectives

- **Prédiction du comportement effectif d'un composite biphasé à partir des propriétés de ses constituants**
  - application à la simulation du comportement du combustible Mox utilisé dans les réacteurs nucléaires français



Microstructure du combustible MOX obtenu par segmentation (thèse Oudinet 2003)

- microstructure : matrice - inclusions
- comportement des phases : viscoélastique non linéaire
- effet d'un gonflement différentiel (dilatations thermiques) sur l'évolution des contraintes internes

- **Résultats obtenus (Homogénéisation)**

- élastique linéaire : (Eshelby, 1957 ; Mori-Tanaka, 1973)
- viscoélastique linéaire : principe de correspondance de Mandel (Christensen, 1968 ; Wang et Weng, 1992)
- viscoélastique linéaire vieillissante
  - approche cohérente avec le principe de correspondance de Mandel (Ricaud et Masson, 2009)
  - approche variationnelle (Lahellec et Suquet, 2007)
  - approche s'appuyant sur des calculs en champs complets (NTFA)

- **Question ouverte : cas non linéaire**

- extension du modèle Ricaud et Masson au cas où le comportement des phases est non linéaire

- **Problème à résoudre à l'échelle microscopique**

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \dot{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3\kappa_e} \dot{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) + \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}(t) \quad , \quad r = 1, 2 \\ \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{e}}_v(\mathbf{x}, t) \end{array} \right.$$

- vitesse de déformation  $\dot{\mathbf{e}}_v$  dérive d'un potentiel non linéaire

$$\dot{\mathbf{e}}_v(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \frac{\partial U_v^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{où} \quad U_v^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_0^{(r)} \dot{\varepsilon}_0^{(r)}}{n^{(r)} + 1} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{n^{(r)} + 1}$$

- **Conditions de chargements du matériau**

- bord extérieur du domaine  $\Omega$  soumis à une contrainte homogène :  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  sur  $\partial\Omega$   
 $\Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \rangle$
- déformation libre sphérique

- **Définition d'un Milieu Linéaire de Comparaison :**

- linéarisation de la vitesse de déformation visqueuse :

$$\dot{\mathbf{e}}_v(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}_v^{(r)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{e}}_0^{(r)} \quad \text{dans la phase } (r)$$

- la souplesse  $\mathbf{M}_v^{(r)}$  et la déformation libre  $\mathbf{e}_0^{(r)}$  sont des quantités homogènes par phase
- construction de la loi de comportement viscoélastique linéarisée

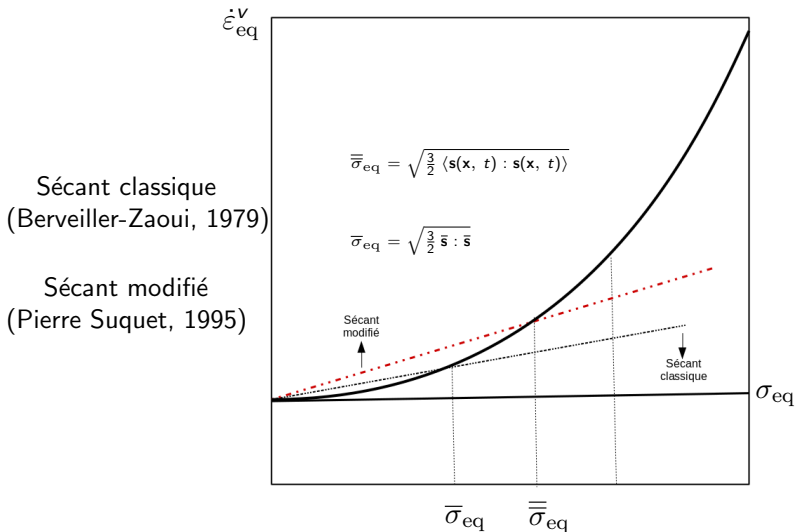
$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(r)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{e}}_0^{(r)} \quad \text{dans } (r)$$

- Résolution du problème : principe de correspondance associé à un schéma d'homogénéisation (Mori-Tanaka)
  - moyennes par phase
  - comportement macroscopique : formulation à variables internes (résultats exacts disponibles dans ce cas particulier)

# Construction de différentes méthodes d'estimation

- **Schémas considérés**

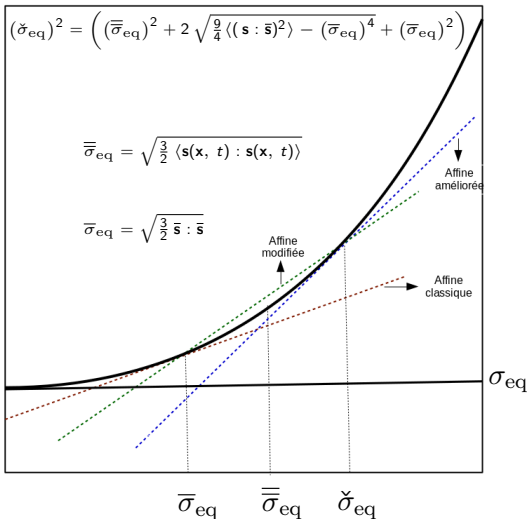
- approches sécantes :  $\dot{\epsilon}_0^{(r)} = 0$



# Construction de différentes méthodes d'estimation

- **Schémas considérés**

- approches affines :  $\dot{\epsilon}_0^{(r)} \neq 0$

 $\dot{\epsilon}_{eq}^v$ 



- **Cas des approches sécantes**

- comportement macroscopique : inversion exacte de la transformée de Laplace-Carson
- expressions analytiques des moyennes par phase :

$$\bar{s}^{(2)}(t) = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(2)}(\bar{\sigma}_{eq}^{(2)})} - \frac{1}{\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}^{(1)})} \right)^{-1} \left[ \ddot{\mathbf{e}}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}^{(1)})} \right) \right]$$

- second moment dans la matrice (Badulescu et al, 2015)
  - hypothèses : champs de contrainte dans l'inclusion ainsi que la contrainte hydrostatique dans la matrice supposés homogènes
  - évolution temporelle du second moment

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(S_1)} S_1(t) = M(t)$$

- second membre dépend des moyennes par phase et des grandeurs macroscopiques

- **Modèle Affine amélioré**

- anisotropie de la souplesse  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  ne permet plus :
  - d'obtenir des expressions analytiques du comportement effectif
  - d'inverser exactement la transformée de Laplace-Carson (approximations obtenues par collocation)
- expressions analytiques des moyennes par phase

$$\bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(2)}(\bar{\sigma}_{eq}^{(2)})} - \frac{n^{(1)}}{\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}^{(1)})} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - c^{(1)} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_0^{(1)}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{n^{(1)} \bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}^{(1)})} \right) \right]$$

- évolution du second moment dans la matrice

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}^{(1)})} S_1(t) + \frac{3(n^{(1)} - 1)}{4\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}^{(1)})} \frac{\langle (\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)}}{(\bar{\sigma}_{eq}^{(1)})^2} + \dot{\bar{\mathbf{e}}}_0^{(1)} : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = M(t)$$

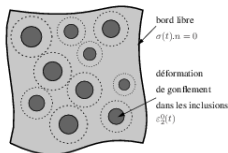
- approximation : proportionnalité entre le déviateur des contraintes en chaque point de la matrice et sa moyenne

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)} &\leq (\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t)) (\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)}) = \left( \frac{2}{3} \bar{\sigma}_{eq}^{(1)}(t) \right)^2 \left( \bar{\sigma}_{eq}^{(1)} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}^{(1)})} S_1(t) &= M(t) \end{aligned}$$

# Comparaison des différentes approches

- **Chargement de type gonflements différentiels** (représentatif du combustible MOX)

- bord extérieur du domaine  $\Omega$  est libre de contrainte :  $\bar{\sigma}(t) = 0$
- déformation libre dans l'inclusion :  $\varepsilon_0^{(2)}(t) = \varepsilon_{0m}^{(2)}(t) \delta$
- déformation libre dans la matrice :  $\varepsilon_0^{(1)}(t) = 0$
- **conséquences** :  $\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} = 0$  ,  $\dot{\varepsilon}_0^{(1)} = 0$  ,  $\dot{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$



- **Déclinaisons des approches proposées**

- modèle Sécant classique  $\sim$  modèle Affine classique

$$\mathbf{M}_v^{(1)} = 0 \Rightarrow \text{réponse purement élastique}$$

- modèle Sécant modifié  $\sim$  modèle Affine modifié

$$\mathbf{M}_v^{(1)} = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{K}$$

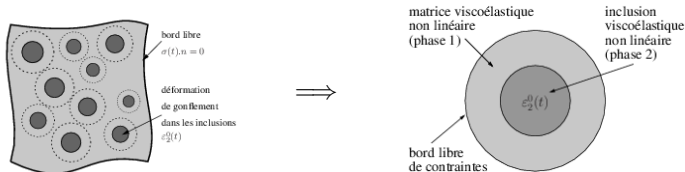
- temps de relaxation  $\tau_\gamma$  défini par :  $\tau_\gamma = \left( \frac{4}{3\nu_e} + \frac{1}{\mu_e} \right) \mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})$
- Cas de l'approche Affine amélioré

$$\mathbf{M}_v^{(1)} = \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{K}$$

- temps de relaxation  $\tilde{\tau}_\gamma$  défini par :  $\tilde{\tau}_\gamma = \frac{\tau_\gamma}{n^{(1)}}$

- **Solution de référence (modèle de la sphère composite)**

- microstructure modélisée en utilisant le modèle de la sphère composite (faibles fractions volumiques) : Seck et al 2016



- symétrie du problème :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(r, t)$  (champ radial)

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$$

- solution obtenue (distribution de la contrainte équivalente)

$$\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t) = \left[ \frac{3\mu_e \varepsilon_0^{(1)} (n^{(1)} - 1)}{(\sigma_0^{(1)})^{n^{(1)}} \left(1 + \frac{4\mu_e}{3\kappa_e}\right)} t + \left( \frac{6\mu_e \varepsilon_{0m}^{(2)} a^3}{\left(1 + \frac{4\mu_e}{3\kappa_e}\right) r^3} \right)^{1-n^{(1)}} \right]^{\frac{1}{1-n^{(1)}}} .$$

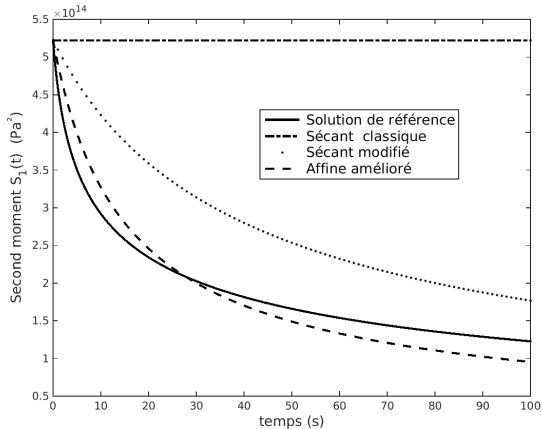
- moyenne hydrostatique dans l'inclusion

$$\bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \int_a^b \frac{1}{r} \sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t) dr$$

## • Résultats

- évolution temporelle du second moment dans la matrice pour les différentes approches

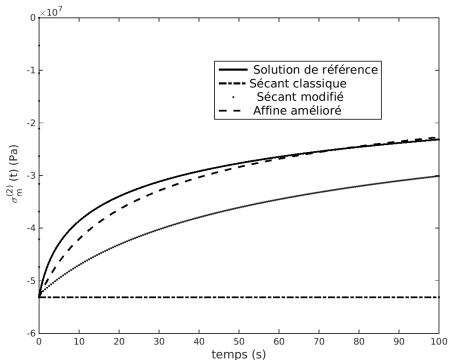
$$(c^{(2)} = 10^{-1}, \mu_e = 70\text{GPa}, \kappa_e = 161\text{GPa}, \sigma_0 = 1\text{GPa}, \varepsilon_{0m}^{(2)} = 333.10^{-6}, n^{(1)} = 3.67)$$



## ● Résultats

- évolution temporelle de la contrainte moyenne hydrostatique dans l'inclusion pour les différents approches

$$(c^{(2)} = 10^{-1}, \mu_e = 70\text{GPa}, \kappa_e = 161\text{GPa}, \sigma_0 = 1\text{GPa}, \varepsilon_{0m}^{(2)} = 333.10^{-6}, n^{(1)} = 3.67)$$



## ● commentaires

- approches Sécante ou Affine classique  $\Rightarrow$  réponses élastiques
- approches Sécante ou Affine modifiée  $\Rightarrow$  bon accord mais pas satisfaisant (cinétique de relaxation insuffisante)
- approche Affine améliorée  $\Rightarrow$  bon accord quantitatif

- **conclusions**

- modélisation de milieux hétérogènes viscoélastiques non linéaires par une approche micro-mécanique
- estimations des propriétés effectives par différentes méthodes de linéarisation
- estimations obtenues avec le modèle **Affine améliorée** sont en bon accord avec la solution de référence (résultats de la sphère composite)

- **perspectives**

- extension du modèle par une nouvelle approche de linéarisation proposée récemment (Ponte Castenada, 2016)
- comparaison des résultats par rapport à la solution de référence (résultats de la sphère composite)
- élargissement du modèle retenu à d'autres cas de chargement et validation par des calculs en champs complets (calculs FFT)

**Merci de votre attention**



- **Schémas considérés**

- **Linéarisation Sécante classique (Berveiller-Zaoui, 1979) :**

- loi de comportement linéarisée dans la matrice :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(r)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$$

- expression de la souplesse  $\mathbf{M}_v^{(r)}$  (module sécant) :

$$\mathbf{M}_v^{(r)} = \frac{1}{2\mu_v^{(r)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)})} \mathbf{K} \quad , \quad \check{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} = \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\mathbf{s}}^{(r)} : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}}$$

- module de cisaillement infini pour le cas de chargement représentatif du matériau d'étude (combustible MOX)

- **Linéarisation Sécante modifié (Suquet et Castañeda) :**

- choix d'une linéarisation Sécante classique dans l'inclusion
    - amélioration des estimations dans la matrice
    - expression de la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans la matrice

$$\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \bar{\bar{\sigma}}_{\text{eq}}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)}}$$

- **Schémas considérés**

- **Linéarisation Affine classique (Masson-Zaoui, 1999) :**

- loi de comportement linéarisée dans la matrice :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(1)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \chi^{(1)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}$$

- vitesse de déformation libre dans la matrice  $\dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}$  :

$$\dot{\mathbf{e}}_0^{(1)} = \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \mathbf{s}}(\bar{\mathbf{s}}^{(1)}) - \mathbf{M}_v^{(1)} : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}$$

- souplesse  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  dans la phase matricielle définie par :

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{E}^{(1)}$$

- projecteurs déviatoriques  $\mathbf{E}^{(1)}$  et  $\mathbf{F}^{(1)}$  définis par :

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\mathbf{s}}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \otimes \frac{\bar{\mathbf{s}}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \quad , \quad \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{K} - \mathbf{E}^{(1)}$$

- expression de la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans la matrice :

$$\left(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 = \left( \left(\frac{\bar{\mathbf{s}}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}}\right)^2 \pm 2 \sqrt{\frac{9}{4} \langle (\mathbf{s} : \bar{\mathbf{s}}^{(1)})^2 \rangle^{(1)} - \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^4} + \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 \right)$$

- **Schémas considérés**

- **Méthode du second ordre (Castañeda, 2002) :**

- loi de comportement linéarisée dans la matrice :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(1)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \chi^{(1)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}$$

- souplesse  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  dans la phase matricielle définie par :

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{1}{2\lambda_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{E}^{(1)}$$

- modules de cisaillement visqueux déterminés en utilisant des conditions de stationnarités sur le potentiel effectif visqueux :

$$\begin{cases} \frac{1}{3\mu_v^{(1)}} = \frac{1}{\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}^{(1)}}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) \\ \frac{1}{3\lambda_v^{(1)}} (\check{\sigma}_{\parallel}^{(1)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{\check{\sigma}_{\parallel}^{(1)}}{\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}^{(1)}}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) - \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}^{(1)}}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) \end{cases}$$

- expression de la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans la matrice :

$$\left(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 = \left( \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 \pm 2 \sqrt{\frac{9}{4} \langle (\mathbf{s} : \bar{\mathbf{s}}^{(1)})^2 \rangle^{(1)} - \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^4 + \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2} \right)$$

- **Schémas considérés**

- **Méthode du second ordre (Castañeda, 2002) :**

- composante de la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  suivant le projecteur  $\mathbf{E}^{(1)}$  donnée par :

$$\check{\sigma}_{\parallel}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \check{\sigma}^{(1)} : \mathbf{E}^{(1)} : \check{\sigma}^{(1)}}$$

- **Linéarisation Affine améliorée (nouvelle approche) :**

- loi de comportement linéarisée dans la matrice :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(1)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \chi^{(1)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}$$

- approche basée sur une linéarisation tangente de la loi de comportement non linéaire à l'instar de Masson-Zaoui

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{E}^{(1)}$$

- contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans la matrice définie par Ponte Castañeda 2002 :

$$\left(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 = \left( \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 \pm 2 \sqrt{\frac{9}{4} \langle (\mathbf{s} : \bar{\mathbf{s}}^{(1)})^2 \rangle^{(1)} - \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^4} + \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 \right)$$