HAL
open science

Quel rendement attendre de l'épargne retraite pour pallier la baisse projetée des taux de remplacement en répartition ?

Stéphane Hamayon,, Florence Legros, Yannick Pradat

To cite this version:

Stéphane Hamayon,, Florence Legros, Yannick Pradat. Quel rendement attendre de l'épargne retraite pour pallier la baisse projetée des taux de remplacement en répartition ?. 2021. hal-03429170v2

HAL Id: hal-03429170

https://hal.science/hal-03429170v2

Preprint submitted on 17 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Cahier de recherche[1]

Quel rendement attendre de l'épargne retraite pour pallier la baisse projetée des taux de remplacement en répartition ?

Stéphane Hamayon, Harvest, Cerefige
Pr. Florence Legros, ICN Business School, Cerefige
Yannick Pradat, Harvest
Septembre 2021

[1] Ce cahier de recherche a servi de support à la rédaction du Document N°8 du Conseil d'Orientation des Retraites présenté lors du Groupe de travail du 10 mars 2021 consacré à l'épargne retraite et à la loi « Pacte ». Les auteurs remercient chaleureusement Madame la Professeure Anne Lavigne pour son implication et la remarquable qualité de son résumé. https://www.cor-retraites.fr/sites/default/files/2021-03/Doc%208_Synth%C3%A8se_HLP.pdf

Sommaire

1. Le modèle démoéconomique 5
   1.1. L'introduction du risque de marché dans un modèle démo-économique à deux classes d'agents 6
      1.1.1. Une dynamique stylisée du cours des actifs risqués 7
      1.1.2. Capital retraite du bouclage démoéconomique et capital du plan d'épargne 9
   1.2. L'estimation de la demi-vie 10
2. Une application au cadre démo-économique français 11
   2.1. Une simulation de référence 14
   2.2. L'introduction d'un dispositif d'épargne pour compenser la baisse des pensions 15
      2.2.1. Caractéristiques du plan d'épargne retraite fictif 16
3. Synthèse des simulations : l'hypothèse d'un effort d'épargne de 5 % 21
   3.1. Le cas d'un Profil 99% 21
      3.1.1. Rentes et taux de remplacement 22
      3.1.2. Un bilan du « bien-être » des agents 24
   3.2. Le cas d'un Profil 95% 25
      3.2.1. Rentes et taux de remplacement 26
      3.2.2. Un bilan du « bien-être » des agents 27
   3.3. Le cas d'un Profil 90% 27
      3.3.1. Rentes et taux de remplacement 28
4. Synthèse des simulations : l'hypothèse d'un effort d'épargne de 3 % 31
   4.1. Le cas d'un Profil 99% 31
      4.1.1. Rentes et taux de remplacement 31
   4.2. Le cas d'un Profil 95% 32
      4.2.1. Rentes et taux de remplacement 32
   4.3. Le cas d'un Profil 90% 34
      4.3.1. Rentes et taux de remplacement 34
      4.3.2. Un bilan du « bien-être » des agents 36
5. Tableaux des résultats 39
   5.1. Effort d'épargne 5% : valeurs moyennes (H+F) pour quelques cohortes 39
   5.2. Effort d'épargne 3% : valeurs moyennes (H+F) pour quelques cohortes 41
6. Annexes 43
   6.1. Annexe 1 : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert 43

6.2. Annexe 2 : Le modèle démoéconomique....45
6.2.1. Une fonction de production CES à rendements constants....45
6.2.2. L'introduction d'une fonction de croissance endogène....45
6.2.3. Salaire, marché du travail et rendement du capital d'équilibre....46
6.2.4. Stock de capital....47
6.3. Annexe 3 : Dynamique des prix et stratégies d'allocation....50
6.3.1. Les stratégies d'allocation d'actifs....51
6.4. Annexe 4 : L'estimation de la demie vie....52
6.5. Annexe 5 : Un bilan du « bien-être » des agents....55
6.6. Annexe 6 : La piste de la croissance endogène....56
6.6.1. L'hypothèse d'un effort d'épargne de 5%....57
6.6.2. Effort d'épargne 5% : valeurs moyennes (H+F) pour quelques cohortes....62
6.6.3. Effort d'épargne 3% : valeurs moyennes (H+F) pour quelques cohortes....63
6.7. Annexe 7 : Production et cours boursiers : une bonne synchronisation des cycles....64
7. Références bibliographiques....66

Introduction et contexte

La loi PACTE du 22 mai 2019 introduit un nouveau Plan d'Épargne Retraite (PER). Cette réforme permet de créer un seul véhicule d'épargne retraite aux règles de fonctionnement harmonisées. L'option par défaut du PER est la « gestion pilotée ». C'est à dire la sécurisation progressive du capital à l'approche de la retraite. On le devine, l'espérance de rendement que l'on prête aux actifs risqués a des conséquences majeures sur la structure des allocations d'actifs sur le cycle de vie des agents. Par ailleurs, sur des horizons longs, le recours à un minimum de « bouclage macro-économique » est nécessaire pour encadrer l'espérance de rendement de cette classe d'actifs, sauf à retenir l'hypothèse peu plausible d'un rendement constant sans aucun lien ni avec l'évolution du contexte démo-économique ni avec l'intensité du recours à la capitalisation.

Ces remarques soulèvent aux moins deux questions :

- La question de l'impact de la capitalisation retraite sur la croissance
- La question de la dynamique que l'on prête aux actifs risqués

S'agissant de la première question, si l'on se place dans le cadre de la structure démoéconomique du modèle de Blanchet (1992) qui utilise des projections démographiques, pour alimenter un modèle de croissance de type Solow avec un progrès technique exogène croissant au taux g, l'incidence de l'augmentation du stock de capital sur la croissance est transitoire et l'excès de capital par tête est rapidement corrigé par la baisse du rendement du capital. Après quoi, le système retrouve un sentier de croissance équilibré. La croissance du capital par tête comme la rémunération du facteur travail convergent vers le rythme du progrès technique g. Le taux de croissance de la production convergent vers $(n+g)$, avec n, le rythme de croissance du facteur travail, la rémunération du capital est, par construction, égale à sa productivité marginale diminuée du taux de dépréciation du capital δ soit : $\mathrm{r}_n = (r_g - \delta) = (n+g)$. Cette productivité marginale nette du capital[2] correspond au rendement auquel les ménages pourront accéder pour se constituer un complément de retraite par épargne.

Pour le reste, poser la question de la dynamique des prix des actifs requiert *a minima* de s'interroger sur la stabilité des rendements au cours du temps, sur le caractère transitoire ou permanent des chocs sur les marchés financiers ou encore sur l'évolution du risque en fonction de l'horizon de placement ? Ce point dernier point est fondamental car la nature présumée de la relation entre le risque (la volatilité) et le temps – détermine pour l'essentiel le choix des allocations stratégiques des épargnants. Or, les soubassements de cette relation centrale restent controversés et font toujours l'objet de nombreux débats[3]. Certains auteurs considèrent, dans la mouvance de Louis Bachelier (1900), que les prix des actifs risqués suivent une marche aléatoire, c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents ; d'autres arguent que les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires, c'est-à-dire qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposés qui

[2] Dans un contexte de « sous accumulation » qui correspond à un état dans lequel les « capitalistes » consomment une part constante $(1-sv)$ du revenu brut de leur capital, le rendement net du capital converge vers : $r_n = \frac{(n+g)}{sv} + \delta\frac{(1-sv)}{sv}$ avec sv la proportion du revenu brut du capital réinvesti. Les différentes valeurs du taux d'épargne de cette classe d'agents permettent de jouer sur les rendements du capital en se plaçant de manière déterministe dans un contexte de « règle d'or » ou de « sous-accumulation ».

[3] Un bref état de l'art sur dynamique du cours des actifs risqués est développé en annexe 1.

corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leur valeur fondamentale. Comme le mécanisme de correction des mouvements extrêmes est d'autant plus probable que la durée de placement est longue, l'allongement de la durée de placement conduit donc à une réduction du risque.

Ce document de travail est centré sur la mesure du risque associée à l'utilisation des revenus du capital pour financer des compléments de retraites et examine la question centrale du surcroit de revenu et d'utilité que les agents pourraient retirer d'un abondement à un fonds d'épargne en fonction de leur aversion au risque et de leur effort d'épargne. Les interactions entre démographie, croissance, accumulation du capital et dynamique des prix des actifs risqués, soulignent la complexité du sujet. Pour l'ensemble de ces raisons, les simulations présentées dans cette note doivent être considérées comme des scénarios exploratoires d'encadrement s'appuyant sur l'enchaînement d'événements et sur leurs interrelations, conduisant d'une façon cohérente à délimiter l'espace des futurs rationnels en fonction des hypothèses retenues.

Le modèle démoéconomique

La volonté de freiner la dérive des taux de remplacement pourrait conduire les pays caractérisés par une démographie vieillissante à accélérer le développement des compléments de retraite par épargne afin de limiter les conséquences de la baisse du rendement des régimes par répartition. Les arguments traditionnellement avancés par les partisans du développement d'un système mixte reposent sur les vertus de « lissage intertemporel » propres aux transferts d'épargne et sur l'observation des chroniques passées qui tend à montrer que le rendement des actifs financiers est supérieur à la croissance de la masse salariale.

Toutefois, le capital accumulé au titre des retraites pourrait vite représenter des sommes considérables dont la neutralité macro-économique n'est pas avérée (Graphique 5b). Les interactions entre épargne retraite, accumulation du capital et croissance limitent donc la pertinence des approches reposant sur l'extrapolation des tendances passées[4] et plaident en faveur de celles s'appuyant sur un bouclage macro-économique.

Nous inscrivant dans cette logique, nous avons étudié l'influence du développement d'une épargne de cycle de vie sur le niveau de vie des retraités au moyen d'un modèle « hybride » à deux classes d'agents[5]. Il s'agit d'un modèle d'équilibre général dans lequel seuls les comportements clés en matière de réaction au phénomène du vieillissement démographique sont spécifiés de façon détaillée (la rémunération des facteurs, l'accumulation de la richesse par âge, l'évolution des revenus au cours du cycle de vie, ...). En revanche, d'autres aspects macro-économiques, estimés comme accessoires compte tenu des thèmes abordés, sont considérés comme exogènes ou stylisés à l'extrême. Les travaux de Blanchet (1992 et 1994) constituent un exemple emblématique de la démarche. L'auteur propose une maquette démoéconomique, caractérisée par un degré d'intégration démoéconomique intermédiaire entre les modèles d'optique comptable (qui ne tiennent pas compte des phénomènes de rétroaction entre un scénario macroéconomique exogène et les réformes simulées) et les modèles d'équilibre général calculables dont le principal avantage est de permettre la prise en compte de diverses interactions économiques au prix d'un certain nombre de simplifications qui en limitent la portée pratique.

Construit à l'origine pour étudier les réactions de la capitalisation et de la répartition face au vieillissement démographique dans le cas français, le modèle reprend les perspectives

[4] La remarque est d'autant plus recevable qu'en période de taux d'intérêt durablement bas les agents sont contraints d'investir sur des actifs risqués pour accéder à un rendement réel positif.

[5] Les principales caractéristiques du modèle son décrites en annexe 2.

démographiques usuelles pour simuler un régime fictif unique par répartition et les complètent par un modèle de croissance néo-classique de type Solow. Les variables économiques endogénéisées sont donc en nombre limité : l'intensité capitalistique, les rémunérations des facteurs, un chômage de déséquilibre transitoire. Le modèle ne prend donc pas en compte les préférences des agents. Cette ambition réduite confère en contrepartie une grande maniabilité à ce type d'outil et permet d'étudier les interactions entre réformes des retraites et variables macroéconomiques tout en conservant des hypothèses à fort contenu empirique.

1.1. L'introduction du risque de marché dans un modèle démo-économique à deux classes d'agents

Dans le type de modèle précédemment décrit, le capital retraite n'a pas réellement de « variance », il est rémunéré à chaque temps t en fonction de $\mathrm{r_n}(t)$, qui correspond au rendement net du capital du moment. Ce rendement est par construction relativement stable. Il est naturellement sensible aux évolutions démographiques, mais compte tenu de leur relative inertie, ces dernières déterminent des rendements peu volatils.

Or, au chapitre des arguments récurrents allant à l'encontre de la capitalisation quelle que soit sa forme, des doutes sont souvent émis sur le rendement d'un système par épargne et notamment sur la variance de son rendement dans le temps. En d'autres termes, l'épargne serait un véhicule trop risqué pour jouer un rôle dans notre système de transfert. Pour analyser les fondements de tels arguments, apprécier s'ils sont justifiés ou s'ils font partie des mythes entretenus, nous avons tenté d'introduire dans notre modèle « hybride », une modélisation simplifiée de la dynamique du cours des actifs risqués, ce qui revient en clair à intégrer la volatilité de ces actifs dans le calcul des rentes viagères issues d'un dispositif d'épargne retraite destiné à compenser la baisse des pensions.

Les travaux de Didier Blanchet ont largement contribué à tracer la carte des risques en évaluant la sensibilité du rendement du capital au choc démographique en utilisant un modèle cambridgien à deux classes d'épargnants (capitalistes et salariés). L'exercice reste toutefois perfectible car il n'intègre pas explicitement le risque lié à l'imperfection des marchés (ou risque systématique).

L'omission est logique car, on le devine, l'introduction d'un stock de capital caractérisé par une forte variance n'est pas compatible avec ce type de bouclage. Afin d'intégrer le risque lié à l'imperfection des marchés − qui se traduit par une forte volatilité du rendement des actifs financiers − nous avons simulé une espérance de rendement « bruitée » dont la valeur est fonction d'une composante aléatoire et de l'écart à une cible de long terme déterminée par $\delta t \sum_{j=0}^{N-1} r_{n_j}$ où r_n est la productivité marginale du capital issue du bouclage démo-économique. Le stock de capital « volatil » alimenté par les flux d'épargne investis sur l'actif censé refléter le risque de marché n'interfère pas dans le bouclage. Le processus permet cependant d'assurer une cohérence entre le rendement macroéconomique et les couples « rendement - risque » qui déterminent l'accumulation du capital dans un plan d'épargne retraite fictif et permet d'estimer la dispersion des rentes viagères qui en sont issues pour les différentes cohortes de retraités. Le degré de convergence entre les deux types de rendements est fonction de la dynamique que l'on prête aux prix des actifs risqués.

1.1.1. Une dynamique stylisée du cours des actifs risqués[6]

Nous avons mentionné plus haut que le débat sur le processus qui régit le prix des actions restait ouvert. Cette assertion mérite que l'on illustre simplement les conséquences des notions de « convergence » ou « d'efficience » des marchés sur la dynamique du capital.

- L'hypothèse d'efficience des marchés financiers

La théorie des marchés efficients « Efficient Market Hypothesis » (EMH) formalisée par Fama (1965) est devenu un concept central de la théorie financière. C'est, en effet, dans l'article fondateur « *The Behavior of Stock-Market Prices*[7] » que Fama postule « qu'un marché financier est dit efficient si, et seulement si, l'ensemble des informations disponibles concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré dans le prix de cet actif ». Il découle de cette théorie que si les marchés sont efficients, ils suivent une marche aléatoire. C'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents.

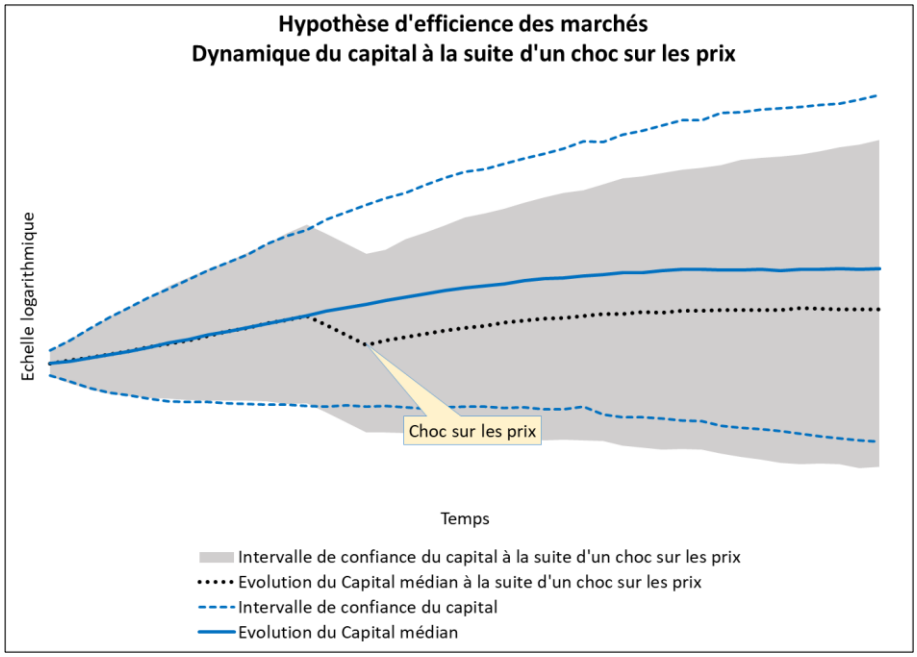
Pour tenter d'illustrer schématiquement le comportement d'un tel processus, on suppose qu'il existe sur le marché un actif risqué caractérisé par un couple « rendement – risque » donné. Dès lors que le risque (mesuré par la volatilité de l'actif) n'est pas nul, le montant du capital au terme n'est pas connu avec certitude. En effet, pour une même espérance de rendement, le caractère aléatoire de l'ordre d'apparition desdits rendements influe sur le montant du capital au terme. Pour cette raison, il est d'usage de calculer un « intervalle de confiance » qui permet d'encadrer une estimation pour un risque d'erreur donné. Sur le graphique 1 ci-dessous, on a représenté l'évolution du capital médian sans choc artificiel sur les prix (trait plein bleu) et l'intervalle de confiance associé (tirets bleus). On constate que lorsque le cours d'un actif suit une marche aléatoire, sa variance croît linéairement avec l'intervalle de temps.

Si on génère arbitrairement une séquence négative de rendement dans notre univers fictif, on constate un décrochage de l'intervalle de confiance de l'épargne capitalisée (zone grisée). On observe toutefois que le krach n'affecte pas l'espérance de rendement de l'actif risqué. Après le choc sur les prix, les capitaux médians (trait plein bleu et pointillés noirs) progressent parallèlement sans qu'il se produise de rattrapage. On en conclu que si les marchés sont efficients, ils suivent un processus sans mémoire.

Graphique 1 : L'efficience des marchés

[6] La spécification retenue de type « *Time-dependent Ornstein-Uhlenbeck process* » est détaillée en fin de document (annexe 3).

[7] Fama, E. F. (1965), «*The Behavior of Stock Market Prices*», Journal of Business, Volume 38, No1, pp. 34-105.



- L'existence d'une force de rappel dans la dynamique des prix

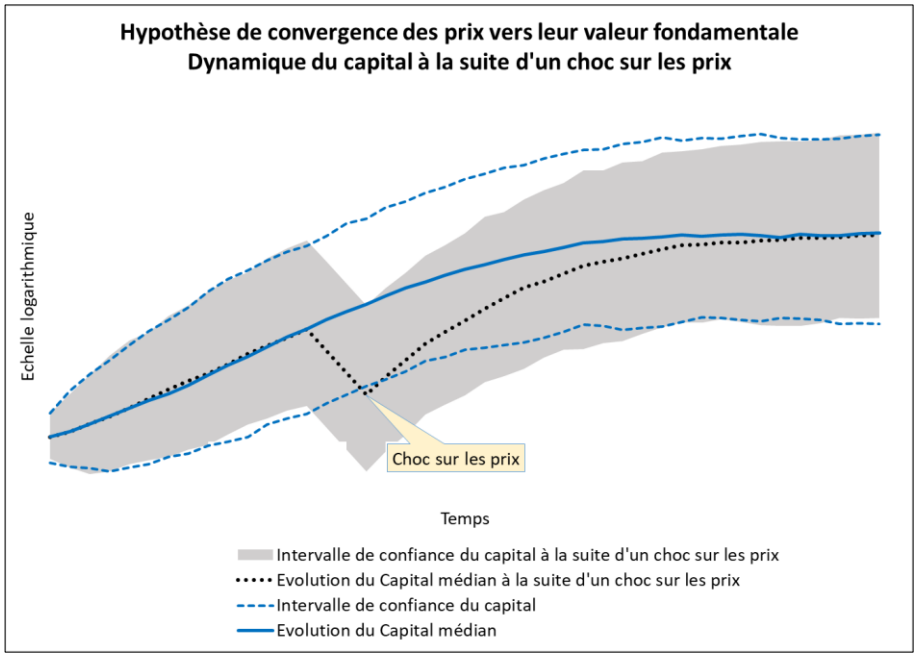
Dans le cas où le prix d'un actif risqué converge vers une tendance déterministe[8], la dynamique de son cours suit un processus de diffusion log-normal dont la variance ne croît pas proportionnellement à l'intervalle de temps. La variance est maximale lorsque les prix sont proches de leur tendance. Lorsque les prix s'éloignent de leur valeur fondamentale, la variance à une propension à se stabiliser autour d'un niveau inférieur. La stabilisation de la variance est due à la force de rappel « *spring-effect* ».

Si l'on reproduit l'exercice précédent, on constate que lorsque l'on simule un krach, le choc affecte la valeur de la série (son cycle) sans affecter la tendance déterministe. L'effet du choc tend à disparaître au fur et à mesure du temps en fonction de l'intensité de la force de rappel.

Contrairement au processus aléatoire précédemment étudié, on note sur le graphique 2 ci-après que l'espérance de rendement de l'actif risqué est affectée par le choc simulé. La valeur médiane du capital impacté (pointillés noirs) progresse plus rapidement après la période de krach jusqu'à ce que son niveau rejoigne graduellement celui du capital médian déterminé hors incident de marché (trait plein bleu).

Graphique 2 : Convergence des prix vers leur valeur fondamentale

[8] Afin de vérifier cette allégation, la concordance entre les cycles de la production industrielle et les cycles boursiers est analysée en annexe 7.



Dans ce type de dynamique, les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont donc transitoires, c'est-à-dire qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposés qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leur valeur fondamentale. Le mécanisme est clairement résumé par la comparaison des intervalles de confiance construit à partir des deux simulations.

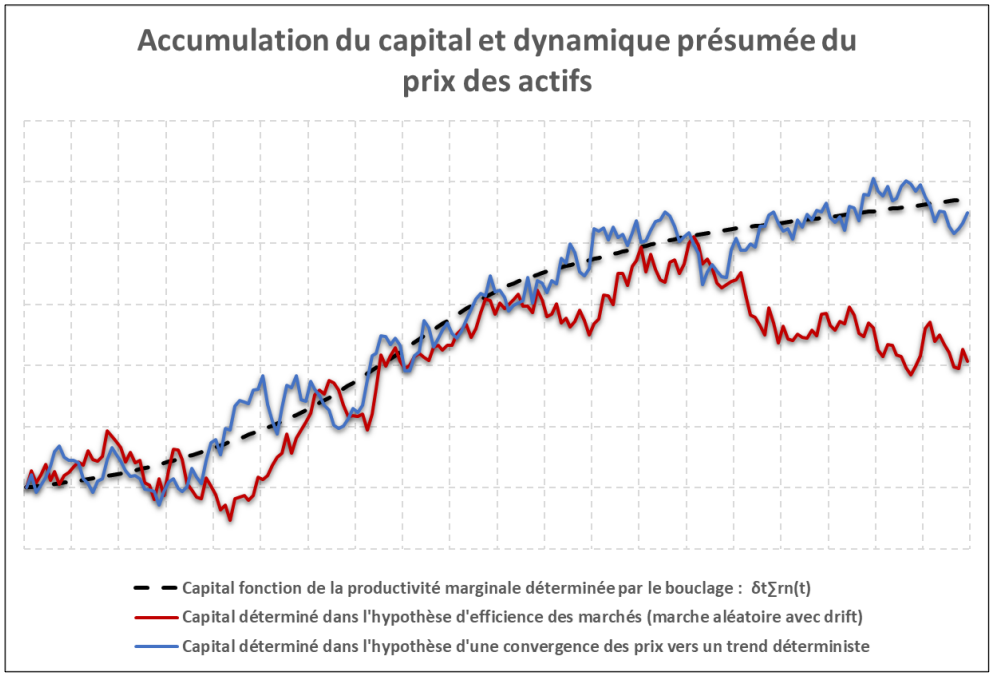
1.1.2. Capital retraite du bouclage démoéconomique et capital du plan d'épargne

L'exercice précédent peut utilement servir de base pour comprendre les interactions entre le capital retraite déterminé par le bouclage et le capital « volatil » accumulé dans le plan d'épargne fictif. Dans la maquette démoéconomique, les flux d'épargne accumulés par les salariés en vue de la retraite dans le modèle à deux classes d'agents s'ajoutent au capital structurel[9] (ou dynastique) accumulé par les « capitalistes » ou « héritiers » et conduisent à des modifications transitoires des paramètres macroéconomiques projetés.

La séquence des rendements marginaux issus du modèle sert alors de guide pour déterminer l'accumulation du capital du plan d'épargne. Naturellement, comme figuré sur le graphique 3 suivant, la proximité entre la trajectoire du capital « macroéconomique » et celui du plan d'épargne est fonction la dynamique des prix à laquelle on se réfère. Dans l'hypothèse où l'épargne retraite serait intégralement investie sur des actifs risqués la similitude des profils d'accumulation dépend de l'intensité de la force de rappel vers le trend déterminé par le rendement d'équilibre.

Graphique 3 : Convergence *vs.* Efficience

[9] Dans ce cas de figure, le poids du stock de capital structurel au sein du capital total se réduit. On peut conclure à une éviction des héritiers par le fonds capitalisé.



Dans les faits, le caractère stochastique (aléatoire) de la génération des rendements nous conduit à établir de nombreux scénarios puis à en évaluer l'issue.

1.2. L'estimation de la demi-vie

Un point est d'identifier l'existence d'une force de rappel dans la dynamique des prix, un autre, tout aussi fondamental, est d'évaluer l'intensité du mécanisme. En effet, dans le cas où la vitesse de retour vers le trend déterministe (notée κ par convention) apparaitrait disproportionnée au regard de la durée d'épargne d'un agent, le phénomène ne conduirait pas à des allocations stratégiques d'actifs significativement différentes de celles déterminées dans le cadre de l'EMH. Au-delà de la détection de mécanismes de convergence dans la dynamique des prix, il est donc essentiel d'évaluer la vitesse de cette convergence. Ce paramètre, complexe à mesurer en raison de son instabilité dans le temps, est traditionnellement estimé par la « demi-vie » hl du processus, soit la durée moyenne du temps nécessaire pour que l'écart entre le prix de marché et sa valeur fondamentale soit résorbée de moitié.

Les estimations sur les chroniques trimestrielles du CAC All-Tradable[10] dividendes réinvestis de 1950 à 2017 déterminent des demi-vies[11] médianes annualisées de l'ordre de 7 ans (Graphique 4), compatibles avec la durée d'épargne des agents et les résultats trouvés par les principaux auteurs sur les périodes d'après-guerre[12]. Notre ambition n'est pas de prévoir le cours des actions − d'autant plus que les calculs sur des fenêtres glissantes de différentes largeurs montrent l'instabilité des forces de rappel dans le temps − mais plutôt de cerner la nature de la dynamique qui tend à rapprocher les prix d'un niveau économiquement compatible. Ces résultats, bien qu'indéniablement porteurs d'information, sont à interpréter avec précaution. En effet, avant la création du CAC40 en 1987, l'indice des prix français souffre de biais de survivance «

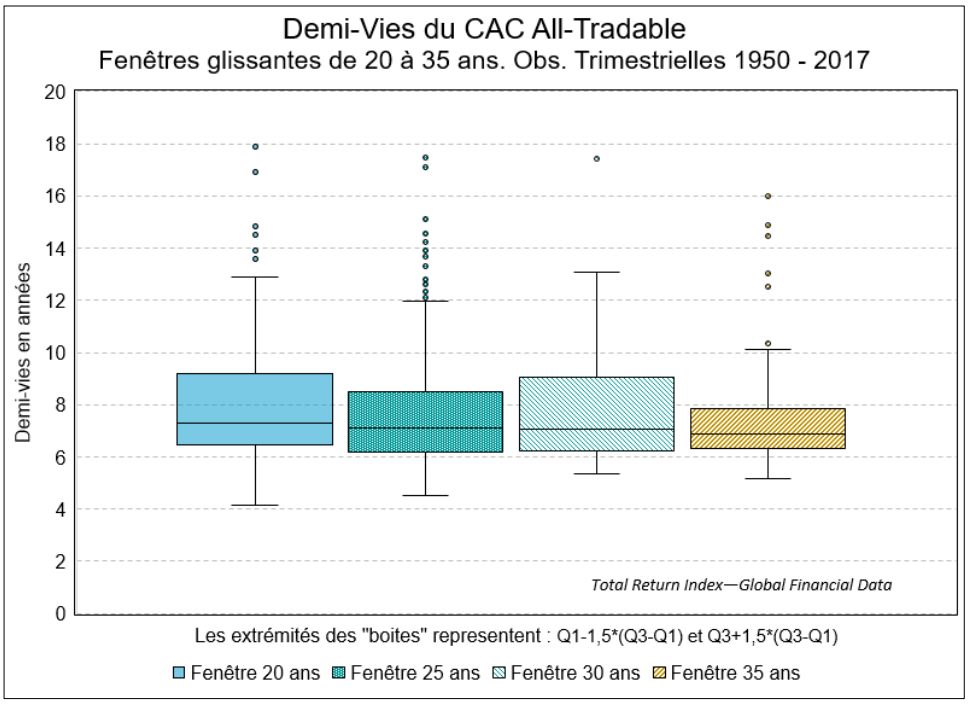
[10] Source : Global Financial Data.

[11] La vitesse de « retour vers la moyenne » κ se déduit de la demi-vie hl par la relation $\kappa = \frac{\ln(2)}{hl}$. On obtient une vitesse κ proche de 0,10.

[12] Nos estimations s'inscrivent dans l'intervalle de confiance déterminé par Spierdijk et al. (2012) sur 18 pays de l'OCDE.

survivorship bias » et de pondération[13]. Ces biais ne semblent pas de nature à remettre en cause la nature du processus[14] mais il est indéniable qu'ils conduisent à une estimation imprécise de la demi-vie.

Graphique 4. Estimation des demi-vies des chroniques boursières



Nantis de nos modélisations stylisées des marchés financiers (Efficience vs. Convergence), il est désormais possible d'apprécier l'influence de ces processus antagonistes sur la stratégie d'allocation temporelle d'actifs. Pour déterminer la performance des stratégies, nous avons procédé à des simulations stochastiques en y intégrant, tour à tour, les paramètres de la dynamique des cours boursiers précédemment estimés. Il est alors facile, pour un processus donné, de simuler artificiellement les trajectoires possibles des rentabilités boursières, d'en évaluer la dispersion et d'estimer la valeur des rentes viagères qui en sont issues pour les différentes cohortes de retraités en fonction d'un effort d'épargne et d'une aversion au risque donnés.

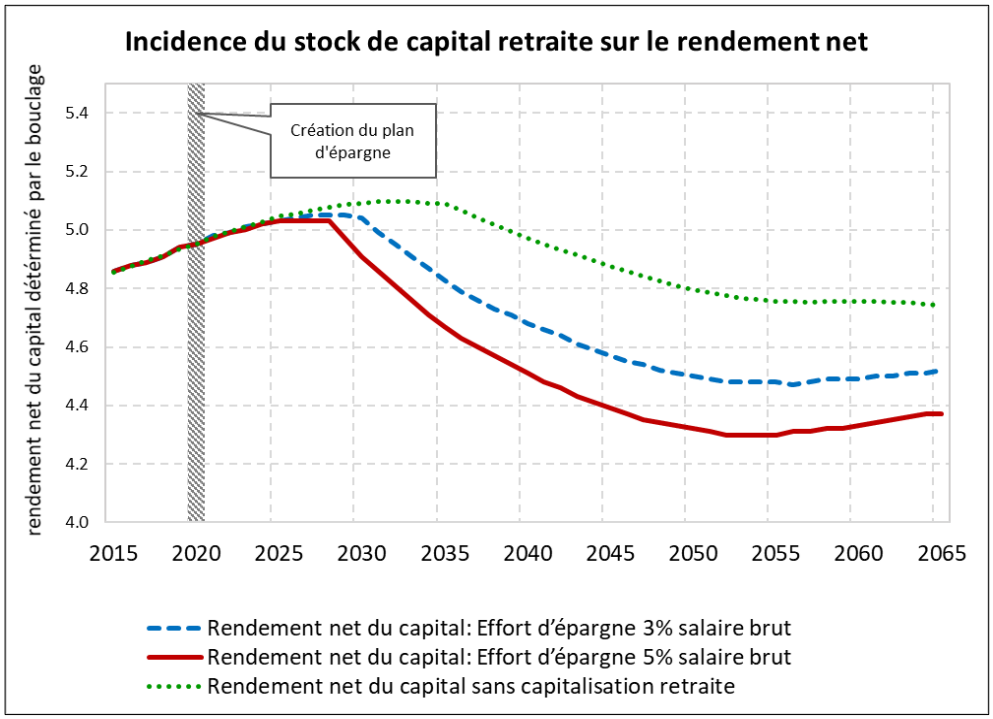
Une application au cadre démo-économique français

Comme souligné en préambule, le modèle « hybride » utilisé est un modèle d'équilibre général dans lequel seuls les comportements clés en matière de réaction au phénomène du vieillissement démographique sont spécifiés de façon détaillée. En revanche, d'autres aspects macro-économiques, considérés comme accessoires compte tenu des thèmes abordés, sont considérés comme exogènes ou stylisés à l'extrême.

[13] A cet égard les travaux de Le Bris et Hautecoeur (2010) semblent être la référence.
[14] Une discussion sur l'estimation de la demi-vie figure en annexe 4.

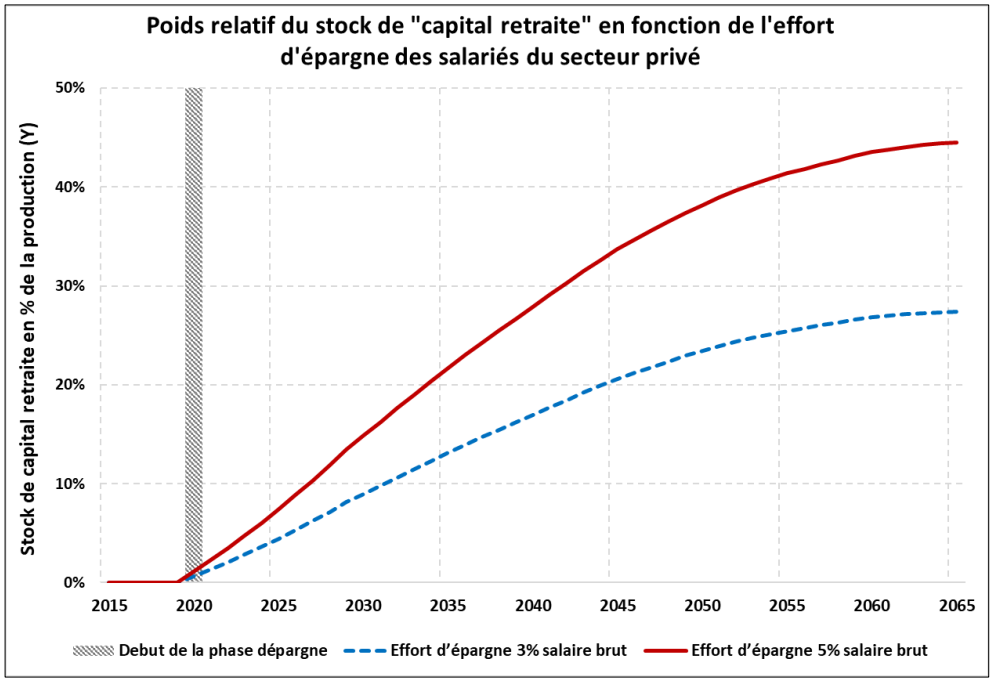
Une autre limitation tient au choix d'un modèle d'économie fermée. Ce choix peut apparaître restrictif, mais dans ce cas précis, la modélisation en économie fermée nous parait riche d'enseignements. En effet, l'approche en économie ouverte revient à traiter le rendement du capital comme exogène (égal au taux d'intérêt sur le marché international), ce qui rend quelque peu arbitraire la comparaison des performances de la capitalisation et de la répartition. En particulier, on exclurait la dépendance entre taux d'intérêt, démographie et accumulation. Par ailleurs, du fait du vieillissement général des pays développés, on peut supposer que les contraintes démographiques joueront à peu près dans le même sens dans ces économies. La modélisation en économie fermée reproduit alors approximativement les inflexions que pourrait connaître le rendement du capital dans l'ensemble de ces pays. En outre, comme l'atteste le graphique 5a ci-dessous, en raison de l'élasticité de substitution capital/travail retenue ($s = 1$, soit une fonction Cobb-Douglas), la décroissance du rendement du capital est relativement limitée même dans le cas de la de la création d'un plan d'épargne-retraite.

Graphique 5a. Rendement du capital et fonction de production



Dans le cas d'un modèle de Solow, l'accumulation des flux d'épargne conduit à une progression du poids du capital retraite dans la production (symbolisée sur le graphique 5b par le volume total de la production Y), puis à sa stabilisation graduelle à partir du moment où le fonds est décapitalisé par le service des rentes. Dans l'hypothèse d'un effort d'épargne équivalent à 5% du salaire brut moyen des salariés du secteur privé, le capital retraite représenterait pratiquement 45% de la production, contre moins de 30% dans l'hypothèse d'un abondement réduit à 3%. Cette différence d'accumulation explique la différence entre les rendements nets du capital. L'augmentation de l'intensité capitalistique (soit l'importance relative du capital par rapport au travail $^{K}/_{L}$) se traduit par une baisse de la productivité du capital (nous avons toutefois cherché à échapper au déterminisme du modèle de Solow, en utilisant un modèle de croissance endogène alternatif dont les résultats sont présentés en annexe 6).

Graphique 5b. Poids relatif du capital retraite en fc. de l'effort d'épargne


Poids relatif du stock de "capital retraite" en fonction de l'effort d'épargne des salariés du secteur privé
Stock de capital retraite en % de la production (Y)
50%
40%
30%
20%
10%
0%
2015
2020
2025
2030
2035
2040
2045
2050
2055
2060
2065
Debut de la phase dépargne
Effort d'épargne 3% salaire brut
Effort d'épargne 5% salaire brut

2.1. Une simulation de référence

Afin d'estimer l'évolution du rendement implicite de la répartition, il est nécessaire de disposer d'une simulation tendancielle sur les perspectives financières des régimes de retraite. Dans la maquette utilisée à cette fin, le fonctionnement des systèmes de retraite est stylisé et empreinte les principales caractéristiques réglementaires et démographiques des régimes des salariés du secteur marchand. Avant de détailler les résultats des simulations, il est important de résumer les principales hypothèses retenues concernant les paramètres clés des projections.

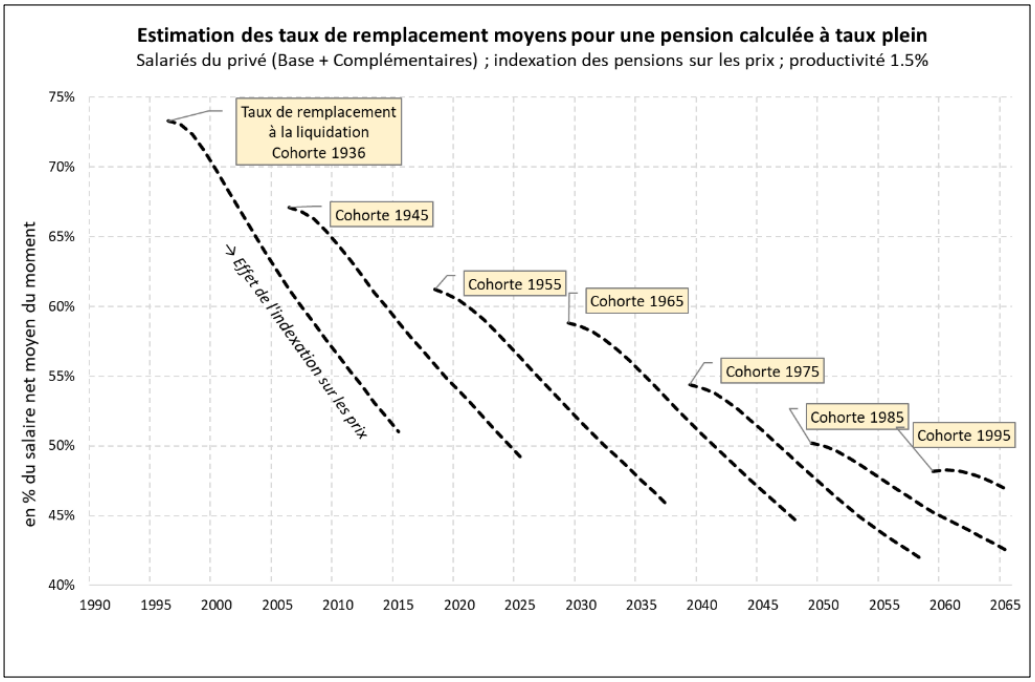
Synthèse des hypothèses retenues pour les projections	
Démographie : Projections démographiques 2013-2070, Insee Hypothèse centrale* Projections de population active 2016-2070, Insee Hypothèse centrale* *Fécondité 1,95 enfant par femme ; solde migratoire + 70000 sur la période	
Economie	
« Scénario 1,5% » du COR, novembre 2019.	
Croissance de la productivité du travail à long terme	1,5%
Taux de chômage de long terme (U_0)	7,0%
Evolutions réglementaires	
Durée d'assurance	La durée d'assurance pour une retraite à taux plein augmente d'un trimestre par an et passe de 41 ans et trois trimestres en 2020 à 43 ans en 2035
Indexation des pensions	Régime général: revalorisation des pensions et des meilleurs salaires sur les prix
	Régimes complémentaires: valeur d'achat du point indexée sur le salaire moyen, valeur de service du point indexée sur les prix

Dans nos projections, qui font abstraction du contexte actuel de pandémie, l'hypothèse de productivité du travail est fixée à 1,5% l'an, soit un pronostic similaire à celui retenu par le Conseil d'orientation des retraites (COR) et en phase avec le ralentissement de la croissance de la productivité du travail observée depuis le début des années 1990. Parallèlement, le chômage convergerait vers son niveau structurel[15]. La projection à législation constante montre que la succession des réformes entamées depuis 1993 va se traduire par une poursuite de la baisse du niveau des pensions relativement aux salaires. Pour s'en convaincre, analysons l'évolution des taux de remplacement[16] projetés pour les différentes générations tout au long de la durée de leur retraite (Graphique 6). Par exemple, les salariés nés en 1936 ont perçu en 1996 une retraite moyenne supérieure à 70% du salaire net moyen des actifs du moment. Les taux de remplacement des individus de la même cohorte vont diminuer au cours du temps en raison de la sous indexation des pensions par rapport aux salaires.

Graphique 6. Evolution des taux de remplacement moyens projetés par génération

[15] Dans sa publication d'avril 2019 sur la France, l'OCDE justifie un taux de chômage structurel durablement élevé en raison de la faiblesse des taux d'emploi notamment pour les personnes peu qualifiées. Les qualifications des plus de 24 ans sont insuffisantes et la qualité des programmes de formation tout au long de la vie est inégale.

[16] On fait l'hypothèse simplificatrice que les prélèvements sociaux sur les retraites sont constants sur toutes la période de projections et que le taux de CSG est de 6.6%, soit la taux « médian ».



Pour les générations plus jeunes, l'impact de la réforme sera encore plus perceptible puisque les taux de remplacement à la liquidation[17] vont baisser progressivement d'une vingtaine de points entre les salariés de la génération 1936 et ceux de la génération 1995 qui prendront leur retraite en 2060. Au vu des résultats de l'exercice de simulation, on constate que l'indexation des retraites sur l'inflation permet aux gains de productivité de ne pas se retrouver dans les pensions. Ce mécanisme, décrit en détail par Hamayon et Legros (2014), se traduit par une baisse du pouvoir d'achat relatif des retraités par rapport aux actifs et participe massivement au rééquilibrage du système de retraite sans que ne soit affichée dans la réforme une baisse explicite des taux de remplacement.

2.2. L'introduction d'un dispositif d'épargne pour compenser la baisse des pensions

L'objectif du volet épargne-retraite de la loi Pacte du 22 mai 2019 est double. Il ambitionne d'une part de flécher l'épargne des ménages vers l'économie productive et, d'autre part, de proposer des produits d'épargne retraite attractifs et adaptés aux besoins d'une épargne longue. Pour faciliter l'atteinte de ces objectifs, un nouveau plan d'épargne « simplifié » permet de regrouper tous ses contrats (individuels ou collectifs d'entreprise) au sein d'un nouveau produit unique : le Plan d'Epargne Retraite « PER ».

[17] Les taux de remplacement sont définis ici comme le ratio « retraite moyenne sur salaire moyen » des salariés. Il n'y a donc pas, comme c'est traditionnel, de référence au dernier salaire d'activité des retraités.

2.2.1. Caractéristiques du plan d'épargne retraite fictif

Notre plan d'épargne retraite[18] à cotisations définies (dont les affiliés portent directement les risques) s'inscrit volontairement dans un cadre très simplifiée du modèle de cycle de vie de Modigliani-Brumberg (1954). Dès qu'ils sont de jeunes adultes, les ménages épargnent pour s'assurer un complément de retraite car ils souhaitent lisser leur consommation au cours du temps. L'épargne augmente jusqu'à la retraite puis est convertie en rente. Les consommateurs ont un horizon de planification correspondant à leur espérance de vie. Il n'y a pas de motifs de dons ni de legs, les préférences sont restreintes à la seule aversion au risque. En outre, nous faisons l'hypothèse forte que l'investissement en actifs risqués peut se faire sans contrainte dès l'entrée dans la vie active. Nous nous permettons cette simplification car l'objectif poursuivi se focalise sur la comparaison des propriétés « rendements - risques » de stratégies d'allocation d'actifs contrastées et non pas sur l'analyse des extensions du modèle de cycle de vie.

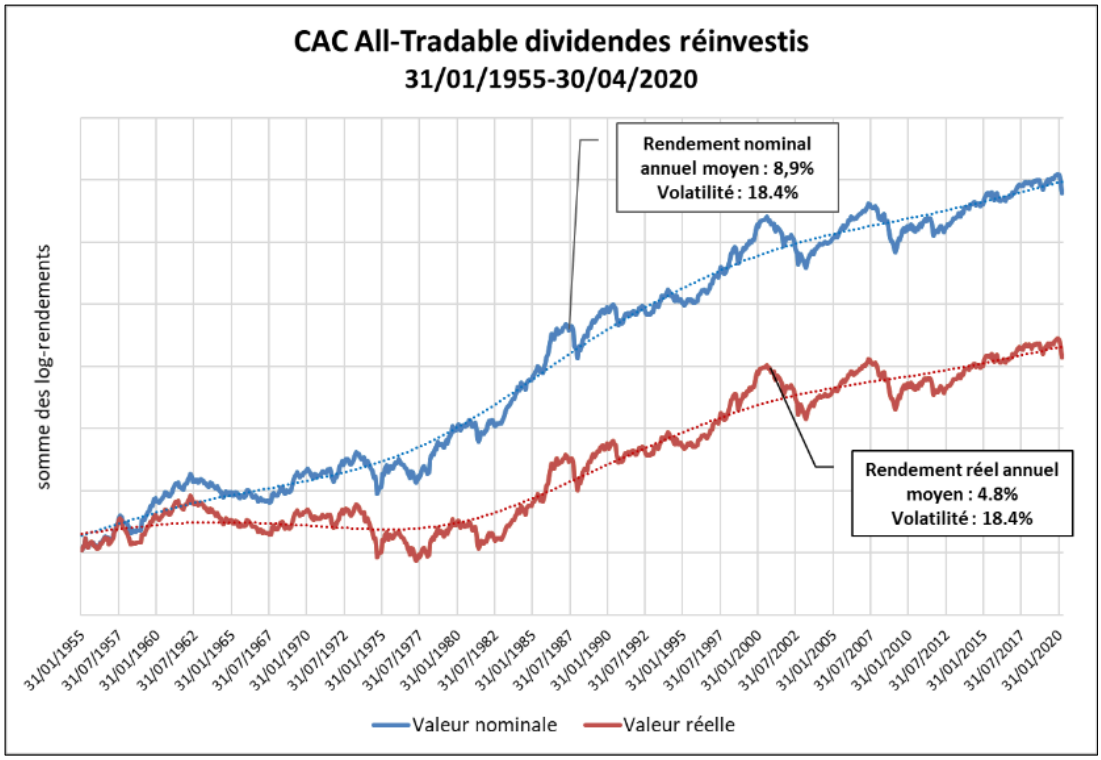
Nous avons conscience que la prise en compte des risques sur le revenu et l'existence de contraintes de liquidité modifient singulièrement le profil de détention d'actions durant la vie active (Cocco et al. (2005)). A cet égard, les travaux de Carroll (1997) sur l'épargne de précaution montrent que lorsque les ménages (notamment les plus jeunes) sont soumis à de forts risques de perte de revenus du travail (chômage), ils accumulent rapidement un stock d'épargne tampon « buffer stock » (en raison d'une forte préférence pour le présent) pour faire face à cette situation. Les plus jeunes ménages sont particulièrement soumis à cet aléa en présence de contraintes de liquidité surtout s'ils ne disposent pas de réserves patrimoniales facilement disponibles. Par ailleurs, en vertu du concept de tempérance (Kimball (1990 et 1993)), cette épargne de précaution est par nature investie sur des actifs financiers facilement mobilisables à moindre coût, donc des actifs sans risque. Autre simplification assumée, nous supposons lors de nos simulations qu'en moyenne la majorité de l'épargne financière est investie pour la retraite. C'est-à-dire que les individus sont censés épargner entre 3% et 5% de leur salaire pour se constituer une épargne de cycle de vie, effort qui apparait compatible avec le taux d'épargne financier des ménages français.

Ces réserves faites, afin d'évaluer l'incidence de la constitution d'un plan d'épargne retraite sur la rémunération des facteurs et sur le niveau de vie des retraités, les hypothèses suivantes ont été retenues. On suppose que le fonds de retraite est abondé à partir de 2020 par les différentes cohortes de salariés. Tous les salariés du secteur privé dont l'âge est inférieur de 20 ans à l'âge de la retraite à la date de démarrage du fonds y accumulent un pourcentage donné de leurs salaires bruts. Au démarrage du fonds d'épargne, les cohortes dont l'âge est compris entre l'âge de la retraite moins 10 ans et l'âge de la retraite moins 20 ans, adhèrent de manière facultative au fonds. On a supposé que 50% des salariés concernés cotiseraient au fonds. Le fonds est décapitalisé en fonction de l'arrivée à l'âge de la retraite des cohortes qui y sont affiliées, auxquelles des rentes sont allouées.

Le rendement et la volatilité des actifs risqués sont fixés, assez arbitrairement, en fonction des normes de long terme (Graphique 7). L'espérance de rendement $r_{n(t0)}$ et la volatilité $\sigma_{(t0)}$ qui ont servi à l'initialisation de la dynamique des prix des actifs sont respectivement de 5% et de 18%, soit les valeurs réelles moyennes calculées à partir du logarithme des rendements de janvier 1955 à avril 2020.

[18] Nous n'abordons pas dans cet article la gestion actif / passif (ALM) du plan d'épargne.

Graphique 7 : CAC All-Tradable (ex SBF 250)



Le niveau de « sous accumulation » du modèle de Solow est déterminé afin que la productivité marginale du capital $\mathrm{r}_{n(t0)}$ en début de simulation corresponde au rendement calculé à partir des chroniques de de long terme.

Par la suite, l'espérance évolue en fonction du rendement net du capital $\mathrm{r}_{n(t)}$ et d'une composante stochastique stationnaire. La volatilité $\sigma_{(t)}$ est calculée à partir d'une relation basique déduite de l'expression de la « droite de marché des capitaux » (CML). Elle dépend de son niveau historique $\sigma_{(t0)}$, des valeurs de l'actif sans risque r_f et du rendement d'équilibre $r_{n(t)}$:

$$\sigma_{(t)} = \left(r_{n(t)} - r_f\right) * \left(\frac{\sigma_{(t0)}}{r_{n(t0)} - r_f}\right) \quad (2.1)$$

avec:

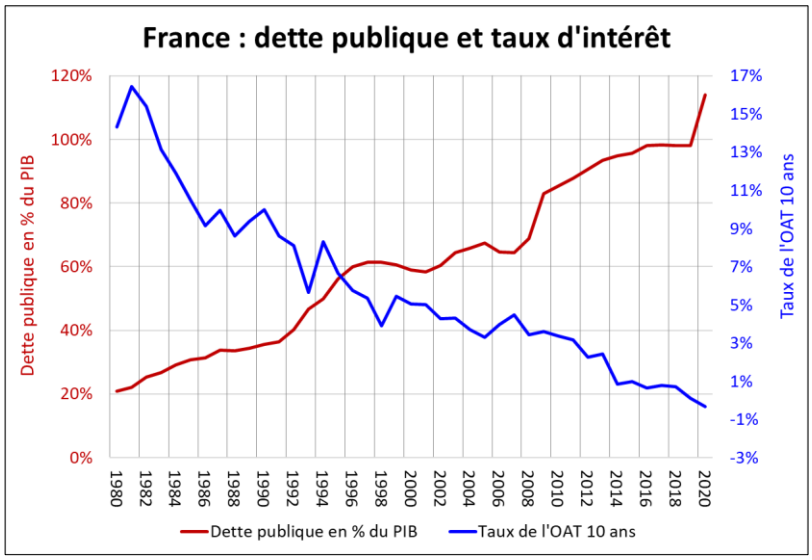
$\sigma_{(t)} = volatilité\ en\ (t)$
$\sigma_{(t0)} = volatilité\ historique$
$r_{n(t0)} = rendement\ historique$
$r_{n(t)} = rendement\ d'équilibre\ et\ (t)$
$r_f = rendement\ de\ l'actif\ sans\ risque$

Pour le reste, les hypothèses relatives à la revalorisation des rentes ou encore aux frais de gestion sont précisées dans le tableau ci-dessous.

Gestion du fonds d'épargne	
Effort d'épargne en % du salaire brut	5% puis 3%
Rendement réel de l'actif sans risque	$r_f = 0\%$
Rendement réel de l'actif risqué en $\boldsymbol{t_0}$	$r_{n(t0)} = 5\%$
Rendement réel de l'actif risqué en $\boldsymbol{t}$	Rendement d'équilibre $= r_{n(t)}$
Volatilité de l'actif risqué en $\boldsymbol{t_0}$	$\sigma_{(t0)} = 18\%$
Volatilité des actifs risqués en $\boldsymbol{t}$	$\sigma_{(t)} = (r_{n(t)} - r_f) * \sigma_{(t0)}/(r_{n(t0)} - r_f)$
Revalorisation des rentes : (1+taux rémunération)/(1+taux technique)-1	0% (indexation sur les prix)

Notre hypothèse concernant le taux de revalorisation des provisions constituées pour servir les rentes, à savoir un taux technique nul, mérite d'être argumentée. Elle résulte tant d'une analyse réglementaire qu'économique. S'agissant des rentes viagères, le code des assurances précise que le taux technique ne doit pas excéder 60% du taux moyen d'emprunt d'État (TME) des 6 derniers mois. D'après la Banque de France, fin octobre 2020, le TME moyen était de -0,12%, et taux technique nominal de 0.0% (il est limité à 0% par la réglementation). D'un autre côté, depuis 1980, on constate sur le graphique 8 présentant simultanément la dette publique et les taux d'intérêt, une baisse continue des titres obligataires à 10 ans.

Graphique 8 : Dette publique et taux d'intérêt



Cette baisse tendancielle s'explique en début de période par l'évolution de l'inflation. Au-delà la hausse continue de l'endettement public rend nécessaire le maintien des taux longs à un bas niveau pour assurer la solvabilité budgétaire. De ce fait, il est vraisemblable que la normalisation des taux sans risque n'ait pas lieu à courte échéance comme le montrent Ducoudré et al. (2019). Pour l'ensemble de ces raisons nous avons retenu l'hypothèse prudente d'un taux sans risque réel nul tout au long des simulations.

En outre, dans la réalité les taux de chargement de gestion sont supérieurs aux taux techniques. En effet, plusieurs types de frais impactent le rendement d'un plan de retraite pendant la phase d'épargne (frais d'entrée, frais d'arbitrage, frais sur encours, frais sur versements). De même, la sortie en rente s'accompagne de prélèvements spécifiques (frais de conversion du capital en rente, frais sur encours de rente, frais d'arrérage). Comme nous n'avons pas retenu dans nos simulations d'hypothèse de frais de gestion pour les régimes par répartition, afin de ne pas fausser les comparaisons, nous faisons de même pour notre plan d'épargne retraite fictif. On soulignera toutefois, que d'après les comptes de la sécurité sociale les charges de gestion courante de la caisse nationale d'assurance vieillesse (CNAV) représentent environ 1,17% du montant des prestations en 2018, soit un taux inférieur aux frais de gestion appliqués en moyenne par les intermédiaires financiers.

- Une fiscalité simplifiée

Nous nous plaçons sciemment dans un cadre fiscal simplifié. Nous prêtons à notre fonds d'épargne les caractéristiques d'un PER d'entreprise collectif alimenté par des sommes issues de l'intéressement et de la participation. De ce fait, les prélèvements sociaux de 17,2% sont applicables sur une fraction de la rente selon l'âge du crédirentier. Sur ce point, nous avons considéré que les départs à la retraite auraient lieu entre 60 à 69 ans ce qui correspond à une fraction imposable de 40 % de la rente, soit un taux de prélèvement effectif de 6,88%.

- Profils de risque des épargnants et abondement

D'une manière générale, le choix des agents en matière d'épargne[19] dépend de trois grands types de facteurs. Tout d'abord, les « ressources » disponibles de l'individu. Il s'agit évidemment de son patrimoine mais aussi de son capital santé, son niveau d'éducation, ses connaissances financières… Ensuite, la perception de l'environnement et les anticipations vis-à-vis du futur. Cette catégorie regroupe des éléments économiques (perspectives de rendement des marchés financiers, évolution de salaire, risque de chômage, montants de la future pension de retraite…), tout comme les anticipations en matière d'état de santé ou d'espérance de vie. Enfin, les préférences de l'individu à l'égard du risque et du temps.

Pour des raisons de simplicité nous n'avons retenu que l'aversion au risque comme facteur de demande d'actifs risqués. Plus précisément, le critère adopté pour déterminer la plus ou moins grande capacité des épargnants à prendre des risques est une probabilité de « préservation du capital ». Ce critère a été retenu en raison de sa lisibilité et sa facilité d'interprétation. Par exemple un « Profil 95% » sélectionnera une succession d'allocations structurelles d'actifs lui garantissant[20] au terme, une préservation du capital investi dans le plan d'épargne retraite dans 95% des cas, ce qui, formellement, correspond à une «Value-at-Risk» (VaR) nulle au seuil $(1-\alpha) = 5\%$. Un « Profil 90% », plus risquophile, investira sur des supports dont la probabilité minimale de « préservation du capital » est de 90% et par là acceptera un risque de perte en capital dans 10% des cas.

[19] Arrondel L., Masson A. (2016). Les épargnants français dans la « Grande Récession » : Préférences, anticipations et choix de portefeuille, document de travail, Paris School of Economics.
[20] En fonction d'une distribution statistique paramétrique connue.

Comme le montrent Stangeland et Turtle (1999), lorsque les cours suivent un processus de retour vers la moyenne, la stratégie la plus appropriée est celle de la «diversification temporelle[21]». Dans ce cas, la stratégie d'un investisseur consistera à sélectionner une succession d'allocations structurelles d'actifs correspondant à une probabilité de « préservation du capital » prédéterminée. L'objectif étant de maintenir une VaR constante pendant toute la période d'accumulation, la stratégie impose des réallocations périodiques afin de réduire le poids relatif des actifs risqués. Par souci de simplification, nous supposons, à l'instar de Barberis (2000), que le marché est constitué d'un actif sans risque et d'un actif risqué[22], conformément au théorème de la séparation. Les résultats déterminent des stratégies[23] différenciées selon les propriétés que l'on prête au cours des actions.

En définitive nous avons retenu 3 profils reflétant un spectre assez contrasté d'épargnants dans nos simulations. Les profils sont notés :

- « Profil 99% »
- « Profil 95% »
- « Profil 90% »

Comme il n'est pas envisageable de restituer les résultats pour l'ensemble des cas types, seuls quelques exemples représentatifs sont présentés (l'ensemble des résultats pour un affilié « moyen » figure cependant sous forme de tableaux, chapitre 5). L'exercice est décliné en fonction de deux variantes. Dans l'une les salariés consacreraient 5% de leur salaire brut pour se constituer une épargne de cycle de vie, dans l'autre le taux d'épargne s'établirait à 3%.

[21] En revanche dans l'EMH, la stratégie de diversification temporelle est plus délicate à justifier. Bodie et al. (1992) montrent toutefois que la prise en compte du capital humain et de la flexibilité du marché du travail peuvent justifier le recours à ce type de stratégie.

[22] La question de la construction d'un modèle intégrant plus de classes d'actifs (donc une plus grande diversification) reste posée. La réponse est vraisemblablement à chercher dans une modélisation exogène. En effet, l'intégration de titres de dette dans la maquette semble hors d'atteinte compte tenu du rôle croissant qu'ont pris les politiques monétaires dans la formation des taux.

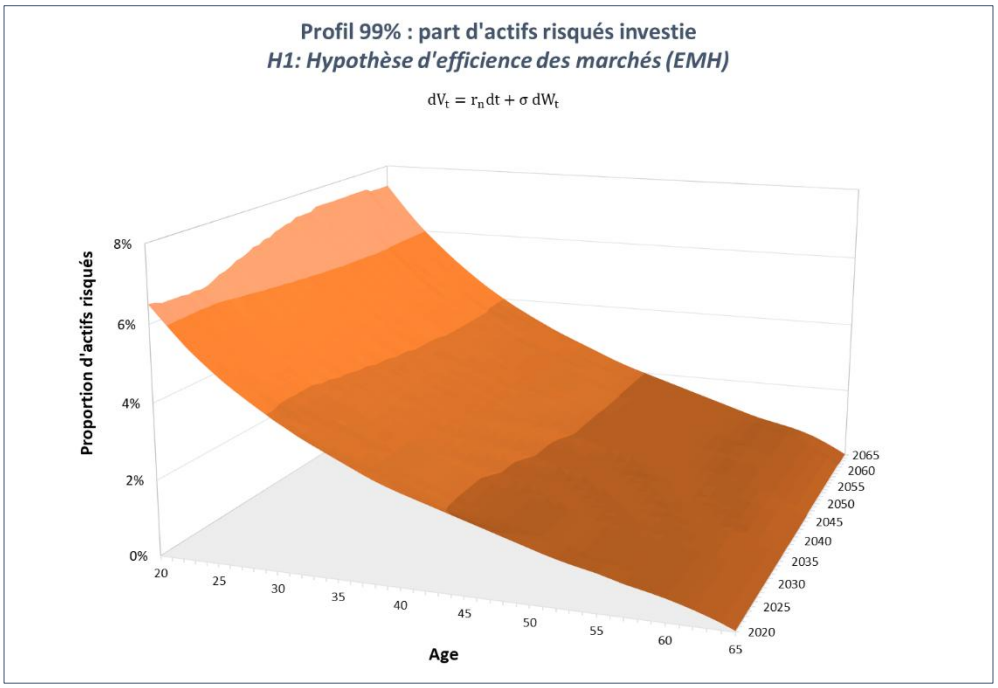
[23] Voir en annexe 3 le paragraphe sur les stratégies d'allocation d'actifs.

Synthèse des simulations : l'hypothèse d'un effort d'épargne de 5 %

3.1. Le cas d'un Profil 99%

La stratégie d'allocation testée correspond à celle d'un agent résolument averse au risque. Cette stratégie vise à préserver au minimum 99% de la valeur du capital accumulé pour compléter la pension de retraite, ce qui correspond à une «VaR» nulle au seuil $(1-\alpha)=1\%$. Comme les grandeurs sont exprimées en termes réels, l'objectif revient pratiquement au maintien le pouvoir d'achat du capital. Cette hypothèse présente un intérêt particulier car elle permet une comparaison directe avec le système par répartition dont le rendement actuariel implicite n'a jamais été négatif et que l'on peut considérer comme « un actif sans risque[24] ». Sur le plan du calcul, on fait l'hypothèse que les agents ajustent leurs allocations stratégiques à chaque temps t en fonction de la valeur du rendement marginal du capital $r_{n_{(t)}}$, de la volatilité $\sigma_{(t)}$ constatée et de la durée T restante avant la liquidation de la retraite, de manière à respecter au mieux le seuil de probabilité associé au critère de risque. Les allocations stratégiques obtenues dans l'hypothèse où le rendement des actions suit une loi gaussienne dont l'espérance est donnée par un « drift » $\mathrm{rn}_{(t)}$ variable (hypothèse « H1 », graphique 9a) s'avèrent plus prudentes que celles déterminées dans l'hypothèse alternative. Ainsi, dans ce premier cas l'évolution du poids des actifs risqués dans les allocations des épargnants atteindraient un maximum de l'ordre de 8% au cours de la phase d'accumulation (à l'âge de 20 ans par hypothèse).

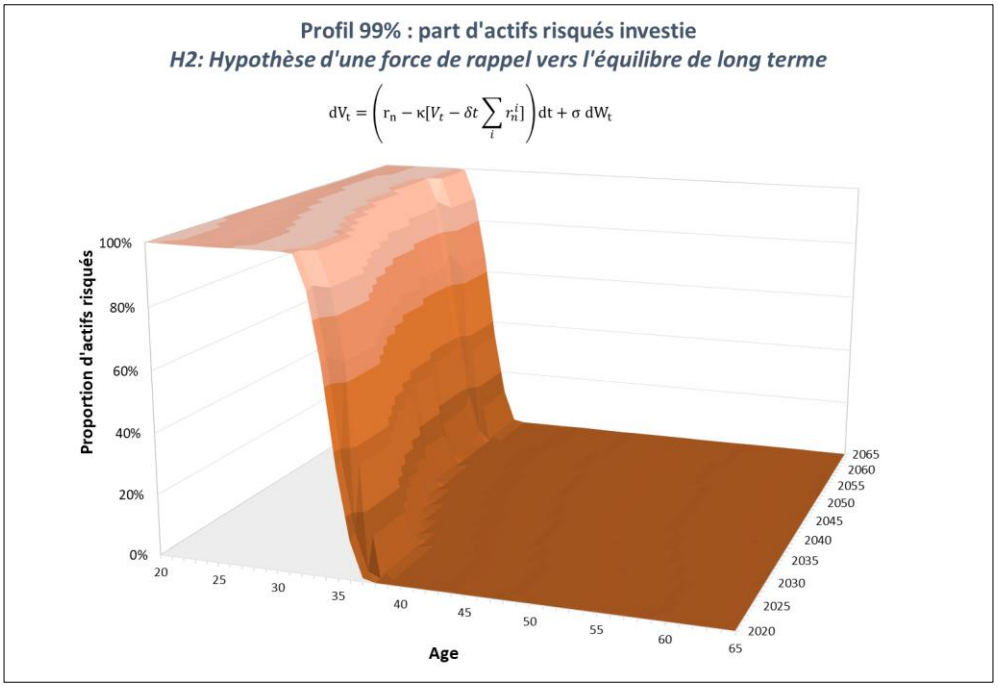
Graphique 9a : Profil 99% - Hypothèse H1, proportion d'actifs risqués



[24] A la condition expresse que l'effort de solidarité que consentent les générations en activité en faveur des retraités, trouvera sa contrepartie dans l'obligation faite aux générations futures d'actifs de réaliser un effort similaire.

Pour le même profil, dans l'hypothèse d'un retour des cours boursiers vers une tendance déterministe (hypothèse « H2 », graphique 9b), les jeunes actifs seraient conduits à détenir des portefeuilles investis 100% en actifs risqués pendant une durée d'une quinzaine d'années. Au-delà, c'est-à-dire environ 30 ans avant l'âge de départ à la retraite, l'arbitrage entre actifs risqués et actifs sans risque serait relativement brusque. Le résultat s'explique par des vitesses de réduction de la variance différentes selon les processus envisagés.

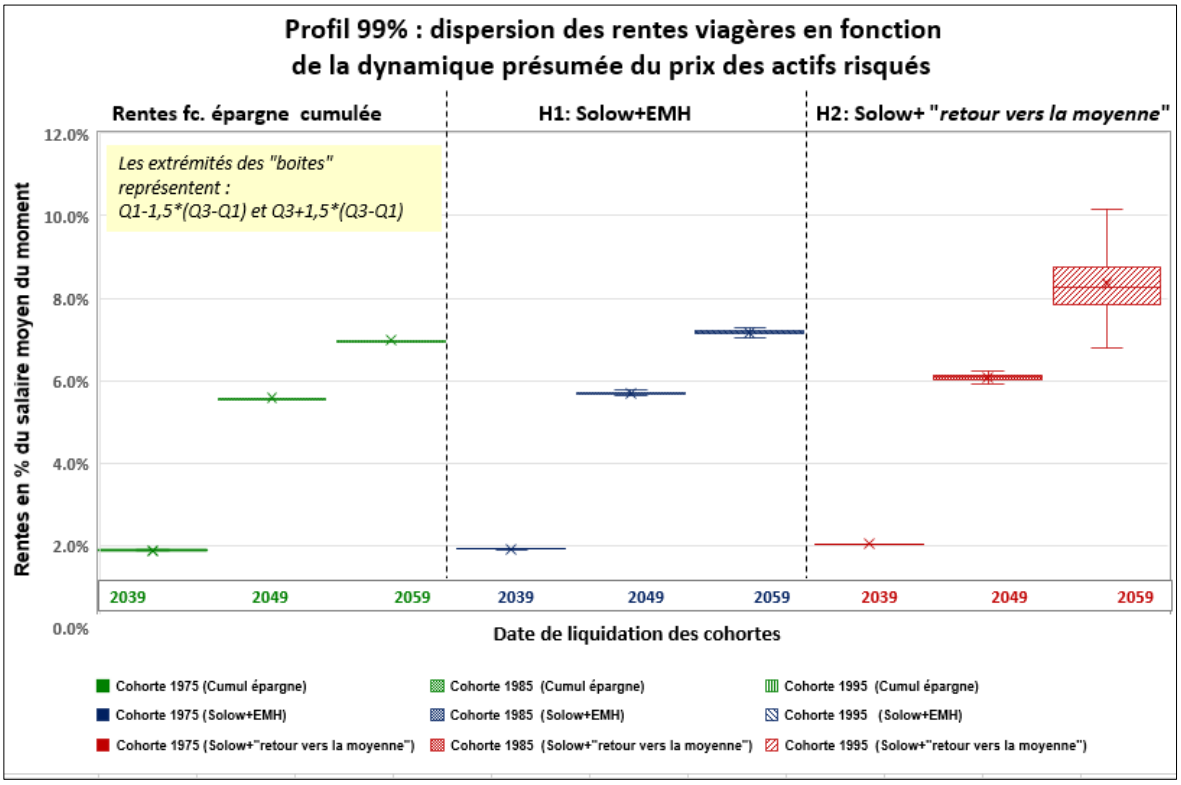
Graphique 9b : Profil 99% - Hypothèse H2, proportion d'actifs risqués



3.1.1. Rentes et taux de remplacement

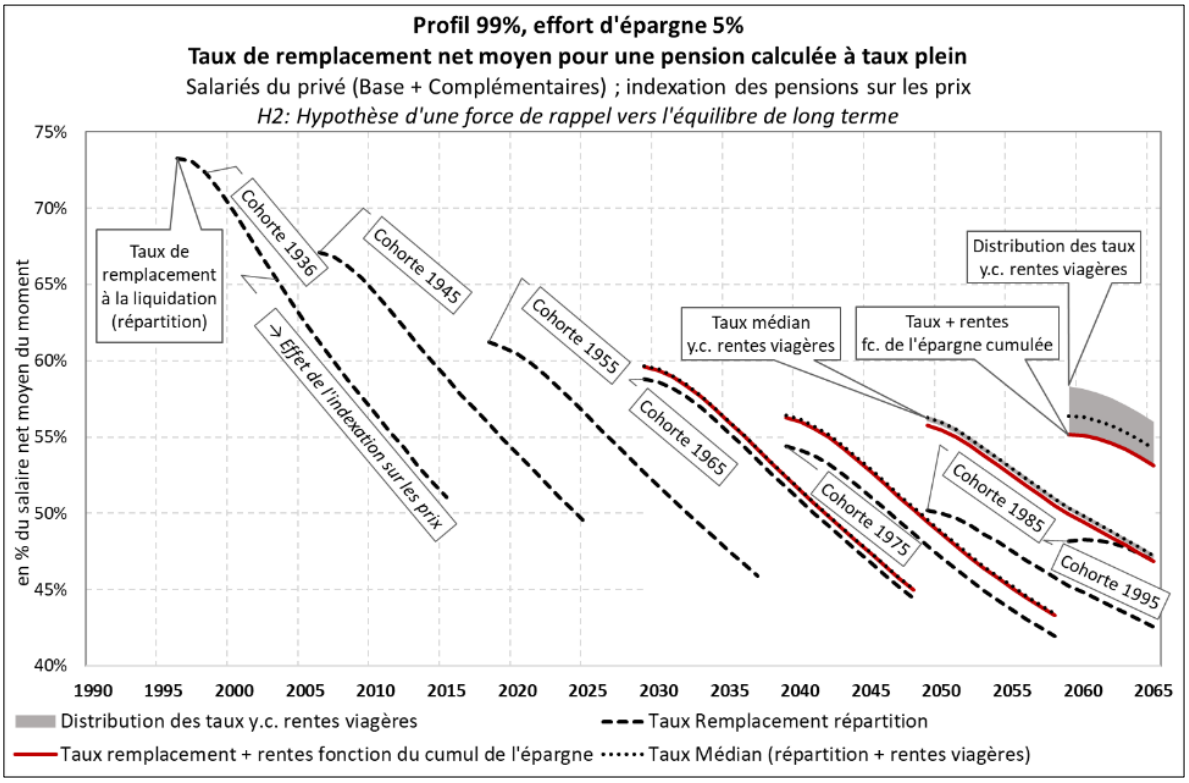
Dans le cas d'une distribution normale du logarithme des rendements, les rentes attribuées par le fonds de retraite − cf. équation (6.11) en annexe 2 − progresseraient et se stabiliseraient à un niveau proche de 7% du salaire moyen du moment pour les cohortes nées en 1995, qui seront les premières à avoir cotisé sur l'ensemble de leur période d'activité. Ce niveau est proche des rentes déduites du montant de l'épargne cumulée sur la base d'un rendement nul. Le rendement de cette première stratégie est donc relativement insignifiant en raison de la faible proportion d'actifs risqués dans les allocations stratégiques. La modélisation dans laquelle on simule une force de rappel, détermine naturellement des rentes plus élevées (le niveau médian des rentes dépasserait 8% du salaire net du moment en fin de projection) et conjointement plus dispersées (Graphique 10).

Graphique 10. Profil 99% effort d'épargne 5% : Dispersion des rentes moyennes (H+F)



Les rentes sont exprimées en pourcentage du salaire net du moment, soit le même dénominateur que les taux de remplacement. On peut donc, par simple addition, étudier l'impact du plan d'épargne retraite sur les niveaux de vie comparés des retraités et des actifs (Graphique 11). Il apparait qu'à partir des années 2050, les rentes issues de l'effort d'épargne permettraient d'enrayer la baisse des taux de remplacement des régimes par répartition. Par la suite, les taux de remplacement, effort d'épargne compris, progresseraient de plusieurs points au prix d'une plus grande dispersion.

Graphique 11. Profil 99% : Taux de remplacement moyens (H+F) y.c. effort d'épargne



3.1.2. Un bilan du « bien-être » des agents[25]

- L'hypothèse d'efficience des marchés

La comparaison des taux de rendement interne (TRI) du bilan retraite avec et sans effort d'épargne (Graphique 12) montre clairement que les générations qui participent au plan d'épargne, avec comme critère la préservation de 99% de la valeur du capital au terme (Profil 99%) sur un marché efficient (EMH), bénéficient de rendements inférieurs à ceux offert par l'édifice des régimes par répartition qui dépendent, toutes choses égales par ailleurs, des évolutions démographiques et des progrès de productivité. Compte tenu de la très faible proportion d'actifs risqués dans les allocations de cycle de vie des affiliés, la rentabilité des investissements est pratiquement nulle en termes réels (0,20% en moyenne sur la phase d'épargne). On en déduit que si les marchés sont efficients, la préservation de la valeur du capital accumulé ne peut être atteinte qu'au prix d'un rendement dérisoire, inférieur à celui de la répartition. Sous cette hypothèse, les marchés financiers ne seraient pas capables d'offrir le même couple « rendement – risque » que les régimes par répartition.

- La conjecture de retour des prix vers leur valeur fondamentale

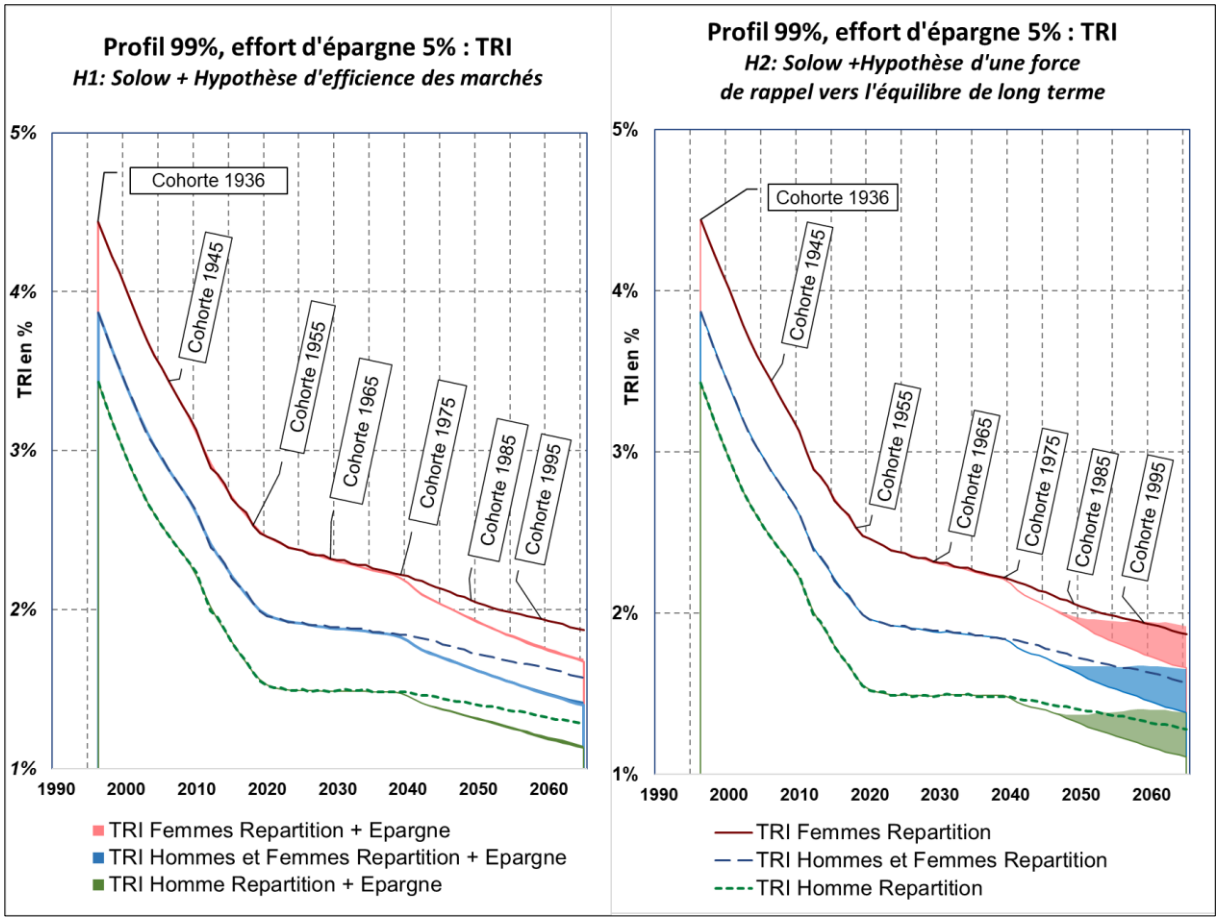
Dans le cas où il existerait une force de rappel dans la dynamique des prix[26], les conclusions sont plus contrastées. On note une nette amélioration des TRI des cohortes relativement à l'hypothèse d'EMH. La prise en compte des rentes issues du plan d'épargne contribuerait toutefois à une

[25] Les paramètres du calcul des TRI sont détaillés en annexe 5.

[26] Dans ce cas la dynamique des cours est simulée par un «*Time-dependent Ornstein-Uhlenbeck Process* » décrit en annexe 3.

dégradation du rendement actuariel de l'opération retraite pour les femmes, tandis que pour les hommes les TRI des régimes de retraite seraient proches des TRI médians incluant les rentes issues de l'effort d'épargne. Du fait de la plus grande proportion de femmes au sein des retraités, la rentabilité moyenne se détériorerait légèrement. En résumé, dans l'hypothèse « H2 », le rendement actuariel du plan d'épargne pourrait concurrencer celui de la répartition dans le cas des pensions de droit direct calculées à taux plein.

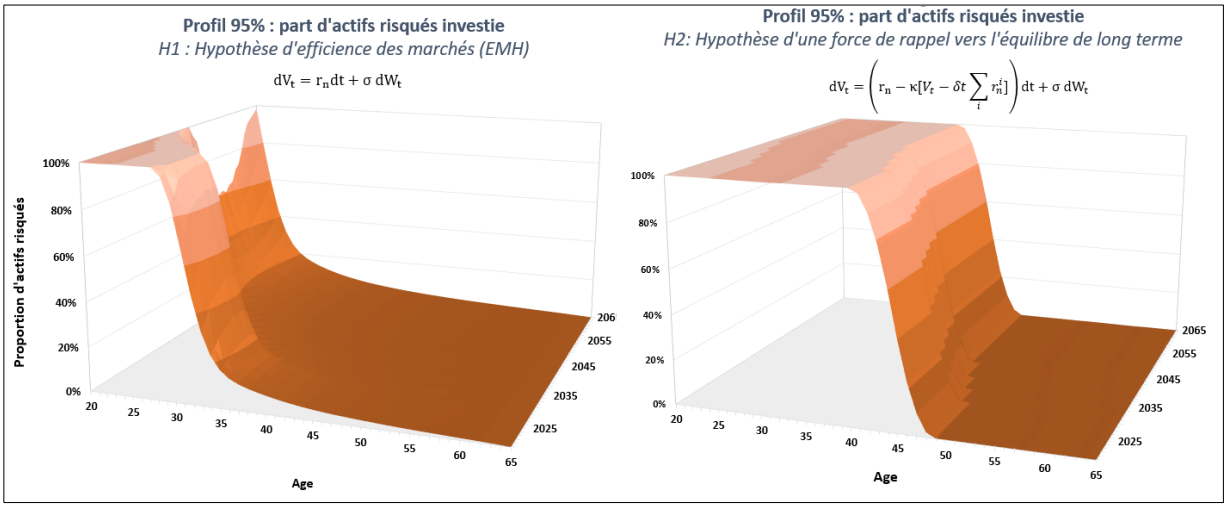
Graphique 12. TRI moyens des cohortes : EMH *vs.* **Retour vers la moyenne**



3.2. Le cas d'un Profil 95%

Les conséquences d'une prise de risque accrue sont évoquées dans le présent paragraphe au travers de l'étude d'un Profils 95%. Ce dernier cas type sélectionne une succession d'allocations structurelles d'actifs avec pour objectif la préservation du capital investi dans le plan d'épargne dans 95% des cas. L'acceptation d'une perte en capital plus significative se traduit par des allocations plus riches en actifs risqués (Graphique 13) et débouche mécaniquement sur des compléments de retraite médians plus importants. La stratégie conduit toutefois à des rentes viagères plus dispersées en raison de l'augmentation de la volatilité des placements.

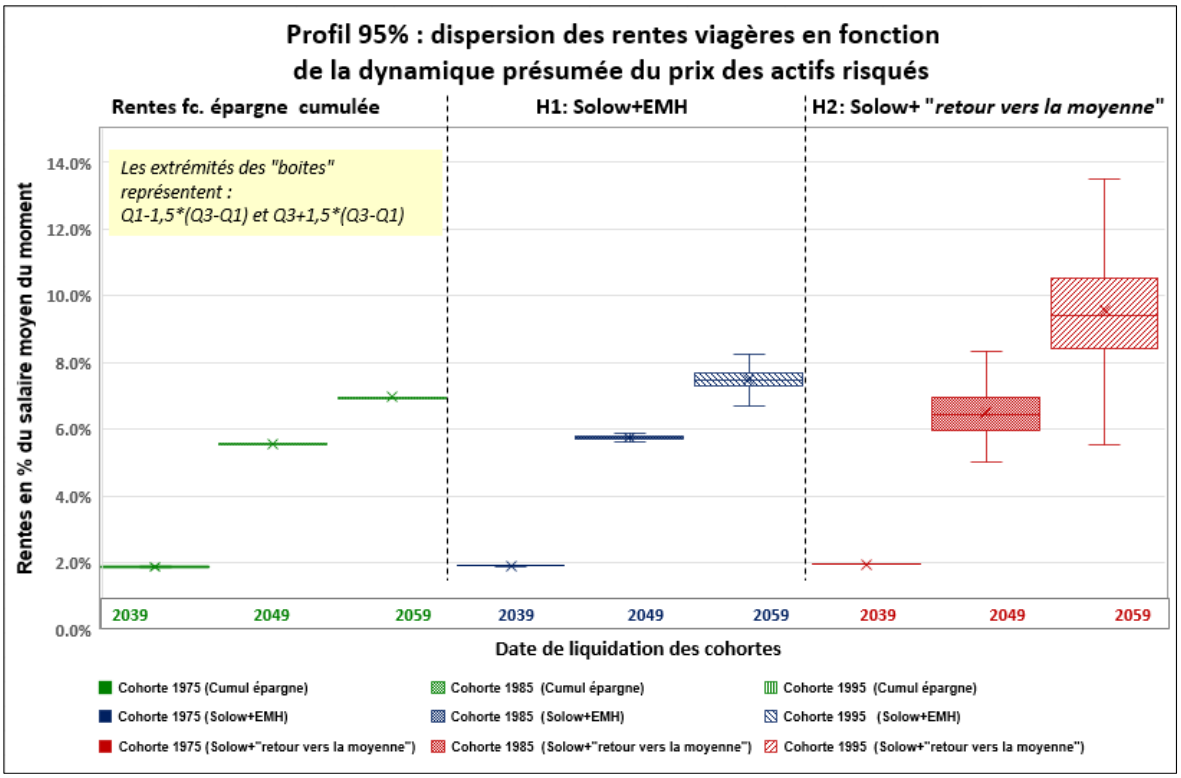
Graphique 13 : Profil 95% - Proportion d'actifs risqués



3.2.1. Rentes et taux de remplacement

Le graphique 14, qui compare les rentes en fonction des dynamiques présumées des actifs à celles calculées à partir de l'épargne cumulée sur la base d'un rendement nul, montre que l'attribution de rentes élevées est couplée à un risque de pertes (dans 5% des cas par construction) d'autant plus perceptible que la stratégie est riche en actifs risqués. Les stratégies les plus risquées sont cependant caractérisées par des rentes médianes plus élevées.

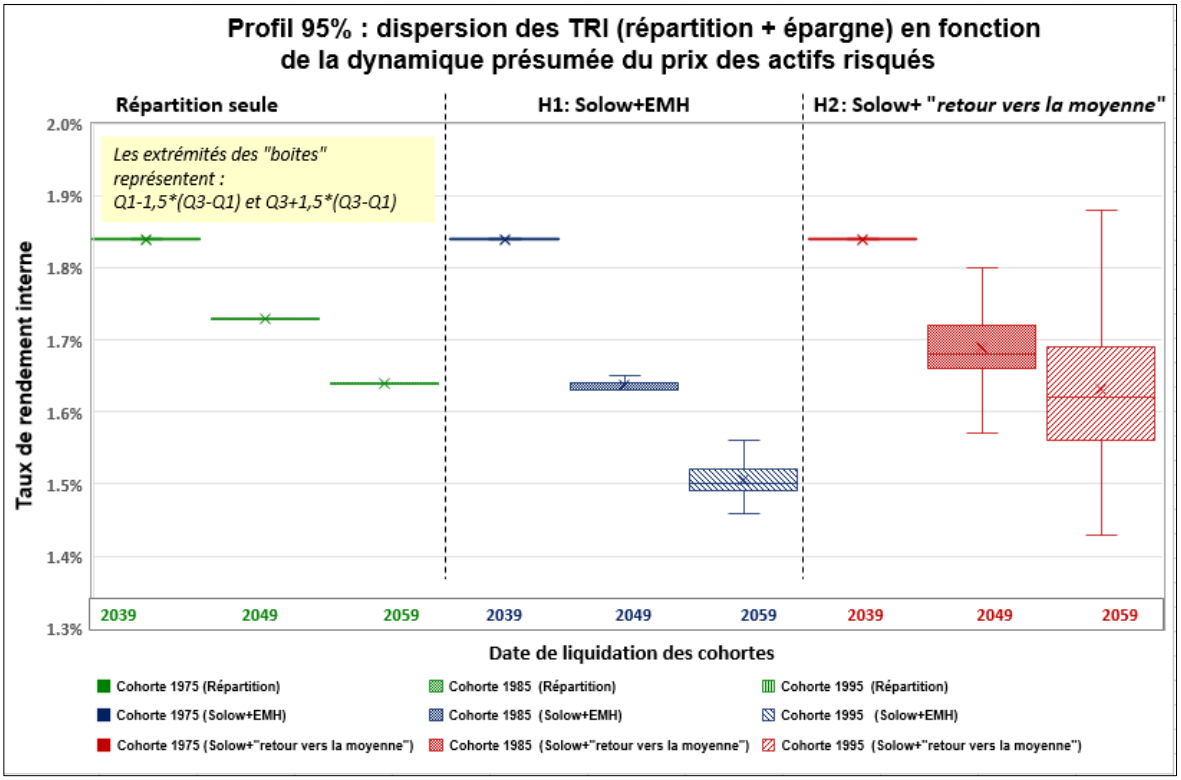
Graphique 14. Profil 95% effort d'épargne 5% : Dispersion des rentes moyennes (H+F)



3.2.2. Un bilan du « bien-être » des agents

Nous l'avons souligné, les cas types caractérisés par un « Profil 95% » investissent assez massivement en actifs risqués. Naturellement leur poids est prépondérant dans l'hypothèse de retour vers la moyenne. En dépit d'allocations structurelles enrichies en actions, les TRI continueraient à se dégrader en raison de la baisse continue du rendement implicite des régimes par répartition (Graphique 15).

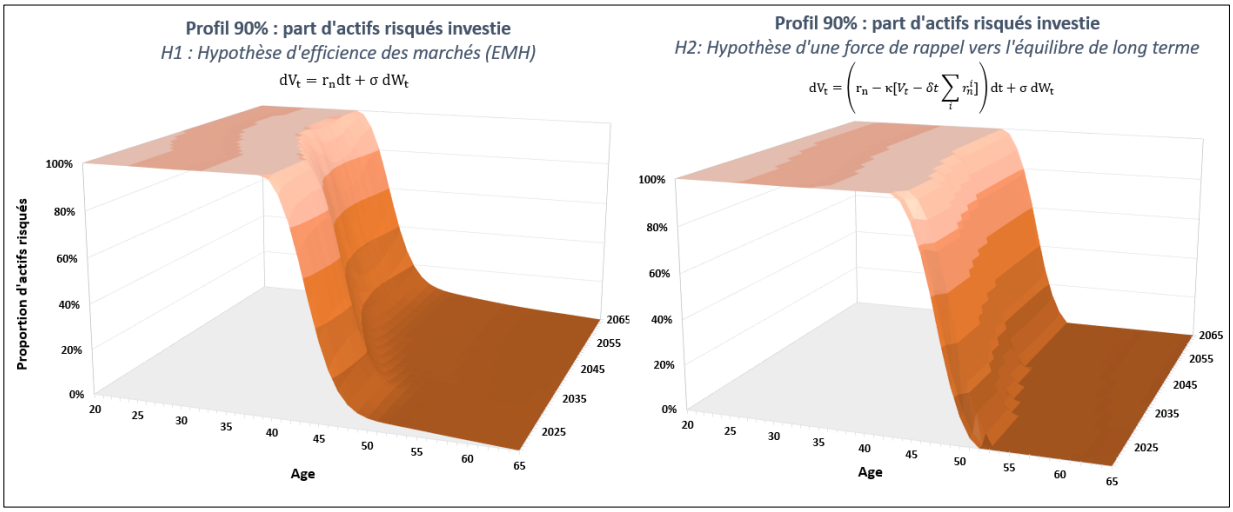
Graphique 15. Profil 95% effort d'épargne 5% : TRI moyens (H+F) en fc de la dynamique des prix



3.3. Le cas d'un Profil 90%

Les cas types caractérisés par un « Profil 90% » sont clairement risquophiles. Quelque-soit l'hypothèse faite sur le processus qui régit la dynamique des prix des actifs risqués, on constate que ce niveau de préservation du capital conduit à des allocations structurelles d'actifs largement adossées à des supports risqués : jusqu'en milieu de vie active dans l'hypothèse d'efficience des marchés, largement au-delà dans l'hypothèse alternative (Graphique 16).

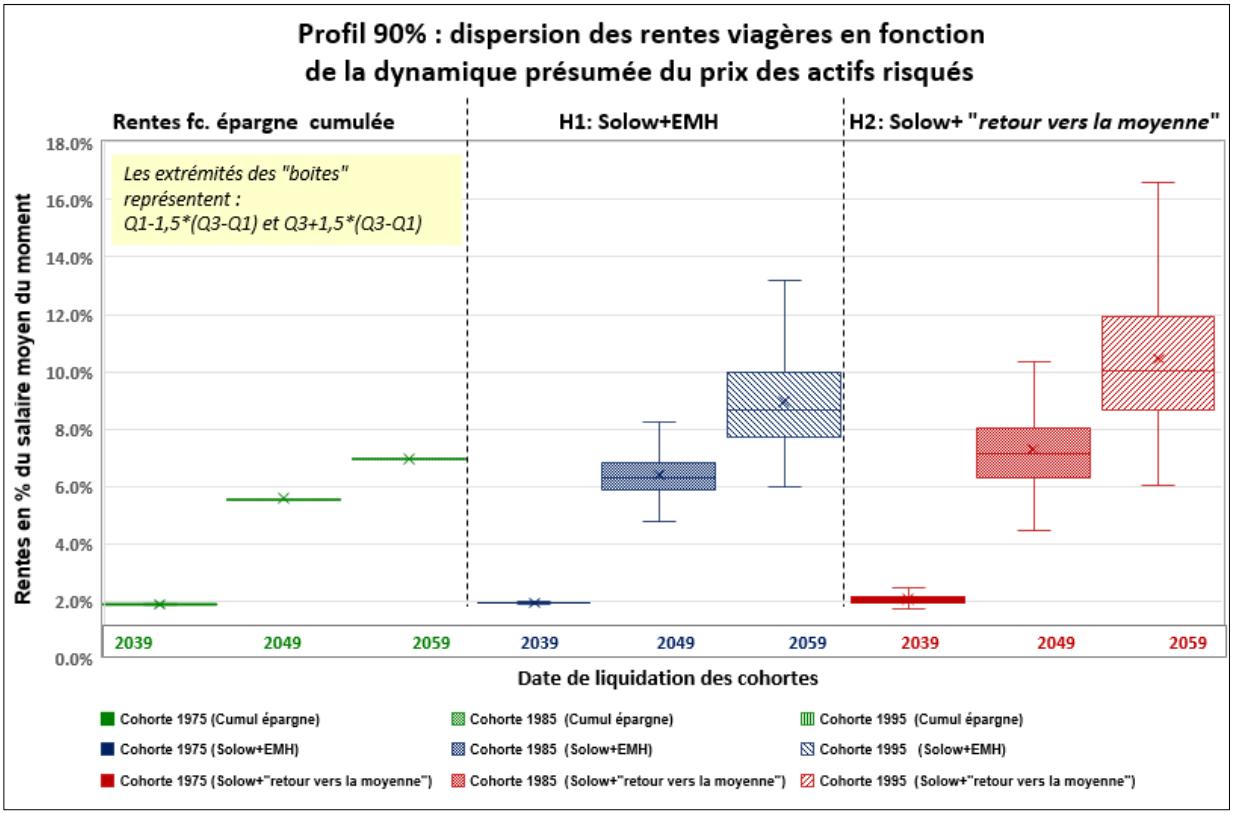
Graphique 16 : Profil 90% - Proportion d'actifs risqués



3.3.1. Rentes et taux de remplacement

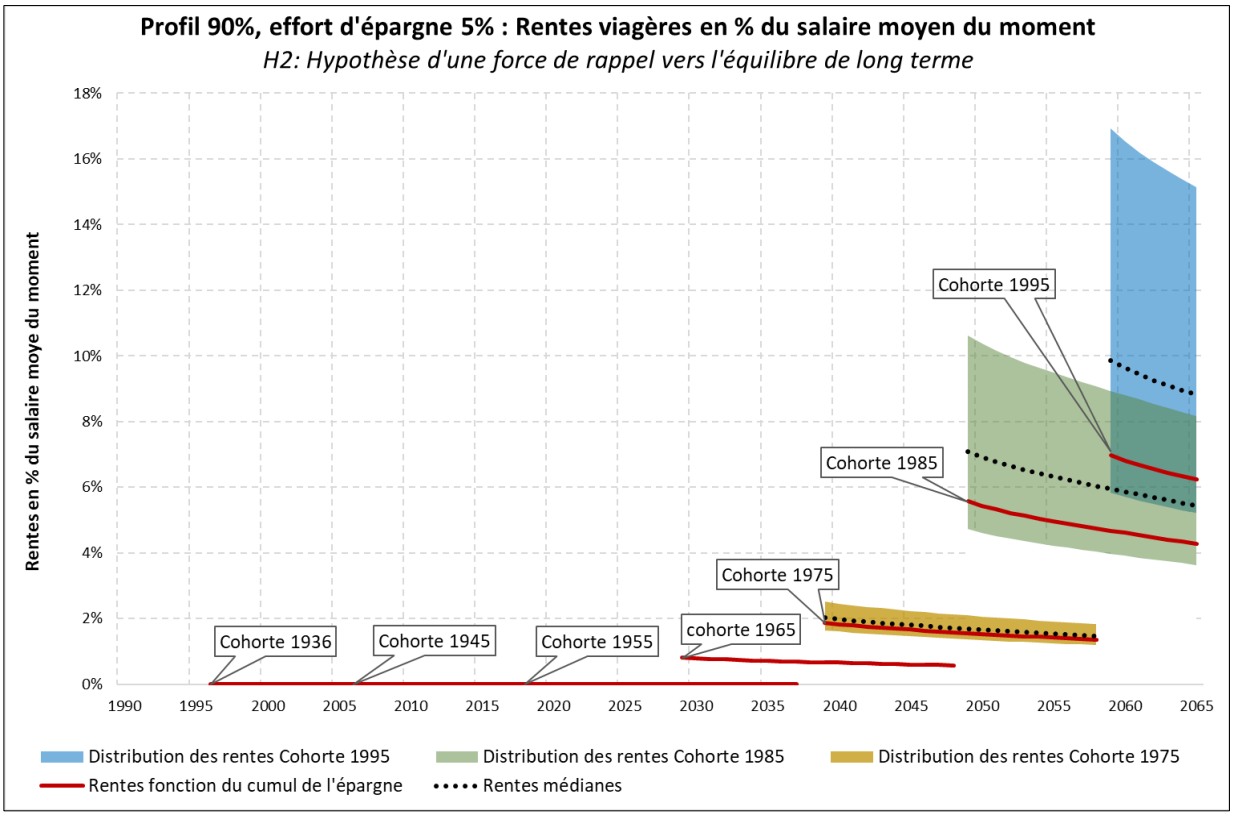
La nature des allocations de cycle de vie du Profil 90% détermine des rentes viagères plus élevées que dans les autres scénarios. Le graphique 17, qui compare les rentes délivrées par le fonds à celles calculées à partir de l'épargne cumulée sur la base d'un rendement nul (cartouche de gauche), montre que l'attribution de rentes élevées est associée à un risque de pertes plus fréquent. Par construction, cette stratégie conduirait dans 10% des cas à des rentes inférieures d'environ 1 point aux rentes calculées sur la base d'un rendement nul, soit un risque somme toute, limité.

Graphique 17. Profil 90%, effort d'épargne 5% : Dispersion des rentes moyennes (H+F)



On constate clairement les effets de l'accroissement de la volatilité lorsque l'on analyse la superposition des rentes délivrées par le fonds d'épargne dans l'hypothèse d'un retour des prix vers leur valeur d'équilibre. Les cohortes les plus jeunes accéderaient naturellement à des rentes médianes plus élevées, toutefois on remarque sur le graphique 18 que presque 30% des rentes attribuées à la « cohorte 1995 » seraient comprises dans l'intervalle de confiance calculé pour les rentes de la « cohorte 1985 ».

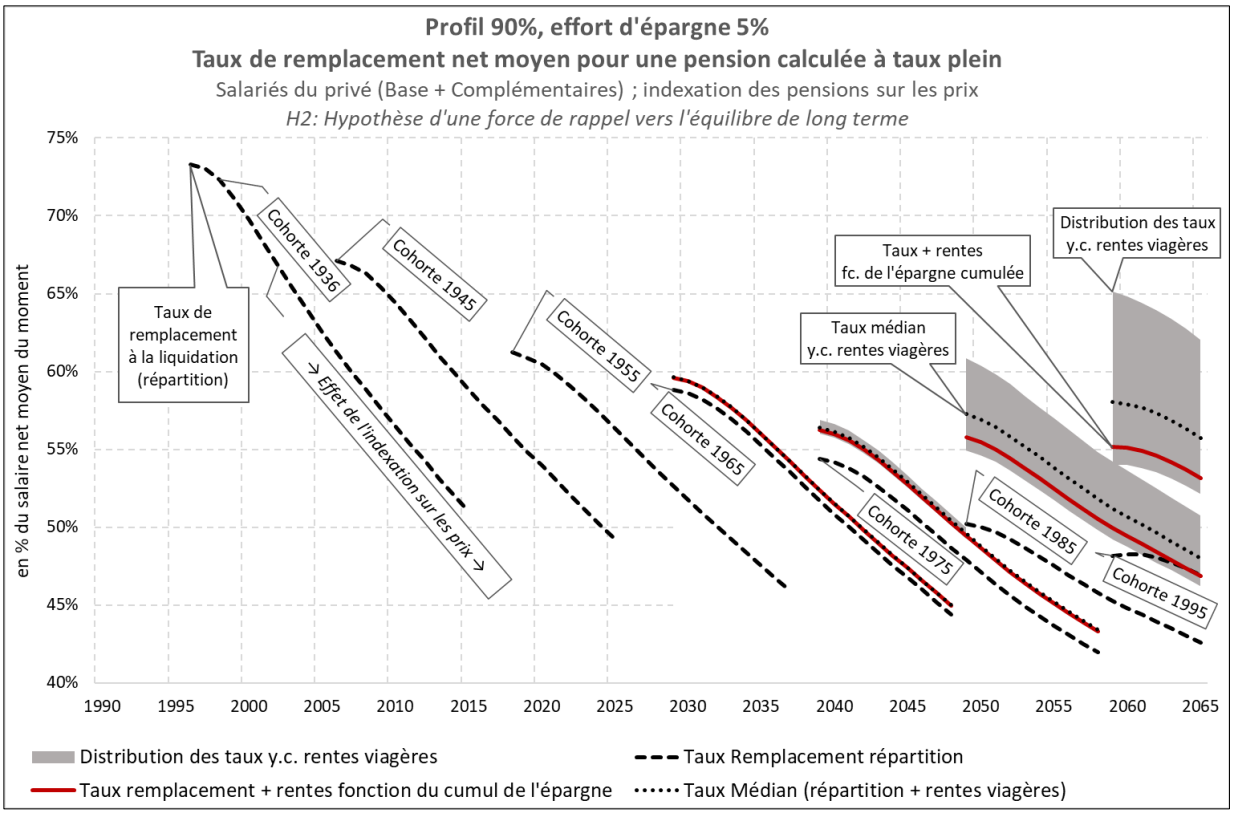
Graphique 18. Profil 90% : Dispersion des rentes moyennes (H+F), hypothèse d'une force de rappel



Toujours dans le cas de l'hypothèse « H2 » d'un retour des cours boursiers vers une tendance déterministe, on peut représenter l'évolution des taux de remplacement avec et sans effort d'épargne. On constate que l'effort d'épargne des cohortes nées après 1985 conduirait à une nette amélioration des taux de remplacement. Le gain entre le « taux médian » (déduit des pensions servies par les régimes obligatoires et des rentes viagères du plan d'épargne) et le « taux de la répartition » seule serait de presque 10 points pour la cohortes 1995.

Les pertes, correspondent aux aires grises inférieures au cumul des taux de la répartition et des rentes calculées à partir de l'épargne cumulée sur la base d'un rendement nul. Cette frontière est symbolisée par un trait rouge sur le graphique 19. Le recherche de placement à fort rendement expose donc les épargnants à des pertes. Le calcul détermine cependant des pertes soutenables en dépit de leur fréquence.

Graphique 19. Profil 90% : Taux de remplacement moyens (H+F) y.c. effort d'épargne



Synthèse des simulations : l'hypothèse d'un effort d'épargne de 3 %

Les simulations envisagent les mêmes cas types que précédemment à cela près que l'on suppose que l'effort d'épargne est réduit à 3%. Pour certains indicateurs les résultats sont proches. Par conséquent, afin d'éviter les répétitions, seuls les paramètres notablement impactés par la réduction de l'effort d'épargne sont commentés dans cette partie.

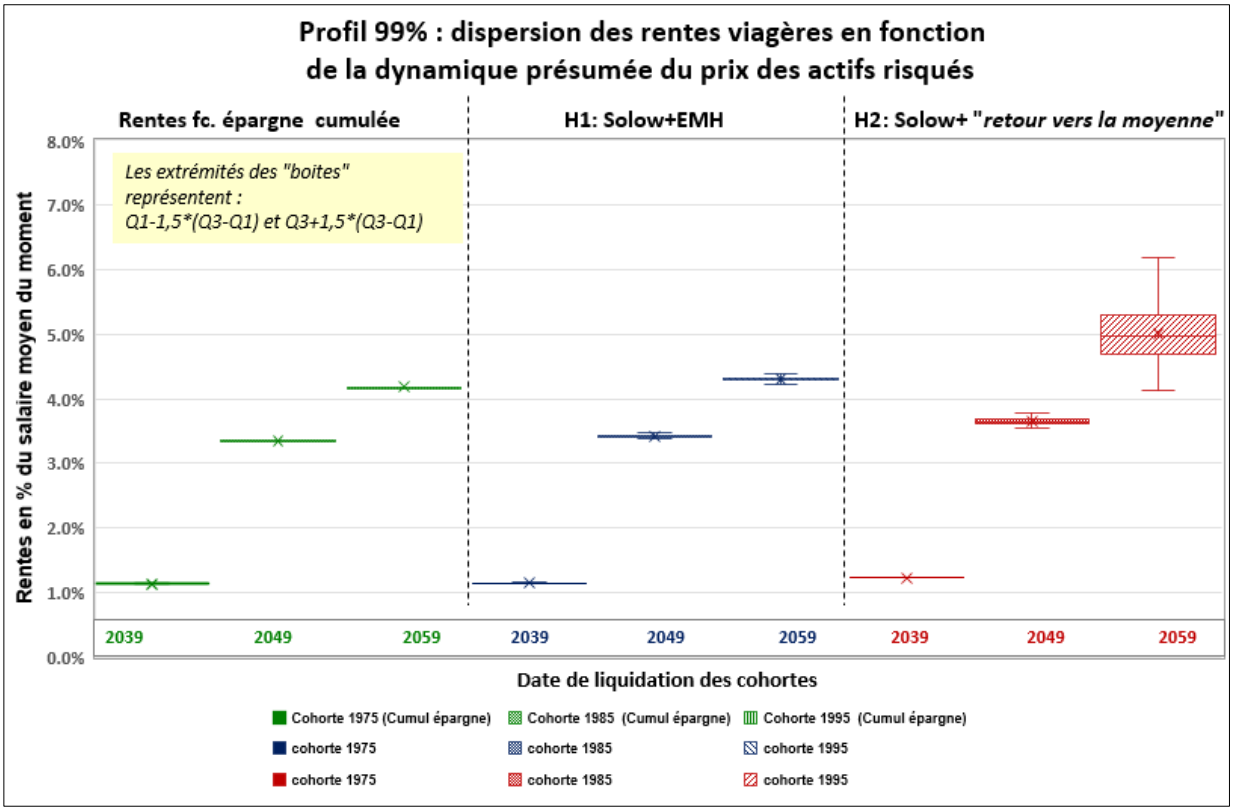
4.1. Le cas d'un Profil 99%

Dans ce cas de figure, la proportion d'actifs risqués et les taux de rendement internes sont proches de ceux déterminés dans l'hypothèse d'un effort d'épargne de 5%. Pour cette raison notre analyse est focalisée sur les rentes et les taux de remplacement.

4.1.1. Rentes et taux de remplacement

Comme attendu dans l'hypothèse d'efficience des marchés, les rentes seraient proches de celles calculées à partir des flux d'épargne accumulés sur la base d'un rendement nul. Dans l'hypothèse de « retour vers la moyenne » du prix des actions, les rentes médianes seraient supérieures d'environ 1 point par rapport à celles déterminées à partir de la simple accumulation de l'épargne. Seuls les cohortes jeunes (en l'occurrence nées en 1995) bénéficieraient de ce surcroit de rentabilité (Graphique 20).

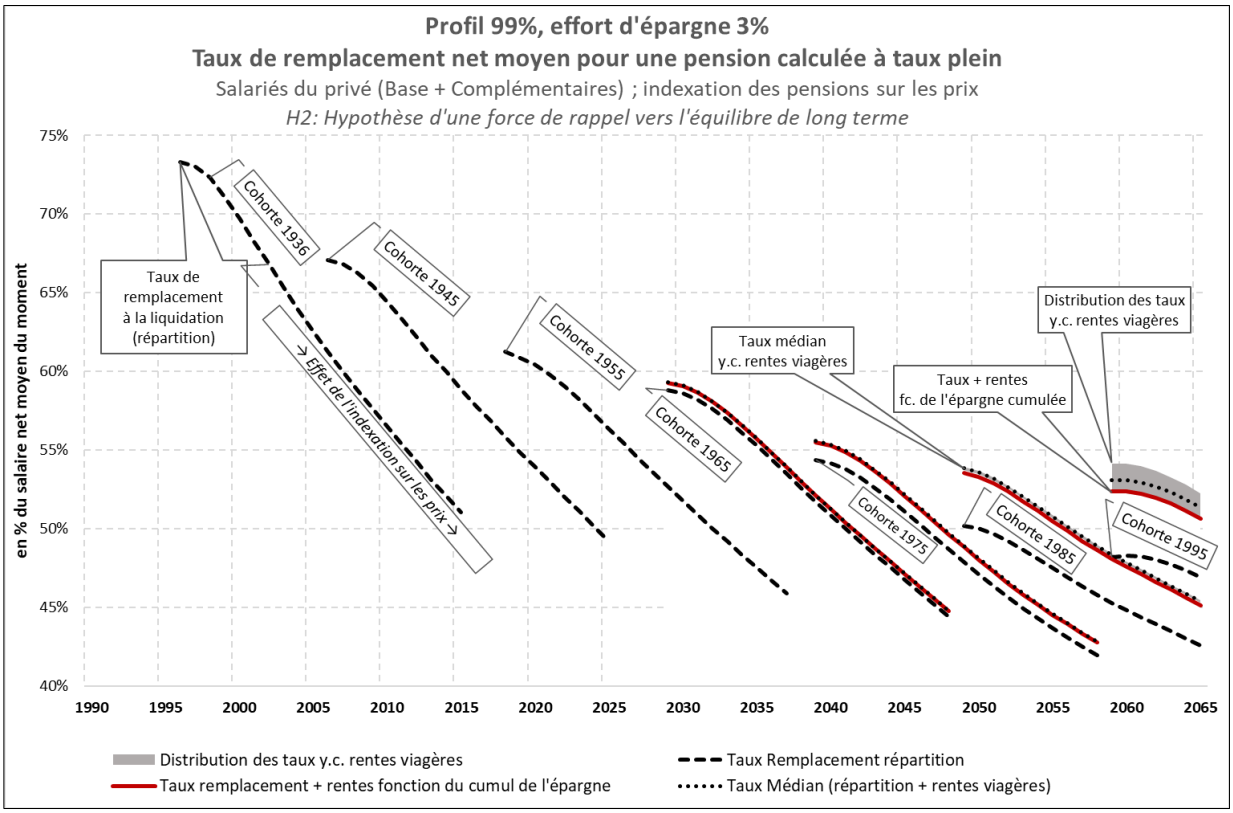
Graphique 20. Profil 99%, effort d'épargne 3% : Dispersion des rentes moyennes (H+F)



Les taux de remplacement nets moyens (Hommes et Femmes) pour la cohorte 1995, qui prendra sa retraite à partir de 2059, s'établiraient entre 52% et 54% du salaire net moyen du moment

(Graphique 21). A ce même horizon – à législation inchangée et compte tenu de notre calibrage – le taux de remplacement d'équilibre de la répartition serait inférieur à 50%.

Graphique 21. Profil 99% : Taux de remplacement y.c. effort d'épargne



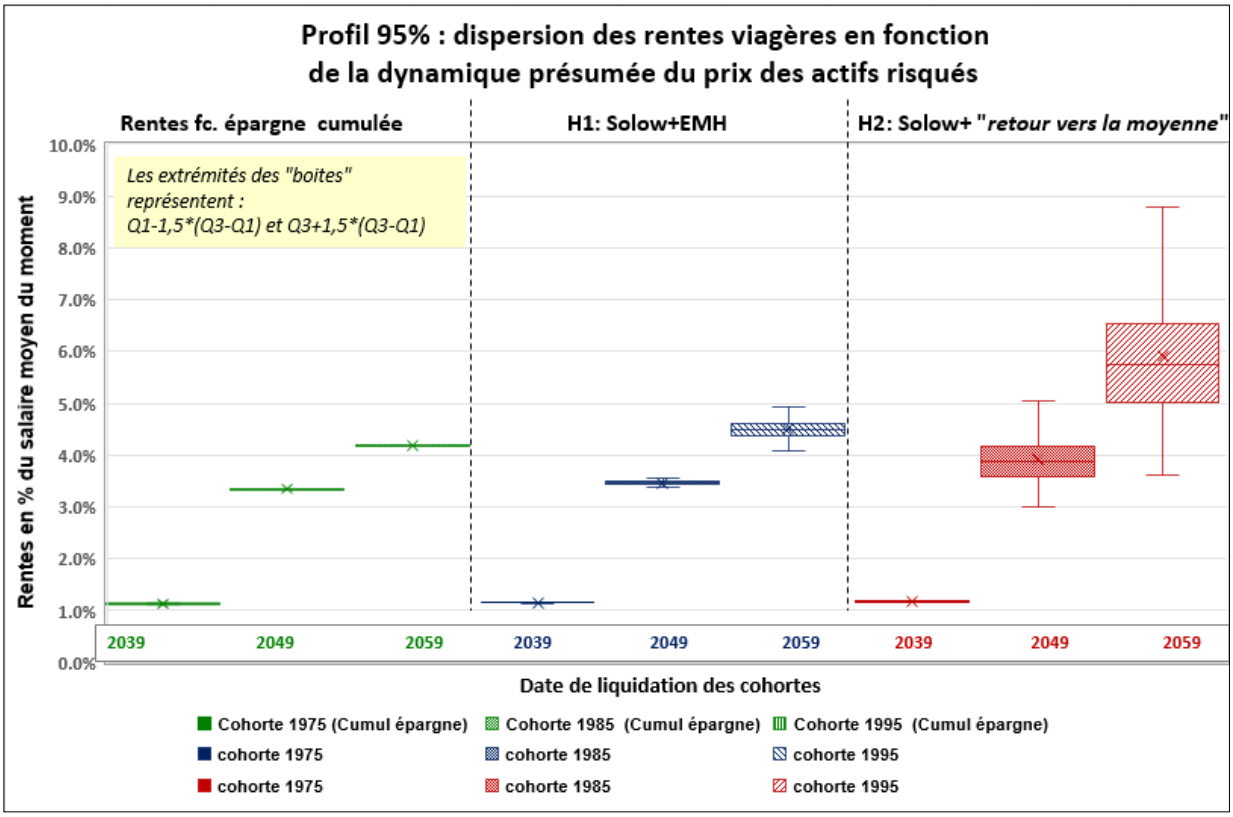
4.2. Le cas d'un Profil 95%

La plus grande exposition aux placements risqués à une répercussion mécanique sur le niveau des rentes. Ici encore, les graphiques sur l'évolution de la structure des allocations des différentes générations au cours du temps ne sont pas restitués en raison de leur trop grande proximité avec ceux déjà restitués dans l'hypothèse d'un abondement équivalent à 5% des salaires bruts.

4.2.1. Rentes et taux de remplacement

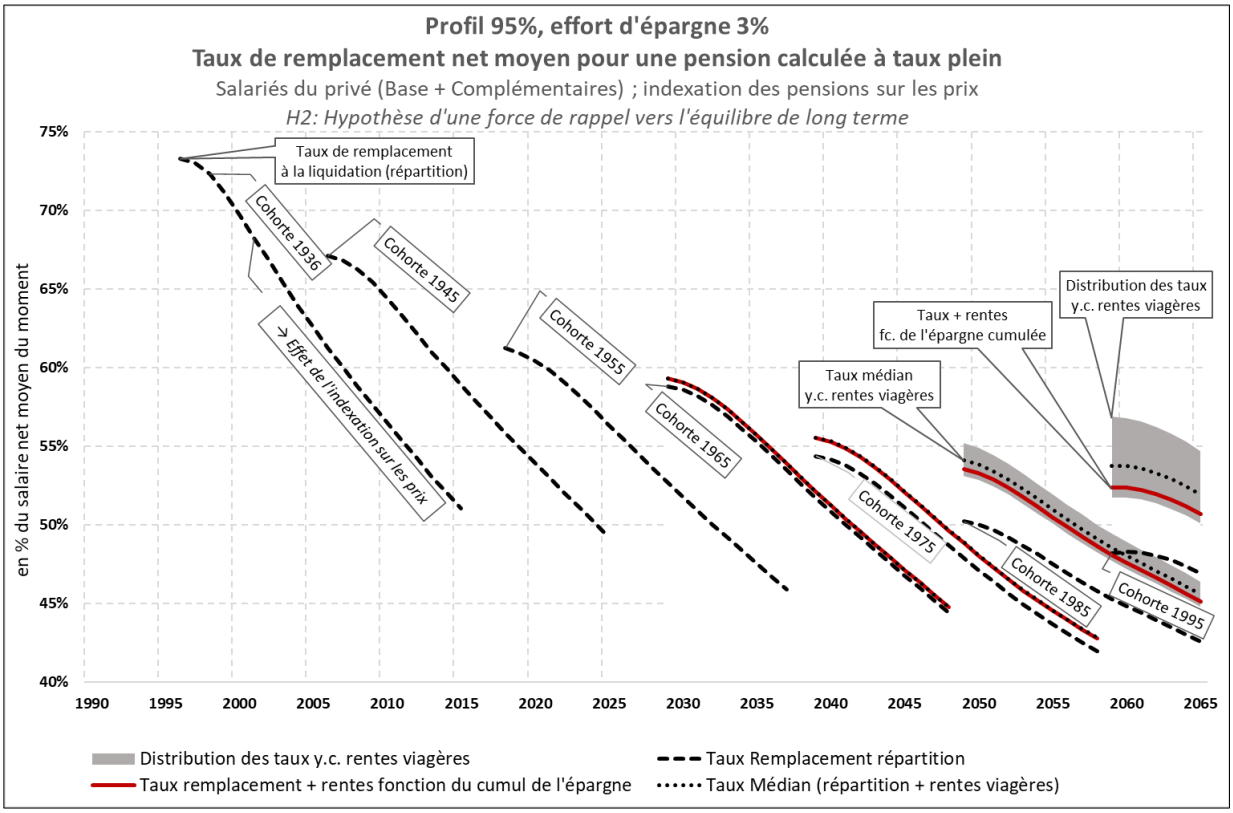
Dans l'hypothèse « H1 » d'efficience des marchés les résultats restent assez proches de ceux décrits pour un Profil 99%. En revanche dans l'hypothèse « H2 », qui détermine une structure d'allocations de cycle de vie plus riche en actifs risqués, les rentes progresseraient (Graphique 22). La rente médiane calculée pour la cohorte 1995 serait de 5.8% tandis que les rentes minimum et maximum s'établiraient à respectivement 3.6% et 8.7%.

Graphique 22. Profil 95%, effort d'épargne 3% : Dispersion des rentes moyennes (H+F)



La prise de risque accrue associée au Profil 95% aurait un impact notable sur les taux de remplacement y compris effort d'épargne (Graphique 23). Les taux de remplacement les plus favorables pour la cohorte 1995 s'établiraient à 57% du salaire du moment tandis que le taux médian serait proche de 54%. On note l'apparition d'une très légère perte dans 5% des cas. Cette dernière serait cependant extrêmement faible puisque l'écart entre le taux minimum et le taux calculé en déduisant les rentes de l'épargne cumulée sur la base d'un taux nul serait de l'ordre de 0.6 point.

Graphique 23. Profil 95% : Taux de remplacement moyens (H+F) y.c. effort d'épargne



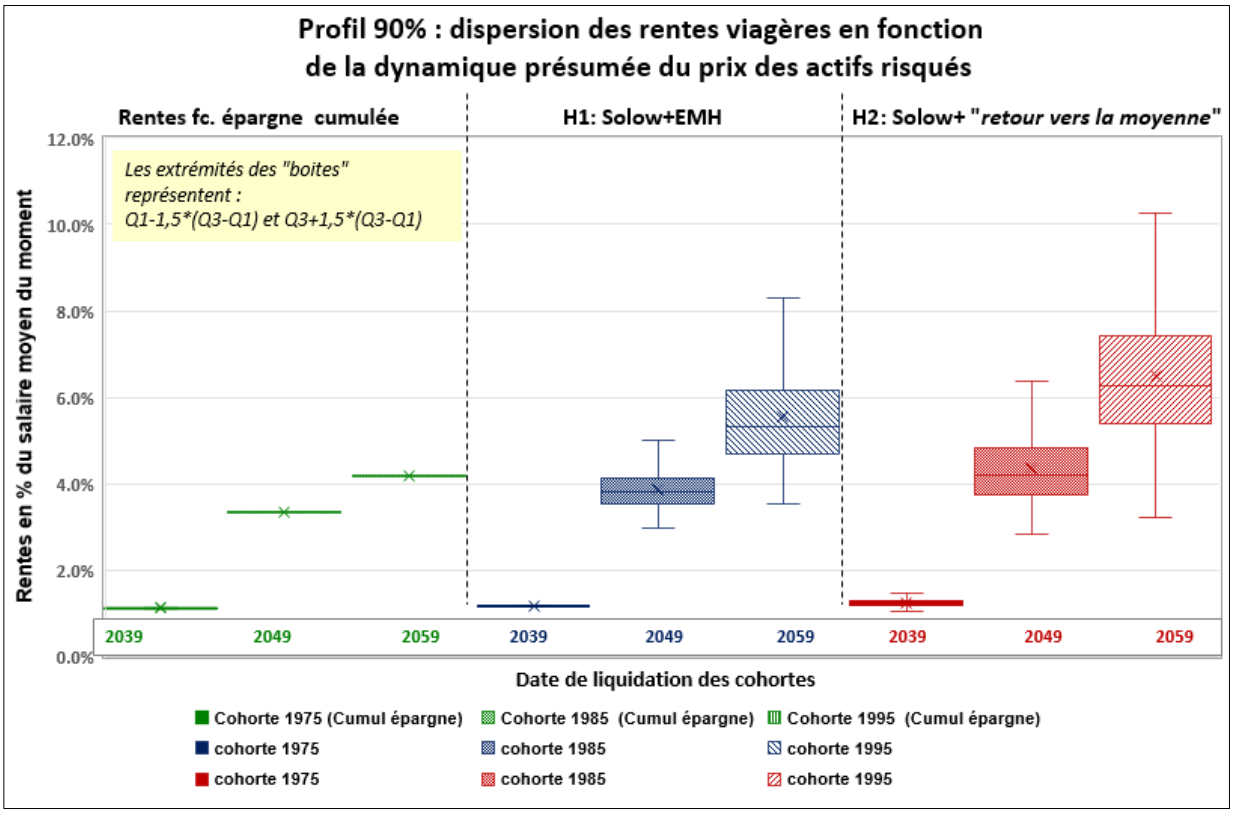
4.3. Le cas d'un Profil 90%

Ce dernier cas est intéressant car il se traduit par l'amorce d'une remontée des taux de rendement interne de « l'opération retraite » qui tiennent compte des transferts instantanés et de l'effort d'épargne. Les taux sont certes plus dispersés que les taux implicites de la répartition – ce qui a une incidence négative sur le « bien-être » des agents – en revanche les taux médians prennent le pas sur ceux, implicites, de la répartition. Compte tenu du poids prépondérant des cotisation retraite relativement à l'effort d'épargne le phénomène traduit un surcroit de rendement des placements capitalisés.

4.3.1. Rentes et taux de remplacement

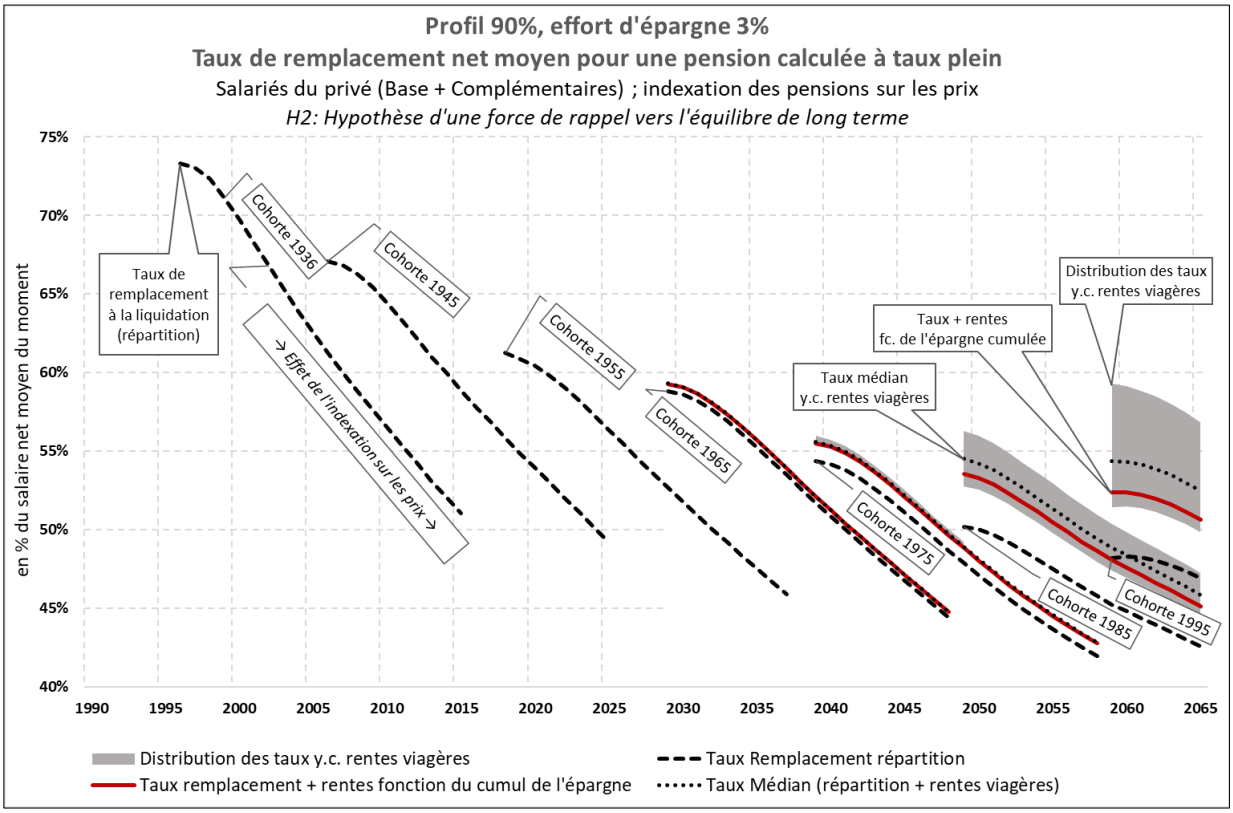
L'hypothèse qui envisage le cas d'un Profil 90% dont l'effort d'épargne serait de 3% de son salaire brut se traduit pas une amélioration des rentes viagères relativement à celles déduites du cumul de l'épargne capitalisée sur la base d'un rendement nul. L'écart serait perceptible dès la génération 1985. L'élévation des rentes médianes s'accompagne logiquement d'une plus grande dispersion de celles-ci. Dans un contexte d'efficience des marchés (H1) − si l'on fait abstraction des queues de distribution − l'éventail des rentes représenterait entre 3.3% et 8.5% du salaire net du moment pour la cohorte la plus jeune (1995), tandis que la rente médiane est estimée à 5.5% (Graphique 24). Les rentes calculées pour l'hypothèse H2 « dominent » celles déterminées dans le cadre de l'EMH. Pour les cas types liquidant leur retraite à l'orée de en 2060, le registre s'élargit et les rentes iraient de 3.2% à plus de 10% avec une médiane à 6.2% alors que la rente issue de l'épargne cumulée ressort à 4.2%

Graphique 24. Profil 90%, effort d'épargne 3% : Dispersion des rentes moyennes (H+F)



S'agissant des taux de remplacement, toujours pour la cohorte 1995 et dans l'hypothèse H2, la fourchette des taux de remplacement s'étendrait de 51% à 59% avec un taux médian de 54%, soit un gain de 6 points par rapport au taux de remplacement de la répartition (Graphique 25). Rappelons qu'à profil identique dans l'hypothèse d'un effort d'épargne de 5%, la dispersion des taux de remplacement était comprise entre 54% et 65%. Il existe donc une zone de chevauchement entre les intervalles de confiance des taux de remplacement en dépit d'un effort d'épargne significativement différent. Au-delà de l'effet de la volatilité sur la distribution des rentes, le phénomène s'explique pour partie par la moindre baisse de la productivité du capital dans l'hypothèse d'un abondement plus faible (Graphique 5b).

Graphique 25. Profil 90% : Taux de remplacement y.c. effort d'épargne

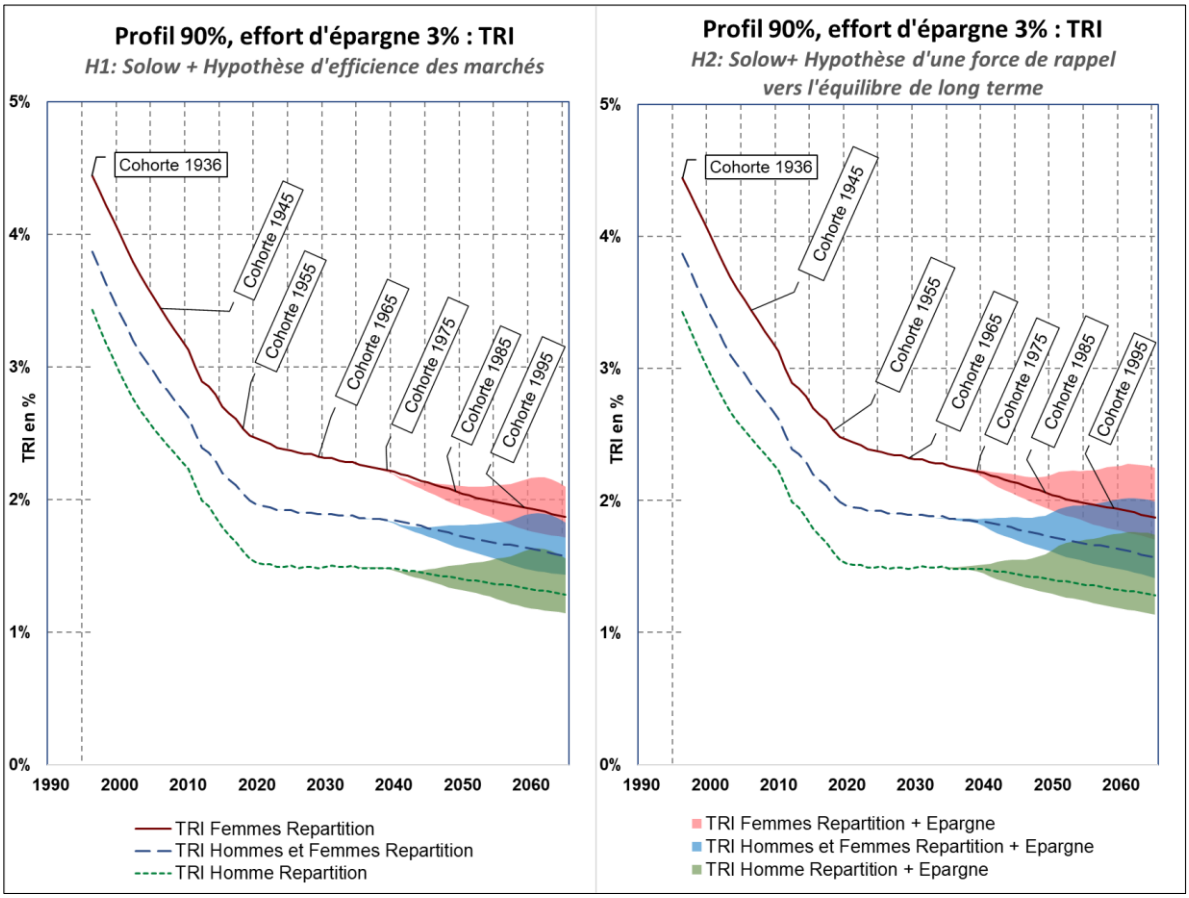


4.3.2. Un bilan du « bien-être » des agents

Comme mentionné en tête de paragraphe, les taux de rendement interne amorceraient un redressement. La dynamique est plus marquée dans l'hypothèse H2 qui détermine des allocations structurelles plus riches en actifs risqués (Graphique 26).

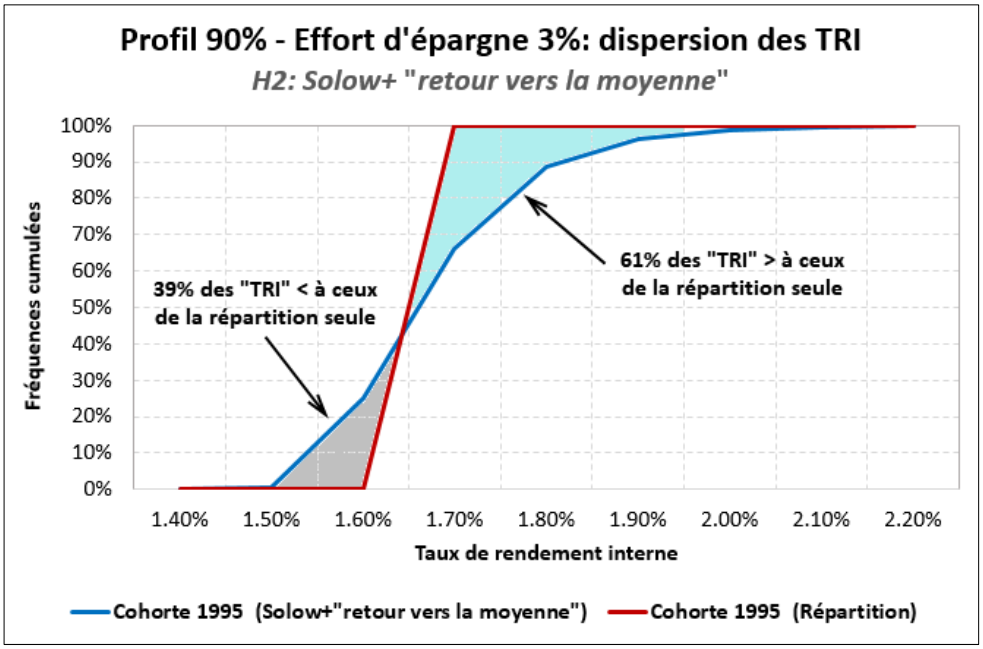
L'interprétation de ce mouvement est assez équivoque. En effet, une remontée des « TRI » peut s'interpréter comme une amélioration de l'utilité ou du « bien-être » que les agents. Par contre l'augmentation de leur dispersion contribue à la dégradation de ce même « bien-être ».

Graphique 26. TRI moyens des cohortes : EMH *vs.* Retour vers la moyenne



Pour tenter de sortir de l'ambiguïté, on peut évaluer dans quelle mesure les TRI tenant compte des pensions des régimes et de l'effort d'épargne « dominent » ceux calculés pour la seule répartition.

Graphique 27. Cohorte 1995 : Dispersion des « TRI » moyens



L’exercice est conduit pour la cohorte 1995 dans le cas de l’hypothèse H2. On constate sur le graphique 27 des fréquences cumulées ci-dessus, que 61% des TRI déterminés en intégrant les revenus de la répartition et de l’épargne sont supérieurs aux TRI implicites de la répartition. On peut donc conclure avec circonspection que la capitalisation améliorerait l’utilité de la majorité des épargnants.

Tableaux des résultats

5.1. Effort d'épargne 5% : valeurs moyennes (H+F) pour quelques cohortes

L'hypothèse d'efficience des marchés (H1) – 5%

	Rentes viagères - EMH			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% rentes maximum	0.8%	1.9%	5.7%	7.3%
Profil 99% rentes médianes	0.8%	1.9%	5.7%	7.2%
Profil 99% rentes minimum	0.8%	1.9%	5.6%	7.0%
Profil 95% rentes maximum	0.8%	1.9%	5.9%	8.2%
Profil 95% rentes médianes	0.8%	1.9%	5.7%	7.4%
Profil 95% rentes minimum	0.8%	1.9%	5.6%	6.8%
Profil 90% rentes maximum	0.8%	2.0%	8.2%	14.3%
Profil 90% rentes médianes	0.8%	1.9%	6.3%	8.6%
Profil 90% rentes minimum	0.8%	1.9%	5.0%	6.0%
Rentes fc. du cumul de l'épargne	0.8%	1.9%	5.6%	7.0%
	Taux de remp. + Rentes viagères -EMH			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% Taux maximum	59.6%	56.3%	55.9%	55.4%
Profil 99% Taux médians	59.6%	56.3%	55.9%	55.3%
Profil 99% Taux minimum	59.6%	56.3%	55.8%	55.2%
Profil 95% Taux maximum	59.6%	56.3%	56.1%	56.4%
Profil 95% Taux médians	59.6%	56.3%	55.9%	55.6%
Profil 95% Taux minimum	59.6%	56.3%	55.8%	55.0%
Profil 90% Taux maximum	59.6%	56.4%	58.4%	62.4%
Profil 90% Taux médians	59.6%	56.3%	56.5%	56.7%
Profil 90% Taux minimum	59.6%	56.3%	55.2%	54.1%
Taux de remp. de la répartition	58.8%	54.4%	50.2%	48.2%
	TRI (H et F) : Répartition + épargne - EMH			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.6%	1.5%
Profil 99% TRI médians	1.9%	1.8%	1.6%	1.5%
Profil 99% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.6%	1.5%
Profil 95% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.6%	1.6%
Profil 95% TRI médians	1.9%	1.8%	1.6%	1.5%
Profil 95% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.6%	1.5%
Profil 90% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.8%	2.0%
Profil 90% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%
Profil 90% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.6%	1.4%
TRI implicite de la répartition	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%

Hypothèse d'un retour vers une tendance déterministe (H2) – 5%

	Rentes viagères - "Time-dependent OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% rentes maximum	0.8%	2.0%	6.2%	10.1%
Profil 99% rentes médianes	0.8%	2.0%	6.1%	8.2%
Profil 99% rentes minimum	0.8%	2.0%	5.8%	7.0%
Profil 95% rentes maximum	0.8%	2.0%	8.0%	13.8%
Profil 95% rentes médianes	0.8%	2.0%	6.4%	9.5%
Profil 95% rentes minimum	0.8%	1.9%	4.8%	6.1%
Profil 90% rentes maximum	0.8%	2.5%	10.6%	16.9%
Profil 90% rentes médianes	0.8%	2.0%	7.1%	9.9%
Profil 90% rentes minimum	0.8%	1.6%	4.7%	5.8%
Rentes fc. du cumul de l'épargne	0.8%	1.9%	5.6%	7.0%
	Taux de remp. + Rentes viagères - "Time dependent OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% Taux maximum	59.6%	56.4%	56.4%	58.3%
Profil 99% Taux médians	59.6%	56.4%	56.3%	56.4%
Profil 99% Taux minimum	59.6%	56.4%	56.0%	55.1%
Profil 95% Taux maximum	59.6%	56.3%	58.2%	62.0%
Profil 95% Taux médians	59.6%	56.3%	56.6%	57.7%
Profil 95% Taux minimum	59.6%	56.3%	55.0%	54.3%
Profil 90% Taux maximum	59.6%	56.9%	60.8%	65.1%
Profil 90% Taux médians	59.6%	56.4%	57.3%	58.0%
Profil 90% Taux minimum	59.6%	56.0%	54.9%	54.0%
Taux de remp. de la répartition	58.8%	54.4%	50.2%	48.2%
	TRI (H et F) : Répartition + épargne - "Time dependent OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.7%	1.7%
Profil 99% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%
Profil 99% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.6%	1.5%
Profil 95% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.8%	1.9%
Profil 95% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%
Profil 95% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.6%	1.4%
Profil 90% TRI maximum	1.9%	1.9%	1.9%	2.1%
Profil 90% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%
Profil 90% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.6%	1.4%
TRI implicite de la répartition	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%

5.2. Effort d'épargne 3% : valeurs moyennes (H+F) pour quelques cohortes

L'hypothèse d'efficience des marchés (H1) – 3%

	Rentes viagères - EMH			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% rentes maximum	0.5%	1.2%	3.5%	4.4%
Profil 99% rentes médianes	0.5%	1.1%	3.4%	4.3%
Profil 99% rentes minimum	0.5%	1.1%	3.4%	4.2%
Profil 95% rentes maximum	0.5%	1.2%	3.5%	5.0%
Profil 95% rentes médianes	0.5%	1.2%	3.5%	4.5%
Profil 95% rentes minimum	0.5%	1.1%	3.3%	4.1%
Profil 90% rentes maximum	0.5%	1.2%	5.0%	8.5%
Profil 90% rentes médianes	0.5%	1.2%	3.8%	5.5%
Profil 90% rentes minimum	0.5%	1.1%	2.9%	3.3%
Rentes fc. du cumul de l'épargne	0.5%	1.1%	3.3%	4.2%
	Taux de remp. + Rentes viagères -EMH			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% Taux maximum	59.3%	55.5%	53.7%	52.5%
Profil 99% Taux médians	59.3%	55.5%	53.6%	52.5%
Profil 99% Taux minimum	59.3%	55.5%	53.6%	52.4%
Profil 95% Taux maximum	59.3%	55.5%	53.7%	53.1%
Profil 95% Taux médians	59.3%	55.5%	53.7%	52.7%
Profil 95% Taux minimum	59.3%	55.5%	53.5%	52.3%
Profil 90% Taux maximum	59.3%	55.6%	55.2%	56.7%
Profil 90% Taux médians	59.3%	55.5%	54.0%	53.6%
Profil 90% Taux minimum	59.3%	55.5%	53.1%	51.5%
Taux de remp. de la répartition	58.8%	54.4%	50.2%	48.2%
	TRI (H et F) : Répartition + épargne - EMH			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.7%	1.5%
Profil 99% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.5%
Profil 99% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.7%	1.5%
Profil 95% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%
Profil 95% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%
Profil 95% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.7%	1.5%
Profil 90% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.8%	1.9%
Profil 90% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%
Profil 90% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.6%	1.5%
TRI implicite de la répartition	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%

Hypothèse d'un retour vers une tendance déterministe (H2) – 3%

	Rentes viagères - "Time-dependent OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% rentes maximum	0.5%	1.2%	3.7%	6.0%
Profil 99% rentes médianes	0.5%	1.2%	3.6%	4.9%
Profil 99% rentes minimum	0.5%	1.2%	3.5%	4.1%
Profil 95% rentes maximum	0.5%	1.2%	5.0%	8.7%
Profil 95% rentes médianes	0.5%	1.2%	3.9%	5.6%
Profil 95% rentes minimum	0.5%	1.2%	2.9%	3.5%
Profil 90% rentes maximum	0.5%	1.6%	6.1%	11.1%
Profil 90% rentes médianes	0.5%	1.2%	4.3%	6.2%
Profil 90% rentes minimum	0.5%	1.0%	2.6%	3.3%
Rentes fc. du cumul de l'épargne	0.5%	1.1%	3.3%	4.2%
	Taux de remp. + Rentes viagères - "Time dependent OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% Taux maximum	59.3%	55.6%	53.9%	54.2%
Profil 99% Taux médians	59.3%	55.6%	53.8%	53.1%
Profil 99% Taux minimum	59.3%	55.6%	53.7%	52.3%
Profil 95% Taux maximum	59.3%	55.6%	55.2%	56.9%
Profil 95% Taux médians	59.3%	55.6%	54.1%	53.8%
Profil 95% Taux minimum	59.3%	55.6%	53.1%	51.7%
Profil 90% Taux maximum	59.3%	56.0%	56.3%	59.3%
Profil 90% Taux médians	59.3%	55.6%	54.5%	54.4%
Profil 90% Taux minimum	59.3%	55.4%	52.8%	51.4%
Taux de remp. de la répartition	58.8%	54.4%	50.2%	48.2%
	TRI (H et F) : Répartition + épargne - "Time dependent OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.7%	1.7%
Profil 99% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%
Profil 99% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.7%	1.5%
Profil 95% TRI maximum	1.9%	1.8%	1.8%	1.8%
Profil 95% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%
Profil 95% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.6%	1.5%
Profil 90% TRI maximum	1.9%	1.9%	1.9%	2.0%
Profil 90% TRI médians	1.9%	1.8%	1.7%	1.7%
Profil 90% TRI minimum	1.9%	1.8%	1.6%	1.5%
TRI implicite de la répartition	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%

Annexes

6.1. Annexe 1 : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert

Poser la question de la volatilité des cours nécessite un éclairage sur la dynamique qu'on leur prête. Ce point est fondamental car la nature présumée de la relation entre rendement et risque – et de son évolution au cours du temps – détermine pour l'essentiel le choix des allocations stratégiques des épargnants. Or, comme le suggère le rapide « état de l'art » présenté ci-dessous, les soubassements de cette relation centrale restent controversés.

- Convergence ou efficience : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert

Dans la mouvance de Louis Bachelier (1900), Fama (1965) propose une formalisation mathématique de la théorie des marchés efficients « *Efficient Market Hypothesis* » (EMH). Depuis lors, l'EMH est devenu un concept central de la théorie financière moderne et les économètres n'ont eu de cesse de tester la forme faible de l'efficience des marchés selon laquelle l'intégralité de l'information passée est déjà comprise dans le prix actuel et qu'il est donc vain d'utiliser les variations passées pour prédire les variations futures.

A partir des travaux fondateurs de Poterba et Summers (1988) qui détectent un processus de retour vers la moyenne « *mean-reverting process* » sur les horizons longs, un débat rémanent s'invite dans la littérature académique pour trancher sur la nature du processus qui régit le prix des actifs risqués. Sans prétendre être exhaustif, on peut mentionner quelques exemples afin d'illustrer l'âpreté de la controverse. Du côté des supporters de l'imprédictibilité des marchés, de nombreux auteurs, comme Fama et al. (1969), attestent que les marchés financiers suivent une marche aléatoire. Hawawini (1984) met en évidence une forme d'efficience faible[27] sur les marchés financiers européens. Chan et al. (1997) confirment que les marchés boursiers mondiaux vérifient la propriété d'efficience faible. Burton (2003), conclut pour sa part que les marchés sont toutefois moins efficients que ne le rapportent les recherches académiques tandis que Jorion (2003) réfute le concept de diversification temporelle et plaide pour une diversification géographique. Plus récemment, Borges (2010) établit que les marchés européens suivent une marche aléatoire, l'hypothèse est confirmée par Sewell (2012) dont les travaux légitiment l'EMH.

Dans le camp des tenants du retour vers la moyenne, on retrouve curieusement Fama et French (1988) qui documentent l'existence de « *mean reversion* » sur les marchés boursiers pour les horizons supérieurs à l'année. Les tests empiriques de Kim et al. (1991) mettent en évidence l'existence de composantes transitoires dans les cours des actions, ils imputent toutefois les forces de rappel dans les chroniques boursières à la « dévastation » consécutive à la seconde guerre mondiale. Balvers et al. (2000) rejettent sans ambiguïté l'EMH, tandis que Broertjes (2010) ou encore Spierdijk et al. (2012) décèlent des variations de la vitesse de retour vers la moyenne au cours du temps. L'importance de l'EMH est due principalement à ses implications pratiques. En effet, comme le montrent Campbell et al. (2005), Bec et Gollier (2009) ou encore Michaelides et Zhang (2017), la présence ou l'absence de « *mean reversion* » dans le cours des actifs risqués a des conséquences majeures sur la structure des allocations stratégiques au cours du temps (« *Life Cycle Asset Allocation* »). Parce qu'elle est caractérisée par une autocorrélation négative des rendements, la variance des actions est moins que proportionnelle à l'horizon d'investissement, ce qui renforce l'attractivité des actions pour les investissements de long terme. Alors que les tenants de cette théorie semblaient en passe de l'emporter, l'épisode de la « *Great*

[27] Il existe trois formes d'efficience pour définir le concept : l'efficience « faible » selon laquelle l'information contenue dans les prix de marché passés est complètement reflétée par les prix des actifs, l'efficience « semi-forte » selon laquelle toutes les informations publiques sont complètement prises en compte par les prix et l'efficience « forte » selon laquelle toutes les informations disponibles, publiques et privées, sont prises en compte par les prix.

Depression » a fait rejaillir la polémique. Ainsi, les tenants du « retour vers la moyenne » comme Wilkie (2001) et surtout Siegel (2014) s'opposent toujours aussi violement, notamment par voie de presse, aux adeptes de la marche aléatoire dont Bodie (1995) est l'un des chefs de file.

Les causes du sempiternel débat sur la dynamique des cours sont souvent attribuées à la taille réduite des échantillons combinée à la faible puissance des tests statistiques utilisés pour rejeter l'EMH. Parmi les techniques disponibles pour tester l'efficience des marchés, le test du ratio de variance ou « *Variance Ratio »* de Lo et MacKinlay (1988) est de loin le plus populaire. Les conclusions des chercheurs qui se sont attelés à tester l'efficience des marchés en utilisant la statistique du ratio de variance sont largement antagonistes. Afin d'évaluer numériquement les limites des tests de ratio de variance, nous avons créé par simulation stochastique des échantillons dont nous avons déterminé *ex ante* la dynamique. L'exercice montre sans ambiguïté que les tests de ratio de variance (paramétrique, non paramétrique, simple ou multiple) sont robustes pour détecter un processus dont la dynamique est proche d'un bruit blanc gaussien. En revanche, il apparait de manière flagrante que les tests ne sont pas efficaces pour détecter une corrélation négative « raisonnable » entre les fluctuations du cours des actions. Cette défaillance, d'autant plus perceptible que la taille des échantillons est petite, explique sans doute une grande partie de la divergence des résultats rapportés dans la littérature consacrée à l'efficience des marchés financiers.

En tout état de cause, cette incertitude justifie la démarche consistant à analyser la sensibilité de l'épargne retraite face aux aléas boursiers au travers d'une double modélisation proposant une carte simple mais contrastée du processus de détermination du prix des actions.

6.2. Annexe 2 : Le modèle démoéconomique

Les outils ayant pour vocation l'analyse de conséquences macro-économiques du vieillissement démographique se distinguent les uns des autres par la nature des variables exogènes qu'elles utilisent ou, dit autrement, par les choix effectués concernant l'endogénéité de chaque variable. A cet égard, les modèles d'équilibre général calculables à générations imbriquées (MEGCGI), popularisés par les travaux de Auerbach et Kotlikoff (1987), proposent des modélisations extrêmement fines cherchant à endogénéiser au maximum les réactions aux changements démo-économiques à long terme. Les MEGCGI, dont Le Cacheux et Touzé (2002) listent les principaux enseignements notamment en matière de retraite, reposent généralement sur des hypothèses d'équilibre parfait de tous les marchés et de comportement fortement rationnel des agents. La maquette partiellement endogénéisée présentée dans cet article est d'une complexité intermédiaire par rapport à cette classe de modèles.

6.2.1. Une fonction de production CES à rendements constants

Le modèle démoéconomique, qui s'inspire de la structure du modèle de Blanchet (1992), est composé d'une fonction de production à deux facteurs et d'une équation décrivant le marché du travail où le chômage possède une composante structurelle et une composante conjoncturelle. Le modèle ignore les phénomènes cycliques temporaires et les contraintes de demande sur le long terme. La fonction de production de référence est de type CES :

$$\mathrm{Y}_t = \mathrm{A}[\alpha K_t^{-\gamma} + \beta((1+g)^{t-t_0} L_t)^{-\gamma}]^{-1/\gamma} \quad (6.1)$$

Paramètres de la fonction de production CES		
Y	Produit total	
L	Population employée	
K	Capital total	
A	A est un paramètres d'échelle.	A et α sont déterminés pour être compatibles avec K/Y exogène = 3.
$\alpha = 0.33$	Fonction de la répartition des revenus entre travail et capital	
$\beta = 0.67$	$(1-\alpha)$	
$s = 1$	Elasticité de substitution $s = 1/(1+\gamma)$	
$\gamma \to 0$	Lorsque γ tend vers 0 on utilise une fonction Cobb-Douglas	
$g = 1.5\%$	Progrès technique exogène	La croissance de Y converge vers $(n+g)$

6.2.2. L'introduction d'une fonction de croissance endogène

Nous avons cherché, à élargir le panorama des résultats en utilisant un modèle de croissance endogène. L'objectif est d'apprécier dans quelle mesure l'introduction d'une fonction de production endogène alternative, donne une lecture différente de l'impact de la capitalisation retraite sur l'économie relativement au modèle néoclassique de base (équation 6.1) Les résultats de quelques simulations « exploratoires » sont donnés en annexe 6.6.

Concernant le choix de la fonction de production endogène, l'analyse des différents modèles nous a conduit à retenir un modèle d'apprentissage par la pratique où l'accumulation des

connaissances dépend du stock de capital agrégé[28], augmenté d'un progrès technique exogène. Cette spécification présente deux intérêts :

- Les nouvelles connaissances sont directement engendrées par l'accroissement du capital du stock de capital par tête[29] au niveau agrégé. Cette modification permet de faire disparaître l'effet d'échelle.

- L'introduction d'un progrès technique exogène, même s'il réduit le caractère endogène de la croissance, permet de capturer les facteurs qui, outre les effets de diffusion, ont une influence sur le taux de croissance à long terme.

Au niveau microéconomique (l'indice i représentant la firme i), la fonction de production s'écrit : $y_{i,t} = k_{i,t}^{\alpha} \cdot \left(A_t \cdot l_{i,t}\right)^{1-\alpha}$ où l_i et k_i sont les facteurs de production habituels. Comme on suppose que les connaissances dépendent du stock de capital agrégé et que ces connaissances sont un bien commun à l'ensemble des firmes, on a : $A_t = Be^{gt} \cdot K_t^{\phi}$ avec B et ϕ des constantes positives et g le progrès technique exogène.

La fonction de production devient : $y_{i,t} = k_{i,t}^{\alpha} \cdot \left(Be^{gt} \cdot K_t^{\phi} \cdot l_{i,t}\right)^{1-\alpha}$ et au niveau macroéconomique : $Y_t = B^{1-\alpha} e^{g(1-\alpha)t} {K_t}^{\alpha+\phi(1-\alpha)} {L_t}^{1-\alpha}$ (6.2).

La croissance $\frac{\dot{Y}}{Y}$ converge alors vers $\frac{n+g}{(1-\phi)}$.

Paramètres de la fonction de production endogène*		
B	B est un paramètres d'échelle.	B et α sont déterminés pour être compatibles avec K/Y exogène = 3.
$\alpha = 0.33$	Fonction de la répartition des revenus entre le travail et le capital	
$\phi = 0.5$	Elasticité de la production à la «connaissance» (stock de capital)	Modèle d'apprentissage par la pratique
$g = 0.75\%$	Progrès technique exogène dans le modèle endogène.	La croissance de Y converge vers $\frac{n+g}{(1-\phi)}$
Paramètres et variables communs à toutes les projections		
$\delta c = 1/18$	Taux de dépréciation du capital	
$sv = 0.70$	Taux d'épargne des capitalistes	$sv = 1$ est la valeur de règle d'or
$\lambda = 0.1$	Paramètre reflétant la « viscosité » du marché du travail	Si $\lambda \to 0$ les salaires sont rigides à la baisse
** Les paramètres non mentionnés sont identiques à ceux de la fonction CES*		

6.2.3. Salaire, marché du travail et rendement du capital d'équilibre

Conformément au programme de maximisation du profit des entreprises, on suppose qu'à l'équilibre, la rémunération de chaque facteur est égale à sa productivité marginale. On a donc, en notant w^* le salaire d'équilibre de plein-emploi correspondant une population employée L^*[30]:

[28] Cf. Arrow (1962) et Romer (1986).

[29] l'introduction de $\frac{K}{L}$ en lieu et place de K permet de supprimer l'effet d'échelle.

[30] On a $L^*/N = 1 - u_0$, avec N la population active et u_0 le taux de chômage structurel. L'équilibre de plein-emploi est celui compatible avec le taux de chômage structurel.

Variable / Equation	Salaire d'équilibre de plein-emploi *w**
Fonction de production de référence	$\mathrm{w}^*_{(t)} = \frac{\beta(1+g)^{(t-t_0)}}{A^\gamma}\left(\frac{Y}{(1+g)^{(t-t_0)}.L^*}\right)^{1+\gamma}$ (6.3)
Croissance endogène	$\mathrm{w}^*_{(t)} = (1-\alpha)[Be^{gt}]^{(1-\alpha)}K^{\alpha+\phi(1-\alpha)}L^{-\alpha}$ (6.4)

On suppose que le salaire effectif diffère du salaire d'équilibre en raison de rigidités qui conduisent à des délais d'ajustement. Pour tenir compte de ces délais, on définit le salaire effectif en t comme une moyenne pondérée du salaire d'équilibre en t et du salaire effectif en $t-1$.

$$\mathrm{w}_t = \max\left[(1-\lambda)\times(1+g)\times w_{(t-1)} + \lambda \times w_t^*; w_t^*\right] \quad (6.5)$$

avec:
w_t : $salaire\ effectif$
w_t^* : $salaire\ d'équilibre\ de\ plein-emploi$
λ : $paramètre\ d'ajustement\ reflétant\ la\ rigidité\ du\ marché\ du\ travail$

Le volume d'emploi se déduit ensuite du salaire effectif. Il est estimé de manière itérative : on recherche le volume d'emploi $\widehat{L_t}$ qui, à partir de l'équation suivante, conduise à un salaire effectif $\widehat{\mathrm{w}}$ qui soit le plus proche possible du salaire effectif w_t.

$$\widehat{\mathrm{w}}_t = \frac{\beta(1+g)^{(t-t_0)}}{A^\gamma}\left(\frac{A\left[\alpha K_t^{-\gamma} + \beta[(1+g)\times\hat{L}_t]^{-\gamma}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}}{(1+g)^{(t-t_0)}\times\widehat{L_t}}\right)^{1+\gamma} \quad avec\ 1-\frac{\widehat{w}_t}{w_t} < \varepsilon$$

Au terme du processus itératif, on obtient $\hat{L}_t$ qui correspond au volume d'emploi en t. On en déduit mécaniquement le taux de chômage.

La productivité marginale du capital correspond au rendement brut du capital. En notant respectivement r_g le rendement brut du capital, r_n le rendement net, et δc le taux de dépréciation du capital, on obtient :

Variable / Equation	Rendement brut du capital r^*_g
Fonction de production de référence	$\mathrm{r}_{g(t)} = (r_n + \delta c) = \frac{\alpha}{A^\gamma}\left(\frac{Y}{K}\right)^{1+\gamma}$ (6.6)
Croissance endogène	$\mathrm{r}_{g(t)} = (r_n + \delta c) = \alpha[Be^{gt}]^{(1-\alpha)}K^{(1-\alpha)(\phi-1)}L^{1-\alpha}$ (6.7)

6.2.4. Stock de capital

Le modèle considère deux classes d'individus. D'une part les « capitalistes » ou « héritiers » qui accumulent de l'épargne dynastique et d'autres part les salariés qui épargnent en fonction de leur anticipation sur le rendement des régimes par répartition. Corrélativement une différence est faite entre le stock de capital « structurel » (Ks) et le capital destiné à la retraite (Kr). Le capital total (K) en (t) est donné par $\mathrm{K(t)} = \mathrm{Ks(t)} + \sum_{a=20}^{r}\mathrm{Kr(a,t)}$ (6.8)

$où\ a\ et\ r = respectivement\ l'âge\ en\ activité\ et\ à\ la\ retraite$

- Capital structurel

Le stock de capital structurel est déterminé par l'équation d'accumulation suivante :

$$\mathrm{Ks}_{(t+1)} = \mathrm{Ks}_{(t)}\left(1 - \delta c + sv.\mathrm{r}_{g(t)}\right) \quad (6.9)$$

avec:
$Ks = capital\ structurel$
$\delta c = taux\ de\ dépréciation$
$sv = proportion\ du\ revenu\ brut\ du\ capital\ réinvesti$

Le comportement d'épargne des « capitalistes » consiste donc à réinvestir une part constante (sv) du revenu brut du capital. Les différentes valeurs du taux d'épargne de cette classe d'agents permettent de jouer sur les rendements du capital en se plaçant de manière déterministe dans un contexte de « règle d'or » ou de « sous-accumulation ».

- Capital retraite

Au sujet du capital retraite, on suppose que les salariés d'âge (a) de sexe (s) en (t) dirigent vers un fonds une fraction θ de leur salaire brut courant $w_{(s,a,t)}$. Le capital retraite est individualisé par génération et est consommé progressivement après l'âge de la retraite, pour revenir à zéro lorsque le dernier représentant de la génération disparaît. Si on note pk les rentes attribuées par le fonds (*cf. infra* équation 6.11), la dynamique du capital retraite peut se résumer comme suit :

$si\ (a) < âge\ de\ la\ retraite\ (r)$

$$\mathrm{Kr}_{(s,a,t)} = \mathrm{Kr}_{(s,a-1,t-1)} \times \left(1+r_{n(t)}\right) + \left(\widehat{ar}_{(s,a,t)} \times (1 - u_{(s,a,t)}) \times P_{(s,a,t)}\right) \times \theta_f \times w_{(s,a,t)} \quad (6.10\ \mathrm{a})$$

$sinon$

$$Kr_{(s,a,t)} = Kr_{(s,a-1,t-1)} \times (1 + tec) - \left(P_{(s,a,t)} \times pk_{(s,a,t)}\right) \quad (6.10\ \mathrm{b})$$

$avec$:
$Kr = stock\ de\ capital\ retraite$
$\theta_f = \%\ du\ salaire\ brut\ consacré\ à\ l'épargne\ retraite$
$pk = rentes\ attribuées\ par\ le\ fonds$
$\widehat{ar} = taux\ d'activité\ salarié$
$P = population\ totale$
$u = taux\ de\ chômage$
$tec = taux\ d'intérêt\ technique$

Afin de traduire la réalité fonctionnelle des marchés, nous faisons l'hypothèse forte qu'au moment de la conversion du capital en rente, le capital productif risqué est intégralement converti en support de « stockage » de rendement réel nul pour sécuriser les rentes. Par conséquent, au moment de la conversion du capital en rente, on considère que les engagements du fonds de retraite à l'égard des assurés, ne sont pas réintégrés dans le stock de capital productif. Seul le capital accumulé par les salariés pendant la phase d'épargne est additionné au capital structurel.

- Calcul des rentes du fonds de retraite

$$\mathrm{pk}_{(\mathrm{s,r,t})} = \frac{\mathrm{Kr}_{(\mathrm{s,r,t})}}{\mathrm{P}_{(\mathrm{s,r,t})} \times \sum_{i=r}^{\omega} \frac{l_{(r+(i-r))}}{l_r} \times \frac{1}{(1 + tec)^{(i-r)}}} \quad (6.11)$$

$avec$:
$pk = rentes\ attribuées\ par\ le\ fonds$ à l'âge r $(avec\ r \geq$ âge $retraite)$
$Kr = capital\ retraite$ à $convertir\ en\ rente$
$l_r = nombre\ de\ survivants$ à l'âge r
$tec = taux\ d'intérêt\ technique$
$\omega =$ âge $limite\ de\ la\ vie\ biologique$

Dans ce type de maquette, l'accumulation du capital est fonction de sa productivité marginale, dont on déduit le rendement net à partir du taux de dépréciation du capital δc. Bien qu'il soit sensible à la croissance du capital par tête, le rendement du capital physique reste relativement inerte. On devine que l'introduction d'un stock de capital caractérisé par une forte variance n'est pas compatible avec ce type de bouclage. Afin d'intégrer le risque lié à l'imperfection des marchés nous avons simulé une espérance de rendement « volatile » dont la valeur est fonction d'une composante stochastique stationnaire et de l'écart à une cible de long terme déterminée[31] par $\delta t \sum_{j=0}^{N-1} r_{n_j}$ où r_n est la productivité marginale du capital issue du bouclage démo-économique. Le stock de capital « volatil » alimenté par les flux d'épargne investis sur l'actif censé refléter le risque de marché n'interfère pas dans le bouclage démoéconomique. Il permet d'assurer une cohérence entre le rendement macroéconomique et les couples « rendement - risque » qui déterminent l'accumulation du capital dans le plan d'épargne retraite.

[31] Soit $\alpha_t = \int_0^t r_{n_s} ds$ avec α_t la tendance de long terme et r_{nt} la pente de la tendance en t, alors si $N \to \infty$ et $\delta t \to 0$, on a : $\int_0^t r_{n_s} ds \cong \delta t \sum_{j=0}^{N-1} r_{n_j}$.

6.3. Annexe 3 : Dynamique des prix et stratégies d'allocation

Du fait des imperfections du cycle économique, c'est-à-dire l'irrégularité de sa périodicité et la dissymétrie de ses phases, l'évolution du prix des actifs n'est pas linéaire. Afin d'en tenir compte, à la différence de Balvers (2000) ou Thierfelder (2015) qui modélisent les cours au moyen d'un « *Trending O-U process* », la dynamique stylisée des prix des actifs risqués est approchée par une spécification de type « *Time-dependent O-U process* ». Soit P_t : le prix d'un actif risqué (on pose $\mathrm{P}_0 = 1$, donc $\ln(\mathrm{P}_0) = 0$), soit $V_t = \ln(P_t)$ où V_t représente le cumul de log-rendements au temps t depuis l'origine $\mathrm{t} = 0$, l'équation s'écrit :

$$\mathrm{dV_t} = \mathrm{d}\alpha_\mathrm{t} + \kappa\big(V_0 - (\mathrm{V_t} - \alpha_\mathrm{t})\big)\mathrm{dt} + \sigma\,\mathrm{dW_t} \quad (6.12)$$

où α_t est la tendance de long terme et $\mathrm{r_{nt}}$ la pente de la tendance à l'instant (t) d'où :

$$\mathrm{d}\alpha_\mathrm{t} = r_{n_\mathrm{t}}\mathrm{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_\mathrm{t} = \int_0^\mathrm{t} r_{n_\mathrm{s}}\,\mathrm{ds} \quad (6.13)$$

$avec$:
$r_n = r_g - \delta c \;=\; rendement\ net\ du\ capital$
$W_t = \;processus\ de\ Wiener$
$\sigma = volatilité\ de\ dV_t$
$\kappa = \;vitesse\ de\ «\ retour\ vers\ la\ moyenne\ »$

S'il n'y a pas de « *mean reversion* », alors $\kappa = 0$.

Dans ce cas l'équation (6.12) devient : $\mathrm{dV_t} = \mathrm{d}\alpha_\mathrm{t} + \sigma\,\mathrm{dW_t}$, soit un ABM « *Arithmetic Brownian Motion* » avec « *drift* » variable.

S'il n'y a pas de « *trend* », alors $\mathrm{d}\alpha_\mathrm{t} = 0$.

Ce qui veut dire que si les variations de $\mathrm{d}\alpha_\mathrm{t}$ sont nulles alors α_t est constant, donc $\exists\, r_n \in \mathbb{E}$ telle que $\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}\;\; \alpha_\mathrm{t} = r_n$.

Dans ce cas (6.12) devient : $\mathrm{dV_t} = \kappa\big(V_0 - (\mathrm{V_t} - r_n)\big)\mathrm{dt} + \sigma\,\mathrm{dW_t}$ ou encore $\mathrm{dV_t} = \kappa(\widetilde{r_n} - \mathrm{V_t})\,\mathrm{dt} + \sigma\,\mathrm{dW_t}$ $avec\ \widetilde{r_n} = V_0 + r_n$, soit un pur « *OU process* ».

Time-dependent Ornstein-Uhlenbeck process

$$dV_t = d\alpha_t + \kappa\big(V_0 - (V_t - \alpha_t)\big)dt + \sigma\, dW_t$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$Sans\ «\ trend\ »: \qquad\qquad Sans\ «\ mean - reversion\ »:$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$dV_t = \kappa(\widetilde{r_n} - V_t)dt + \sigma\, dW_t \qquad\qquad dV_t = r_{n_t}dt + \sigma\, dW_t$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$«OU\ process» \qquad\qquad «ABM\ \ (drift\ variable)»$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$V_t = v_0 e^{-\kappa t} + \widetilde{r_n}(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)}\, dW_s \qquad V_t = v_0 + \int_0^t r_{n_s}\, ds + \sigma W_t$$

Les moments d'ordre un et deux donnés par l'isométrie d'Itô sont :

- Cas sans « mean-reversion »

$$\mathbb{E}(V_t) = v_0 + \int_0^t r_{n_s}\,ds \cong v_0 + \delta t \sum_{j=0}^{N-1} r_{n_j}\ ; d'où\ \ \mathbb{E}(V_t) = \lim_{N\to\infty}\left(\delta t \sum_{j=0}^{N-1} r_{n_j}\right)$$

Si r_n est constant dans le temps on a :

$\mathbb{E}(V_t) = v_0 + r_n\, t$ (6.14) et $\mathbb{V}ar(V_t) = \sigma^2\, t$ (6.15)

- Cas sans trend

$$\mathbb{E}(V_t) = v_0 e^{-\kappa t} + \tilde{r_n}(1 - e^{-\kappa t})$$

$$\mathbb{V}ar(V_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})$$

Ce sont des fonctions bornées (évoluant autour d'une tendance de pente nulle), pour des valeurs de t très grandes on a :

$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(V_t) = \tilde{r_n}$ (6.16) et $\lim_{t\to\infty} \mathbb{V}(V_t) = \frac{\sigma^2}{2k}$ (6.17)

On constate que la modélisation retenue est flexible et nous permet de simuler un mouvement brownien, un « O.U. process », ou une mixture des deux en fonction de la valeur de la vitesse de retour vers la moyenne κ.

La première hypothèse $\kappa = 0$ suppose que le rendement des actifs suit une loi gaussienne où l'espérance est donnée par un « *drift* » $rn_{(t)}$ variable. Elle revient à s'inscrire dans le cadre de la théorie des marchés efficients « *Efficient Market Hypothesis* » (EMH), posé par Fama (1965). Cette dynamique n'apporte aucune certitude à l'épargnant sur le montant du capital constitué au terme de son investissement, car, une fois intégré, le processus suit une marche aléatoire. La mise en évidence récurrente dans la littérature académique[32] de « retour vers la moyenne » ou « *mean reversion* » dans les cours des actions ($\kappa > 0$) justifie une modélisation alternative. Ce type de processus présume que les chocs sur les marchés boursiers ont un caractère transitoire et qu'à plus ou moins long terme un mouvement de sens opposé viendra corriger la déviation initiale pour rapprocher les prix des actifs de leur valeur d'équilibre $\int_0^t r_{n_s} ds$. L'allongement de la durée de placement conduit donc à une réduction du risque.

6.3.1. Les stratégies d'allocation d'actifs

Dans notre modèle, la stratégie d'un investisseur consistera à sélectionner une succession d'allocations structurelles d'actifs correspondant à une probabilité de « préservation du capital » prédéterminée. La structure des allocations est différente selon la dynamique que l'on prête au cours des actions.

- L'hypothèse d'efficience des marchés (EMH)

Dans le cas paramétrique – hypothèse de distribution gaussienne des « *log returns* » – la VaR s'exprime classiquement en fonction de la moyenne et de la variance déterminées par la demande (p) d'actifs risqués :

$$VaR_{(t,p)} = p * \left((r_{n(t)} - r_f) + \sigma_{(t)} * z_{(1-\alpha)}\right) \ (6.18)$$

[32] Notamment par Poterba et Summers (1988), Campbell et Viceira (2005), ou encore Spierdijk et al. (2012)

$avec$:
$p = \ proportion\ d'actifs\ risqués$
$r_{n_{(t)}} = productivité\ marginale\ du\ capital$
$r_f = \ rendement\ de\ l'actif\ dans\ risque$
$\sigma_{(t)} = volatilité$
$z_{(1-\alpha)} = \ le\ quantile\ de\ la\ loi\ \mathcal{N}(0,1)\ au\ seuil\ de\ probabilité\ 1-\alpha$

Dans le cas d'une gaussienne, on déduit facilement l'évolution de l'expression (2.2) en fonction de l'horizon de placement :

$$VaR_{(t,p)} = \mathrm{T} * p * \left((r_{n_t} - r_f) + \frac{\sigma_t}{\sqrt{T}} * z_{(1-\alpha)}\right) \quad (6.19)$$

avec:

$\mathrm{T} = temps\ restant\ avant\ le\ terme\ du\ placement$

- L'hypothèse de retour vers la moyenne

Dans le cas où la dynamique des cours est régie par un « *Time-dependent OU process* » l'expression de la VaR en fonction de l'horizon (t) devient :

$$VaR_{(t,p)} = \mathrm{T} * p * \left((r_{n_{(t)}} - r_f) + \frac{\sigma_{(t)}}{\sqrt{T}} * \frac{\sqrt{\frac{\sigma^2_{(t)}}{\kappa} * (1 - \exp(-\kappa * T)) \Big/ T}}{\sqrt{\frac{\sigma^2_{(t)}}{\kappa} * (1 - exp(-\kappa))}} * z_{(1-\alpha)} \right) (6.20)$$

$avec$:
$\kappa = vitesse\ de\ retour\ vers\ la\ moyenne$

6.4. Annexe 4 : L'estimation de la demie vie

Formellement, en économétrie, la demi-vie d'un processus stochastique est la durée de temps hl nécessaire au processus pour que la valeur de sa réponse impulsionnelle en $t + hl$ due à un choc apparu en t soit diminuée de moitié. La vitesse de « retour vers la moyenne » κ se déduit de la demi-vie hl par la relation $\kappa = \frac{\ln(2)}{hl}$. La question de la vitesse de retour vers la moyenne des prix des actifs risqués est un axe de recherche essentiel dans la modélisation des cours. Or, sur ce sujet, les résultats des recherches empiriques sont loin de converger. Par exemple, Balvers et al. (2000), établissent, entre 1970 et 1996, une réversion significative, avec une demi-vie d'environ 3,5 ans. Dans une étude postérieure, Spierdijk et al. (2012) analysent le retour à la moyenne des marchés boursiers de 18 pays de l'OCDE au cours des années 1900 à 2009. Sur la période la durée moyenne serait de l'ordre de 18 ans.

Pour tenter de lever cette ambigüité, au moins deux points essentiels sont à prendre en considération. En premier lieu, il est nécessaire de se pencher sur la « qualité » des séries boursières utilisées. A cet égard, on notera que nos propres estimations méritent d'être affinées. En effet, les séries de « total return » utilisées pour les actions françaises (CAC All-Tradable ex - SBF 250) sont issues de la base de données « Global Financial Data » qui s'appuie sur les données de la Statistique Générale de France puis de l'Insee pour la reconstitution de ses chroniques longues. Or, aux dires mêmes de l'institut statistique, l'indice français souffre de biais de survivance « *survivorship bias* » et surtout de pondération. Nous avons cependant pour projet d'initier une collaboration avec David Le Bris − Professeur à la Toulouse Business School − afin

d'estimer la demi-vie à partir du « HCAC 40[33] » qui est une rétropolation de ce qu'aurait été la performance du CAC 40 s'il avait existé avant sa création par Euronext en 1988.

En second lieu, il semble important de se pencher sur l'efficacité des différentes méthodes dédiées à la décomposition entre tendance, cycle et composante irrégulière. A ce stade de nos investigations, nous avons utilisé un filtre Hodrick-Prescott en nous inspirant du paramétrage préconisé par les auteurs. Une piste de recherche consisterait à utiliser différents filtres (Hodrick-Prescott, Baxter-King, Christiano-Fitzgerald, ...) en nous appuyant sur les approches[34] d'Avouyi-Dovi et Matheron (2003) ou de Damette et al (2010) qui consistent à calibrer les paramètres des filtres à partir de critères de coïncidence avec les points de retournement des indices boursiers.

Ces précisions faites, conscient des limites de notre approche, on peut donner une approximation de la vitesse de retour vers la moyenne des actifs risqués. L'estimation des demi-vies des chroniques boursières est complexe en raison de l'existence de nombreux biais dans les méthodes d'estimation. Sans insister sur ce point[35], signalons que nos calculs s'appuient sur l'estimation sans biais de la médiane («*Median Unbiased Estimator*»). Cette méthodologie nous a permis d'évaluer les demi-vies du CAC All Tradable de 1950 à 2017 sur des fenêtres glissantes trimestrielles de différentes largeurs afin d'en apprécier l'instabilité temporelle.

L'estimateur détermine des demi-vies médianes annualisées de l'ordre de 7 ans, compatibles avec la durée d'épargne des agents. Ces résultats sont compatibles avec ceux calculés par Spierdijk (*op. cit.*) sur les périodes d'après-guerre. On obtient une vitesse κ proche de 0,10. L'estimation des demi-vies des chroniques boursières nous permet de paramétrer la vitesse de retour vers la moyenne dans le processus qui régit le prix des actifs risqués, lequel détermine - pour une aversion au risque donnée - l'évolution de la structure des allocations d'actifs au cours du temps. Ces résultats sont à interpréter avec précaution en raison de l'instabilité des forces de rappel dans le temps. Toutefois, la comparaison des chroniques de prix des actions en France (Graphiques FRA) et aux Etats-Unis (Graphiques US) − pays pour lequel les séries[36] calculées par Robert Shiller sont réputées non biaisées − révèle sans ambiguïté que la vitesse de réduction de la variance des distributions historiques du logarithme des rendements des actions domine celle d'une loi normale. Les biais identifiés ne semblent donc pas de nature à remettre en cause la nature du processus, mais il est vraisemblable qu'ils conduisent à en méconnaître l'intensité.

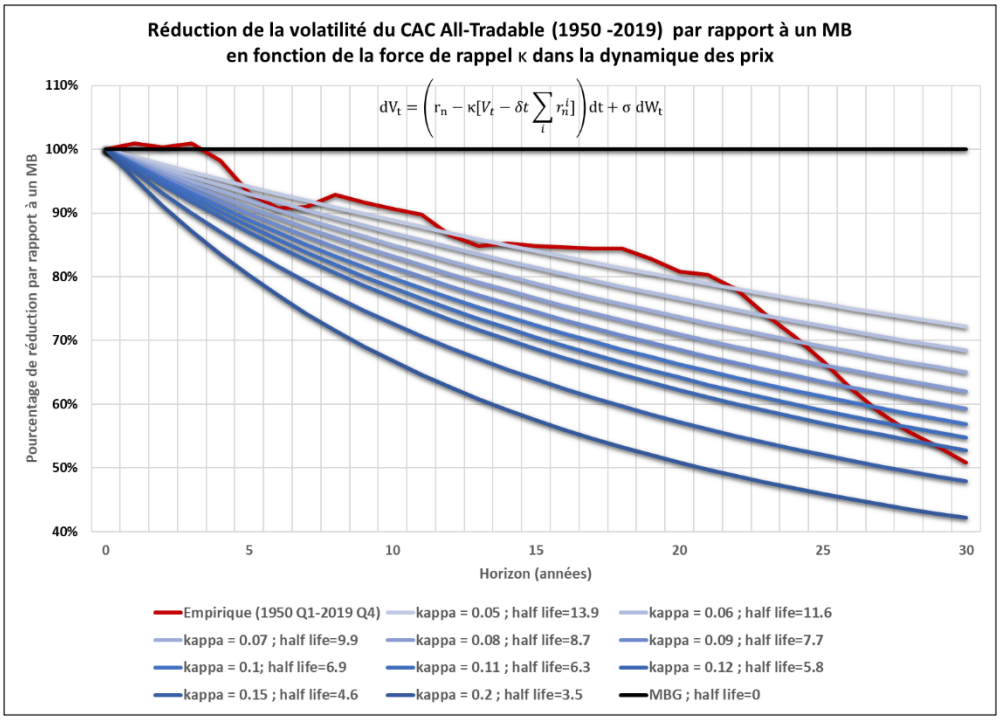
[33] Le Bris et Hautecoeur (2010).

[34] Les auteurs s'appuient sur une approche non paramétrique du type « Bry-Boshan » pour détecter les points de retournement et déterminer les paramètres de leur filtre (modèle d'Hamilton pour Damette, Filtre de Christiano-Fitzgerald pour Avouyi-Dovi). La référence à une datation exogène permet de mieux calibrer les méthodes de décomposition des séries chronologiques.

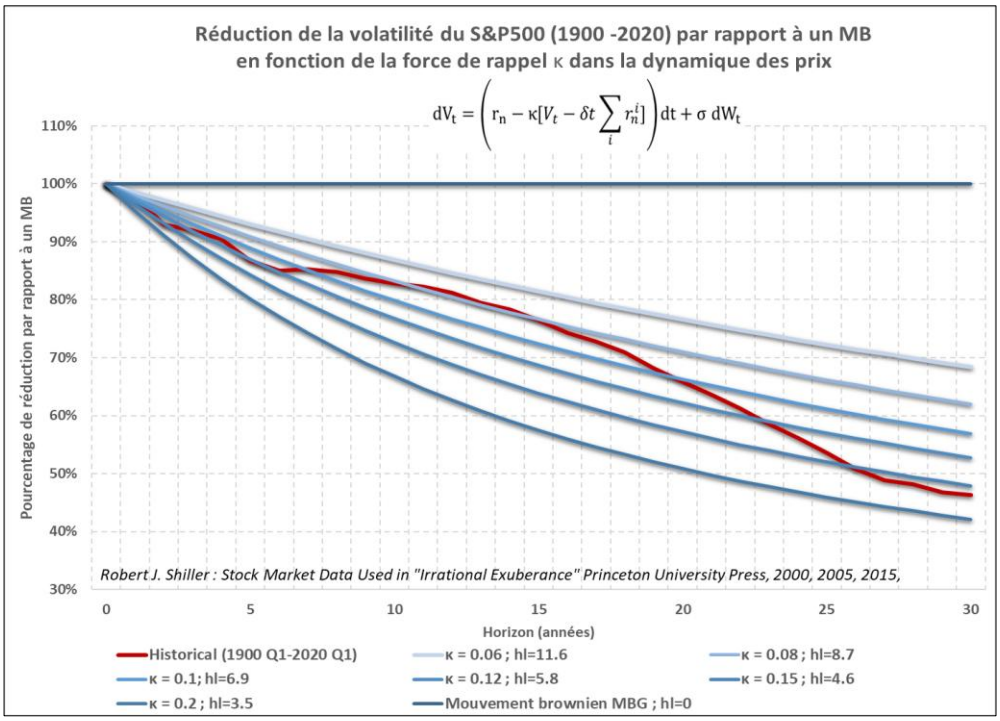
[35] Sur le sujet, on se reportera aux travaux de Pradat (2017).

[36] http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm

Graphique FRA : Réduction empirique et simulée de la volatilité du CAC



Graphique US : Réduction empirique et simulée de la volatilité du S&P500



6.5. Annexe 5 : Un bilan du « bien-être » des agents

Au-delà de la remontée mécanique du pouvoir d'achat relatif des retraités consécutive au versement d'une rente viagère additionnelle issue de l'accumulation d'un capital, la question cruciale qui se pose est celle de l'utilité ou du « bien-être » que les agents peuvent retirer de leur abondement au fonds d'épargne. On peut tenter une mesure de ce bien-être en calculant le taux de rendement interne[37] (TRI) de « l'opération retraite » (qu'elle provienne de transferts instantanés ou d'épargne) sur leur cycle de vie. Un tel critère intègre à la fois le revenu tiré du régime de retraite, l'effort consenti lors des cotisations et la durée passée à la retraite relativement à celle passée au travail et peut être assimilé à une forme de « comptabilité générationnelle » restreinte à la seule question des retraites au sens d'Auerbach et al. (1991). Pour les affiliés qui liquident leur retraite, on peut approximer, par génération et par sexe, le rendement interne de « l'opération retraite » par la formule détaillée ci-dessous. Pour tenir compte de l'impact de la capitalisation, il suffit d'augmenter le taux de cotisation de l'effort d'épargne en proportion du salaire et d'intégrer la rente viagère à la pension de retraite.

$$\sum_{a=20}^{r} (\tau_{(t)+} fs_{(t)}) \times w_{(a,t)\times} ar_{(a,t)} \times s(a) \times (1+ir)^{(r-a)} \cong \sum_{a=r+1}^{\omega} \frac{(p_{(a,t)} + pk_{(a,t)}) \times s(a)}{(1+ir)^{(a-r)}} \quad (6.21)$$

avec:

$ir = \ taux\ de\ rentabilité\ interne$
$w = \ salaire\ moyen$
$\tau = \ taux\ de\ cotisation\ du\ régime\ par\ répartition$
$ar = \ taux\ d'activité$
$p = \ pension\ de\ retraite$
$s(a) = \ fonction\ de\ survie$
$r = \ âge\ de\ départ\ à\ la\ retraite$
$\omega = \ âge\ limite\ de\ la\ vie\ biologique$
$fs = \ effort\ d'épargne\ en\ \%\ du\ salaire$
$pk \ = \ rentes\ attribuées\ par\ le\ fonds\ à\ l'âge\ r$

[37] On notera qu'au-delà des valeurs intrinsèques des TRI, il est important de prêter attention à leur « dispersion » qui ont une incidence négative sur le bien être des agents. Pour une discussion sur le sujet on pourra se référer à Lavigne (2010), qui liste les indicateurs pour mesurer l'inégalité entre les générations.

6.6. Annexe 6 : La piste de la croissance endogène

La problématique de ce document est centrée sur l'incorporation d'une modélisation simplifiée de la dynamique du cours des actions dans un modèle démo-économique à la Solow caractérisé par une fonction de production à rendements constants.

Dans la théorie de croissance néo-classique, à long terme, le rendement du capital compense son amortissement, autrement dit, l'épargne est entièrement destinée à payer l'amortissement physique du capital. Dans ce cas de figure, l'accumulation du capital et la croissance cessent, une fois l'état d'équilibre atteint. Pour pallier la convergence systématique de l'économie vers une croissance nulle à long terme, l'idée de « progrès technique » a été introduite. Le « progrès technique » constitue un facteur exogène qui croît à un rythme constant et est essentiel à la croissance économique à long terme. L'avancement de la technologie améliore la productivité du travail, empêchant la baisse du produit marginal du capital lorsque le rapport capital-travail augmente. Les résultats de ce modèle peuvent paraitre relativement frustrants : à l'équilibre, la croissance est uniquement expliquée par des facteurs exogènes.

Conscients des limites des théories traditionnelles, les auteurs[38] des nouvelles théories de la croissance − dites de « croissance endogène » − remettent en question les sources de la croissance. Ils tentent de relier la croissance économique aux caractéristiques internes de l'économie. Dès lors, l'expérience cumulée dans l'activité économique, les dépenses publiques d'éducation et de santé, le stock des investissements déjà réalisés, notamment dans le domaine de la recherche, apparaissent comme des facteurs endogènes de croissance, c'est-à-dire des facteurs décisifs qui l'alimentent et s'alimentent d'elle.

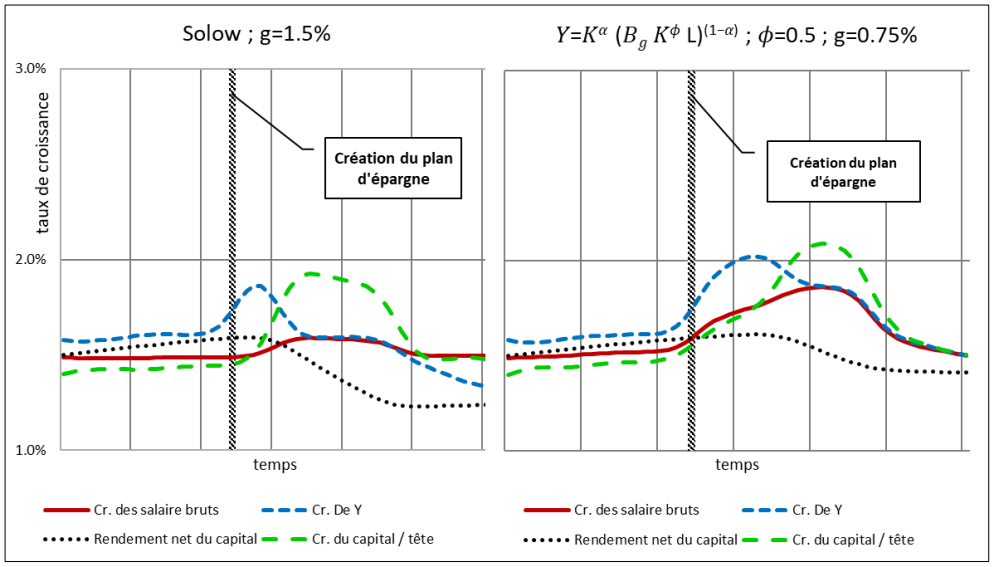
On imagine aisément que dans ce type de modèle les fluctuations des rendements du travail et du capital face à un choc démographique sont différentes de celles enseignées par les modèles néoclassiques. Ce raccourci théorique montre qu'il n'existe pas d'explication universelle des mécanismes de la croissance économique. Pour cette raison nous avons cherché, à élargir le panorama des résultats en utilisant un modèle d'apprentissage par la pratique où l'accumulation des connaissances dépend du stock de capital agrégé, augmenté d'un progrès technique exogène (équation 6.2). L'introduction d'un progrès technique exogène, même s'il réduit le caractère endogène de la croissance, permet de capturer les facteurs qui, outre les effets de diffusion, ont une influence sur le taux de croissance à long terme.

En définitive, l'objectif est d'apprécier dans quelle mesure l'introduction d'une fonction de production endogène alternative, donne une lecture différente de l'impact de la capitalisation retraite sur l'économie relativement au modèle néoclassique de base (équation 6.1).

On peut illustrer de manière stylisée (Graphique E1) la différence entre le modèle de base et un modèle d'apprentissage par la pratique partiellement endogénéisé. Dans le cas d'un modèle de Solow avec un progrès technique exogène croissant au taux g, l'incidence de l'augmentation du stock de capital sur la croissance est transitoire et l'excès de capital par tête conduit à une baisse rapide du rendement du capital déterminé ici dans un contexte de règle d'or. Dans le modèle « K^{ϕ} », les effets d'éviction sont moins « violents » et bien que l'économie converge progressivement vers son état initial, le modèle détermine des liens plus forts et plus durables entre accumulation du capital et production.

[38] Arrow (1962), Romer (1986), Lucas (1988), Barro et al. (1996) pour ne citer qu'eux.

Graphique E1 : Solow *vs.* **fonction de production endogène** (*contexte de règle d'or*)



6.6.1. L'hypothèse d'un effort d'épargne de 5%

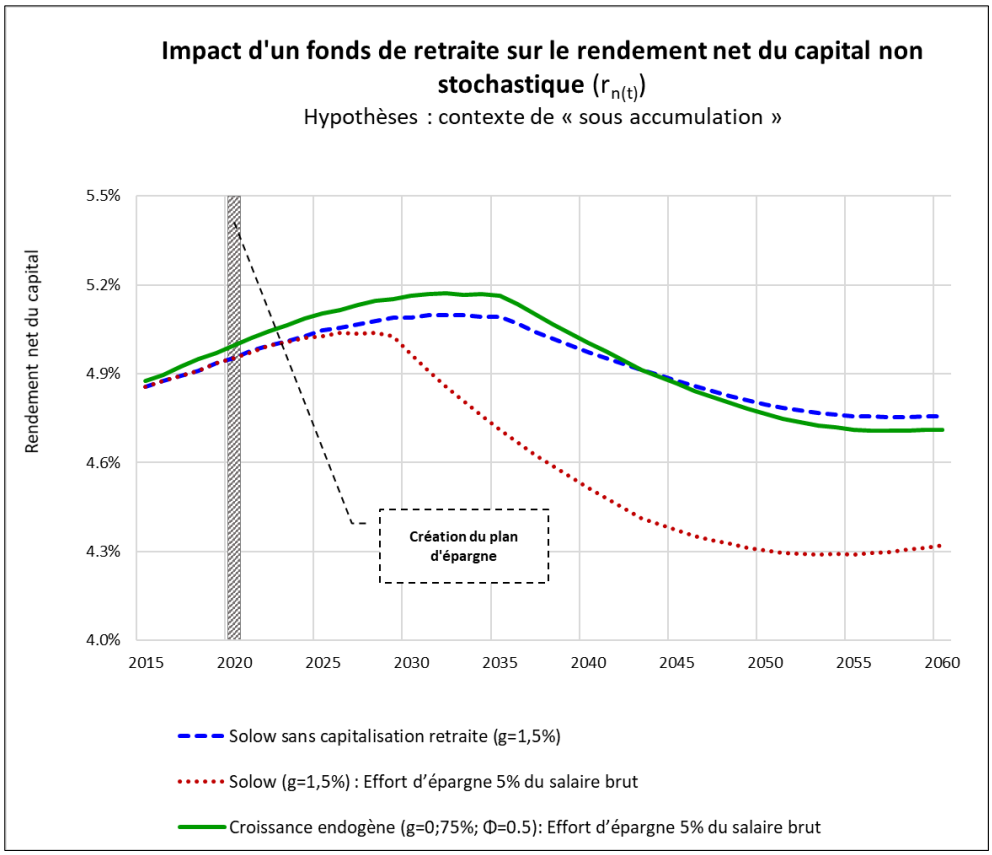
Hors contexte de « sous accumulation », dans le modèle de Solow, l'incidence de l'augmentation du stock de capital sur la croissance est transitoire et l'excès de capital par tête est rapidement corrigé par la baisse du rendement du capital (cf. Graphique 5a). Après quoi, le rendement du capital converge vers $(n+g)$, avec n, le rythme de croissance du facteur travail. Dans le modèle de croissance endogène le rendement du capital converge vers $\frac{n+g}{(1-\phi)}$. Par conséquent, toutes choses égales par ailleurs, si la population active reste croissante sur la période de projection (ce qui est le cas dans l'hypothèse centrale de l'Insee[39]), avec $\phi < 1$, le rendement net déduit de la fonction d'apprentissage par la pratique domine le rendement calculé dans le modèle de Solow. Afin d'illustrer les propriétés du modèle de croissance endogène, on a retenu une valeur arbitraire mais « raisonnable » pour ϕ. L'exercice de simulation a été effectué avec le paramétrage suivant :

$Y = K^{\alpha} * (BgK^{\phi}L)^{(1-\alpha)}$ pour $\phi = 0.5$; soit un niveau qui détermine une valeur de g de 0.75, sachant que, par hypothèse, Y converge vers 1.5%.

On voit clairement sur le graphique E2, que les rendements du modèle de croissance endogène ne sont pas affectés par la création d'un fonds capitalisé. En revanche, dans l'hypothèse d'un abondement de 5% (seul cas étudié dans ce paragraphe), la baisse du rendement du capital est patente dans le modèle néoclassique de base.

[39] Projections de la population active à l'horizon 2070, Koubi Malik ; Marrakchi Anis, Insee. 2015-10, G2015/15.

Graphique E2. Rendement du capital et fonction de production

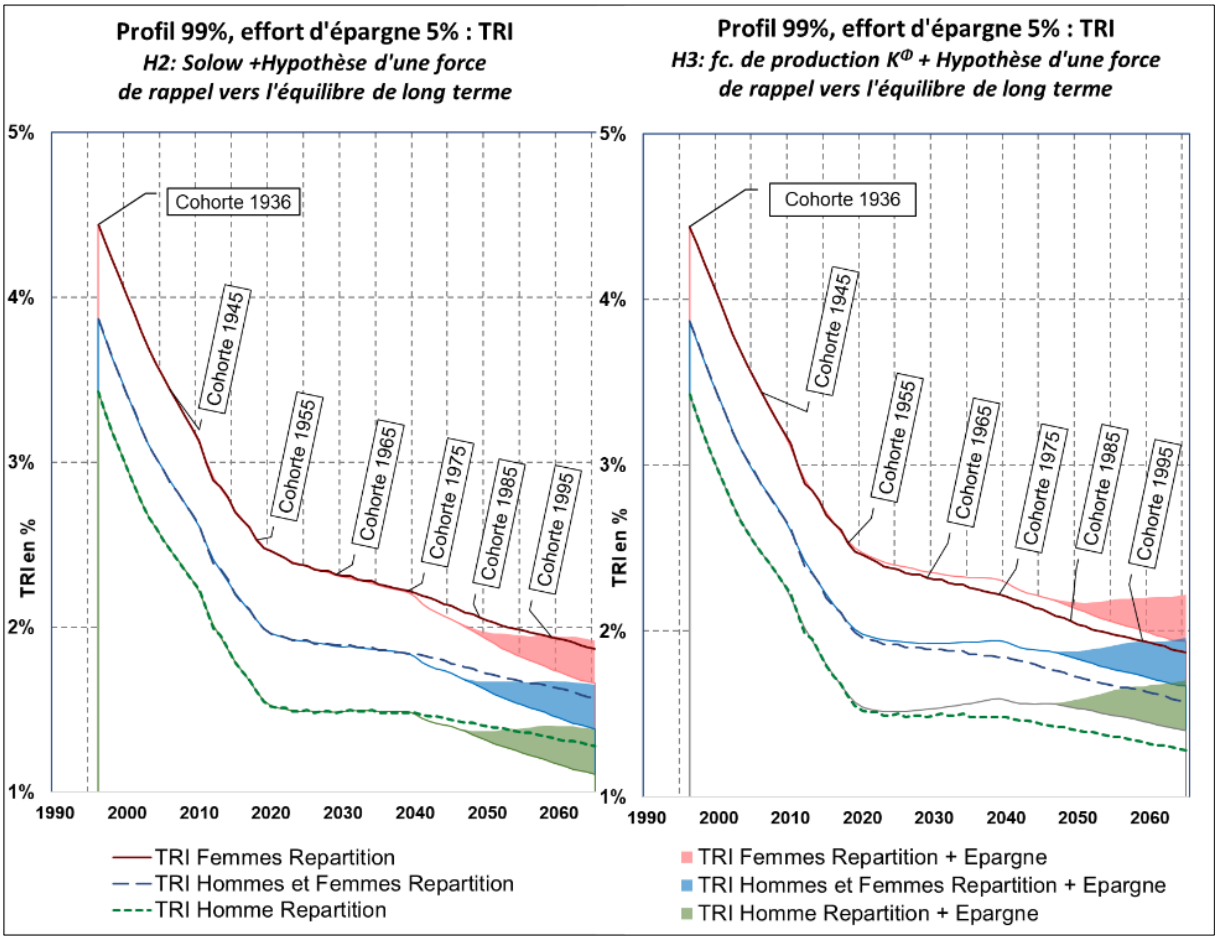


- Le cas d'un Profil 99%

Du fait de la faible proportion d'actifs risqués déterminée dans l'hypothèse EMH, l'utilisation d'un bouclage macroéconomique alternatif avec croissance endogène (hypothèse « H3 ») ne change pas les conclusions déduites du modèle Solow. Par conséquent nous nous focalisons sur l'hypothèse où la dynamique des cours est régie par un « *Time-dependent OU Process* ».

Les rentes calculées pour ce cas type seraient légèrement supérieures à celles déterminées dans l'hypothèse H2. Mais le fait saillant vient de l'écart entre les taux de rendement interne (TRI). La comparaison des séries de TRI déterminées par l'addition des taux de remplacement et des rentes dans l'hypothèse « H2 » et le modèle K^{Φ} montre que dans cette dernière hypothèse, la participation au plan d'épargne conduirait à une augmentation générale du TRI des affiliés (Graphique E3). L'hypothèse H3 a, en effet, un impact conjoint sur le rendement de la répartition et sur celui du plan d'épargne en raison d'effets d'éviction moins « violents » que dans le modèle de base.

Graphique E3. TRI des cohortes : Solow *vs.* Croissance endogène

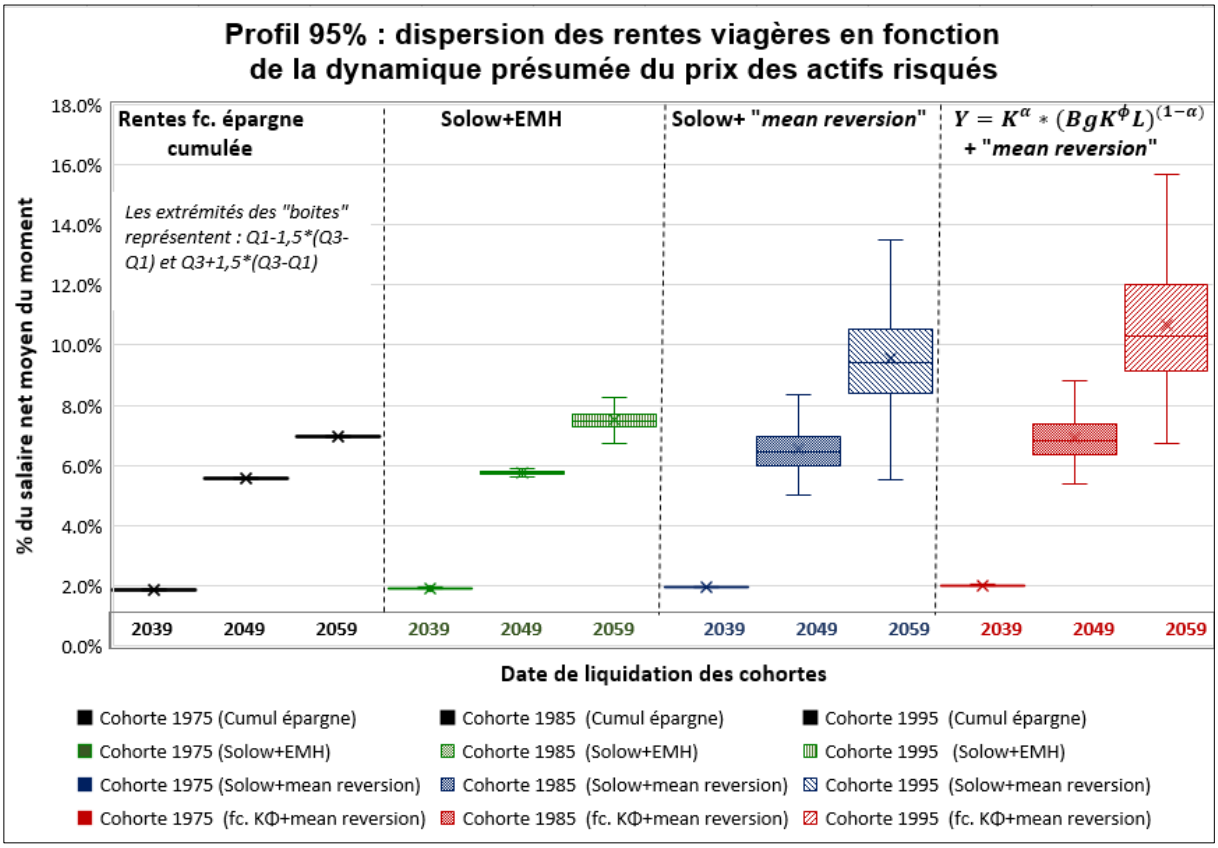


Le modèle « Kϕ » détermine des liens plus robustes entre accumulation du capital et production. Même si ces effets ne sont que transitoires, ils conduisent à des niveaux des différents agrégats supérieurs et donc dans ce cas précis à des TRI supérieurs au terme des simulations.

- Le cas d'un Profil 95%

Un « Profil 95% » sélectionne une succession d'allocations structurelles d'actifs avec pour objectif la préservation du capital investi dans le plan d'épargne dans 95% des cas. L'acceptation d'une perte en capital significative se traduit par des allocations plus riches en actifs risqués et débouche mécaniquement sur des compléments de retraite médians plus importants. La stratégie conduit toutefois à des rentes viagères plus dispersées en raison de l'augmentation de la volatilité des placements. Le graphique E4, qui compare les rentes en fonction des dynamiques présumées du prix des actifs à celles calculées à partir de l'épargne cumulée sur la base d'un rendement nul, montre que les rentes calculées pour l'hypothèse « H3 » sont supérieures à celles estimées pour les hypothèses H1 et H2. L'attribution de rentes élevées serait associée à un risque de pertes plus faible que dans les autres hypothèses.

Graphique E4. Effort d'épargne 5% : Rentes viagères moyennes : Solow *vs.* Croissance endogène



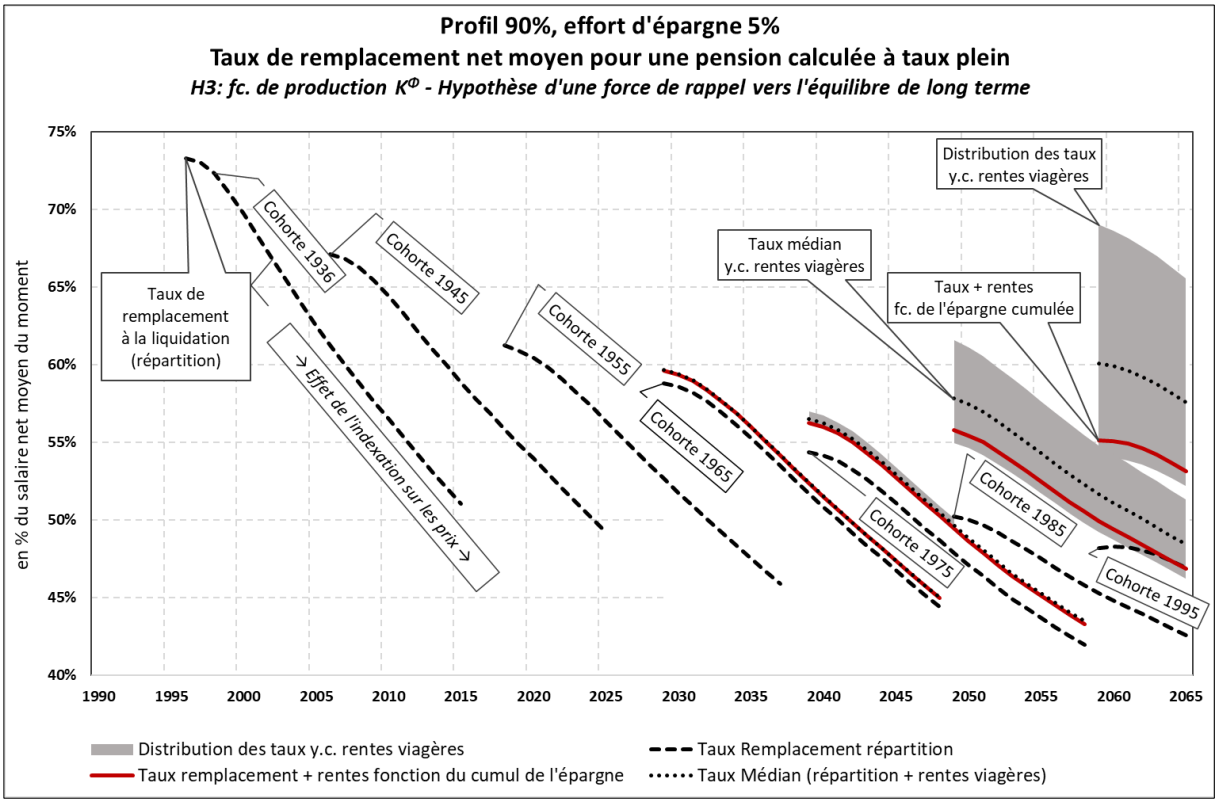
- Le cas d'un Profil 90%

Les cas types caractérisés par un « Profil 90% » investissent assez massivement en actifs risqués. Compte tenu de la nature des allocations structurelles calculées, l'effort d'épargne des cohortes nées après 1985 se traduirait par une nette amélioration des taux de remplacement. Sous l'hypothèse « H3 » d'un bouclage macroéconomique alternatif avec croissance endogène, le taux de remplacement y compris effort d'épargne de la cohorte la plus jeune (née en 1995) serait compris entre 69% et 54% avec un taux médian de 60%, soit supérieur de plus de 10 points à celui de la seule répartition (Graphique E5).

L'hypothèse « H2 » qui associe modèle de Solow et retour vers la moyenne détermine des taux de remplacement plus bas. Pour la même cohorte les taux seraient compris entre 65% et 54% pour un taux médian de 58%. Le risque de perte, qui concerne par construction 10% des rentes, serait semblable dans les deux hypothèses et resterait limité à environ un point.

A ce stade de nos recherches, il est prématuré de conclure, notamment parce que la valeur du paramètre ∅ (déterminant de l'élasticité de la production à la connaissance) est fixée arbitrairement. Toutefois les premiers enseignements des simulations sont intéressants et donnent une lecture différente de l'impact de la capitalisation retraite sur l'économie relativement au modèle néoclassique de base.

Graphique E5. Profil 90% : Taux de remplacement moyens (H+F) y.c. effort d'épargne



6.6.2. Effort d'épargne 5% : valeurs moyennes (H+F) pour quelques cohortes

Bouclage avec croissance endogène (H3) – 5%

	Rentes viagères - " fc. K^{Φ} - T.dep. OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% rentes maximum	0.8%	2.1%	6.5%	10.8%
Profil 99% rentes médianes	0.8%	2.1%	6.3%	8.8%
Profil 99% rentes minimum	0.8%	2.1%	6.1%	7.3%
Profil 95% rentes maximum	0.8%	2.1%	8.6%	15.6%
Profil 95% rentes médianes	0.8%	2.1%	6.7%	10.3%
Profil 95% rentes minimum	0.8%	2.0%	5.0%	6.4%
Profil 90% rentes maximum	0.8%	2.6%	11.4%	20.8%
Profil 90% rentes médianes	0.8%	2.1%	7.6%	11.9%
Profil 90% rentes minimum	0.8%	1.8%	4.7%	5.9%
Rentes fc. du cumul de l'épargne	0.8%	1.9%	5.6%	7.0%
	Taux de remp.+ Rentes viagères - " fc. K^{Φ} - T.dep. OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% Taux maximum	59.6%	56.4%	56.7%	59.0%
Profil 99% Taux médians	59.6%	56.4%	56.5%	57.0%
Profil 99% Taux minimum	59.6%	56.4%	56.3%	55.4%
Profil 95% Taux maximum	59.6%	56.4%	58.8%	63.8%
Profil 95% Taux médians	59.6%	56.4%	56.9%	58.5%
Profil 95% Taux minimum	59.6%	56.4%	55.2%	54.6%
Profil 90% Taux maximum	59.6%	57.0%	61.6%	69.0%
Profil 90% Taux médians	59.6%	56.5%	57.8%	60.1%
Profil 90% Taux minimum	59.6%	56.1%	54.9%	54.0%
Taux de remp. de la répartition	58.8%	54.4%	50.2%	48.2%
	TRI (H et F) : Répartition + épargne - " fc. K^{Φ} - T.dep. OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% TRI maximum	1.9%	1.9%	1.9%	1.9%
Profil 99% TRI médians	1.9%	1.9%	1.9%	1.8%
Profil 99% TRI minimum	1.9%	1.9%	1.8%	1.7%
Profil 95% TRI maximum	1.9%	1.9%	2.0%	2.2%
Profil 95% TRI médians	1.9%	1.9%	1.9%	1.9%
Profil 95% TRI minimum	1.9%	1.9%	1.8%	1.7%
Profil 90% TRI maximum	1.9%	1.9%	2.2%	2.4%
Profil 90% TRI médians	1.9%	1.9%	1.9%	1.9%
Profil 90% TRI minimum	1.9%	1.9%	1.8%	1.7%
TRI implicite de la répartition	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%

6.6.3. Effort d'épargne 3% : valeurs moyennes (H+F) pour quelques cohortes

Bouclage avec croissance endogène (H3) – 3%

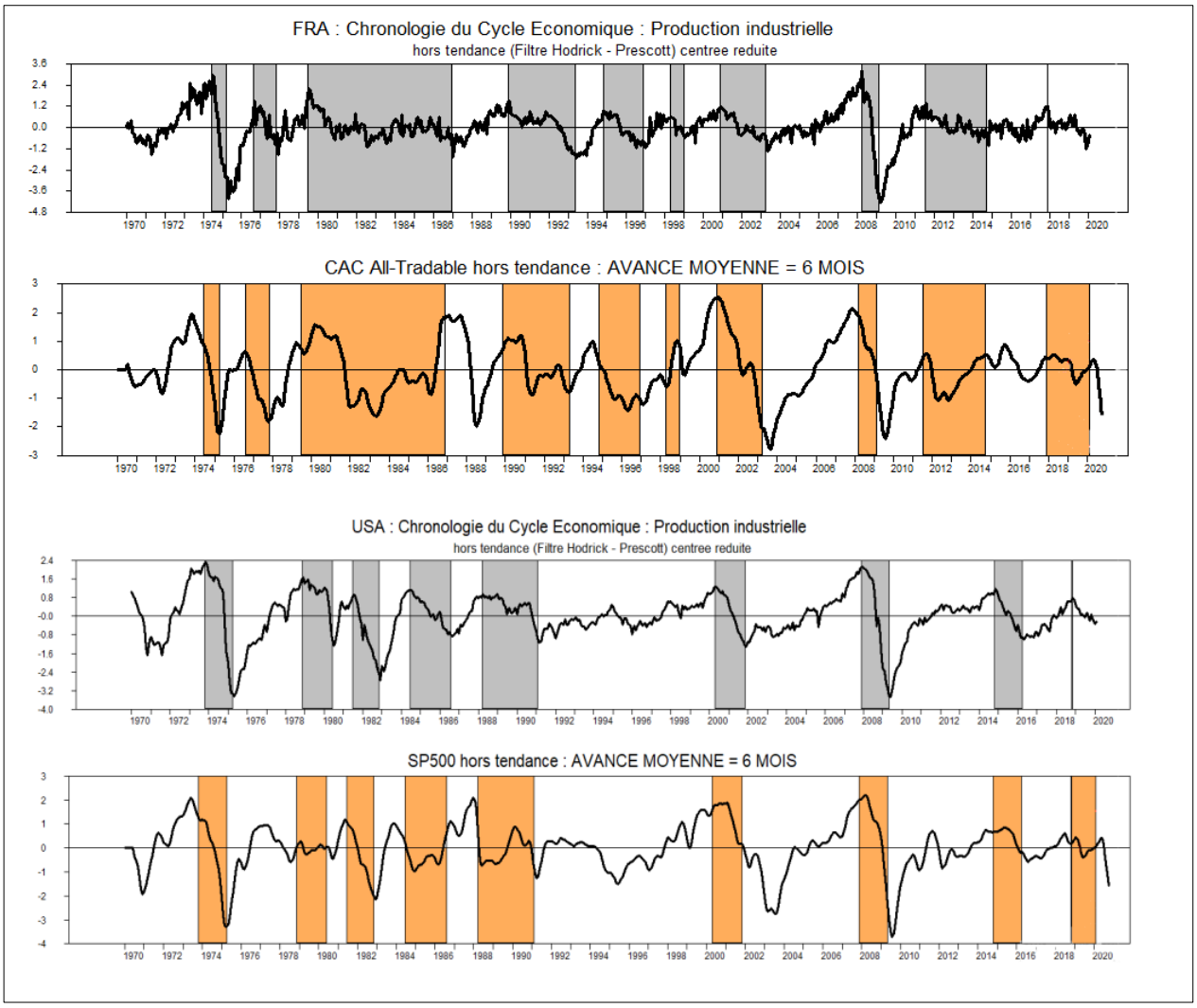
	Rentes viagères - " fc. K^{Φ} + T.dep. OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% rentes maximum	0.5%	1.2%	3.9%	6.5%
Profil 99% rentes médianes	0.5%	1.2%	3.8%	5.2%
Profil 99% rentes minimum	0.5%	1.2%	3.7%	4.3%
Profil 95% rentes maximum	0.5%	1.2%	5.1%	9.7%
Profil 95% rentes médianes	0.5%	1.2%	4.1%	6.2%
Profil 95% rentes minimum	0.5%	1.2%	3.0%	4.1%
Profil 90% rentes maximum	0.5%	1.7%	7.2%	13.0%
Profil 90% rentes médianes	0.5%	1.3%	4.6%	7.1%
Profil 90% rentes minimum	0.5%	1.0%	2.7%	3.2%
Rentes fc. du cumul de l'épargne	0.5%	1.1%	3.3%	4.2%
	Taux de remp.+ Rentes viagères - " fc. K^{Φ} + T.dep. OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% Taux maximum	59.3%	55.6%	54.1%	54.7%
Profil 99% Taux médians	59.3%	55.6%	54.0%	53.4%
Profil 99% Taux minimum	59.3%	55.6%	53.9%	52.4%
Profil 95% Taux maximum	59.3%	55.6%	55.3%	57.9%
Profil 95% Taux médians	59.3%	55.6%	54.3%	54.3%
Profil 95% Taux minimum	59.3%	55.6%	53.2%	52.2%
Profil 90% Taux maximum	59.3%	56.0%	57.4%	61.2%
Profil 90% Taux médians	59.3%	55.6%	54.8%	55.3%
Profil 90% Taux minimum	59.3%	55.4%	52.9%	51.4%
Taux de remp. de la répartition	58.8%	54.4%	50.2%	48.2%
	TRI (H et F) : Répartition + épargne - " fc. K^{Φ} + T.dep. OU Process"			
	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99% TRI maximum	1.9%	1.9%	1.9%	1.9%
Profil 99% TRI médians	1.9%	1.9%	1.9%	1.8%
Profil 99% TRI minimum	1.9%	1.9%	1.8%	1.8%
Profil 95% TRI maximum	1.9%	1.9%	2.0%	2.1%
Profil 95% TRI médians	1.9%	1.9%	1.9%	1.9%
Profil 95% TRI minimum	1.9%	1.9%	1.8%	1.7%
Profil 90% TRI maximum	1.9%	2.0%	2.1%	2.3%
Profil 90% TRI médians	1.9%	1.9%	1.9%	1.9%
Profil 90% TRI minimum	1.9%	1.9%	1.8%	1.7%
TRI implicite de la répartition	1.9%	1.8%	1.7%	1.6%

6.7. Annexe 7 : Production et cours boursiers : une bonne synchronisation des cycles

Si la dynamique des cours est régie par un processus de retour vers une tendance déterministe, on devrait s'attendre à l'existence d'une certaine connexion entre économie réelle et sphère financière. En effet, une phase d'expansion traduit une augmentation du niveau d'activité des entreprises, et correspond généralement à une croissance concomitante de la consommation des ménages. Dans un tel contexte, la valeur des actions des entreprises devrait augmenter, notamment parce que les perspectives de dividendes attachés à la possession d'actions augmentent.

Afin de vérifier empiriquement l'assertion, les cycles de la production industrielle (l'IPI est utilisée comme « proxy » du PIB à plus haute fréquence) sont comparés à ceux des cours boursiers. Les indices boursiers retenus sont le CAC All-Tradable pour la France et le S&P500 pour les Etats-Unis (Graphique C1).

Graphique C1- Production et cours boursiers



Afin établir une chronologie des cycles, on a classiquement utilisé un filtre de HP, puis l'algorithme de Bry et Boschan (1971) pour dater les phases de récession. L'exercice conduit à partir de janvier 1970 détermine une assez bonne concordance cyclique entre la production industrielle et l'évolution des cours boursiers avancés de 6 mois.

C'est avec ce décalage moyen que la corrélation entre les séries est la meilleure (respectivement 0.53 et 0.65 en France et aux Etats-Unis). A l'exception notable du krach d'octobre 1987, lié non à un retournement de conjoncture mais à un relèvement brutal des taux d'intérêt outre Atlantique destiné à enrayer la baisse du dollar, les cours de bourse sont donc des indicateurs avancés de l'activité économique.

Il n'en demeure pas moins que la croissance est bien une variable causale des cours boursiers. Le fait que les marchés financiers anticipent la croissance n'inverse pas la causalité comme il en va des prévisions météorologiques et de la météo. Ces résultats sont un argument à l'encontre de l'hypothèse de marche aléatoire des marchés boursiers, puisque les prix des actifs risqués semblent dépendre des anticipations formulées sur la croissance économique future.

Références bibliographiques

Arrondel L., Masson A., 2016, « Les épargnants français dans la Grande Récession », Préférences, anticipations et choix de portefeuille, document de travail, Paris School of Economics.

Arrondel, L., Masson, A., 2017, « La chute du taux d'actionnaires français depuis la crise : une énigme ? », Opinions et débats, n° 17, Labex-Louis Bachelier.

Arrow, K.J., 1962, « The Economic implications of Learning by Doing », Review of Economic Studies, n°29, june.

Auerbach, A. et Kotlikoff L., 1987, Dynamic Fiscal Policy, London: Cambridge University Press.

Auerbach, A. J., Gokhale, J., Kotlikoff, L. J., 1991, «Generational accounts : A meaningful alternative to deficit accounting», Tax Policy and the Economy, vol. 5, p. 55–110.

Avouyi-Dovi, S. et Matheron, J., 2003, « Interactions between business cycles, stock market cycles and interest rates: the stylised facts », Financial Stability Review, Banque de France, issue 3, pages 80-99, November.

Bachelier, L. ,1900, Théorie de la spéculation, Gauthier-Villars.

Balvers, R., Wu, Y., et Gilliland, E., 2000, «Mean reversion across national stockmarkets and parametric contrarian investment strategies», The Journal of Finance, vol. 55, no 2, p. 745–772.

Barberis, N., 2000, « Investing for the long run when returns are predictable ». Journal of Finance, 55, 225–64.

Barro R.J., Sala-I-Martin, X. (1996) « La croissance économique », Mc Graw-Hill / Ediscience.

Baxter, M., King, R., 1999, « Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series », Review of Economics and Statistics, 81(4) : 575-593.

Bec, F., Gollier, C. ,2009, «Assets returns volatility and investment horizon : The french case». CESifo Working Paper Series 2622, CESifo Group Munich.

Blanchet, D., 1992, « Retraites et croissance à long terme : un essai de simulation », Économie et Prévision, n° 105.

Blanchet D., Montfort J.-A.,1994, « Pensions and Generational Histories in a Simple Demoeconomic Model », Seminar on « Intergenerational Economic Relations and Demographic Change », Hawaii, USA.

Bodie, Z., Merton, R. C., Samuelson, W. F. ,1992, «Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model», Journal of economic dynamics and control, vol. 16, no3-4, p. 427–449.

Bodie, Z. ,1995, «On the risk of stocks in the long run», Financial Analysts Journal, vol. 51, no 3, p. 18–22.

Borges, M. R. ,2010, «Efficient market hypothesis in european stock markets», The European Journal of Finance, vol. 16, no 7.

Broertjes, P. ,2010, «Dynamic adjustment of stock prices to the fundamental value. An error correction approach. Influence of market imperfections on recovery strategies», Utrecht University MSc Thesis.

Bry, G., Boschan, C. (1971), « Cyclical Analysis of Time Series : Selected Procedures and Computer Programs », National Bureau of Economic Research, Inc.

Burton, M. G. ,2003, A random walk downWall Street,WWNorton & Company. Completely revised and updated Eighth Edition.

Campbell, J. Y., Viceira, L. M. ,2005, «The term structure of the risk–return trade-off», Financial Analysts Journal, vol. 61, no 1, p. 34–44.

Carroll, C. D., 1997, «Buffer-stock saving and the life cycle/permanent income hypothesis », The Quarterly Journal of Economics, vol. 112, no 1, p. 1.

Chan, K. C., Gup B. E., Pan, M.-S. ,1997, «International stock market efficiency and integration: A study of eighteen nations», Journal of Business Finance & Accounting, vol. 24, no 6, p. 803–813

Cocco, J. F., Gomes, F. J., et Maenhout, P. J., 2005, «Consumption and portfolio choice over the life cycle», The Review of Financial Studies, vol. 18, no 2

Conseil d'orientation des retraites, « Épargne retraite : que change la loi Pacte ? » Réunion du 18 mars 2021. https://www.cor-retraites.fr/node/556.

Christiano, L. et Fitzgerald, T. (2003), « The Band Pass Filter », International Economic Review, 44,p. 435-465

Damette O. et Rabah Z., 2010, « La datation du cycle français : une approche probabiliste », Revue française d'économie, 24, p. 135-163.

Ducoudré, B., Sampognaro, R., Timbeau, X., 2019, « Taux d'intérêt durablement bas et orientation de la politique budgétaire ». Revue de l'OFCE, Presses de Sciences-Po, vol. 163(3), pages 281-301.

Dufourcq, N., 1994, « L'état providence sélectif », notes de la fondation Saint - Simon, avril.

Éboué, C., 2021, Finance, banque, microfinance : Où va la richesse créée ? Éditions Larcier, 3 juin, 762 pages.

Fama, E. F., 1965, «The behavior of stock-market prices», The journal of Business, vol. 38, no 1, p. 34–105.

Fama, E. F., French, K. R. ,1988, «Permanent and temporary components of stock prices», Journal of Political Economy, vol. 96, no 2, p. 246–273.

Fama, E., Fisher, L., Jensen, M., Roll R. ,1969, «The adjustment of stock prices to new information », International Economics Review, pp 2-21.

Hamayon, S., Legros, F., 2014, « Réforme des retraites 2013 : la contribution implicite du pouvoir d'achat des retraités », Revue de l'OFCE, no. 137.

Hamayon, S., Legros. F., Pradat. Y., 2016, « Non Gaussian returns and pension funds asset allocation », Review of Accounting and Finance, Vol. 15 Iss 4 pp. 416.

Hamayon, S., Legros. F., Pradat. Y., 2020, « Epargne retraite : stratégies d'allocation et dynamique des marchés financiers » in revue de l'OFCE n° 170 : Construire un système de retraite juste et soutenable.

Hamayon, S., Legros. F., Pradat. Y., 2021, « Epargne-retraite : pourquoi prendre des risques ? » Chapitre 10. Finance Banque Microfinance : Où Va La Richesse Créée? Sous la direction de Chicot Eboue. Avril. Editions Larcier-Bruylant, Bruxelles.

Hawawini, G.A., Michels P.A. ,1984, «European Equity Markets: Risk, Return and Efficiency», New York and London: Garland Publishing, Inc.

Jorion, P. ,2003, «The Long-Term Risks of Global Stock Markets», Financial Management, vol. 32, n° 4.

Kim, M. J., Nelson, C. R., Startz, R. ,1991, «Mean reversion in stock prices? A reappraisal of the empirical evidence», The Review of Economic Studies 58(3), 515–528.

Kimball, M. S. ,1990, «Precautionary saving in the small and in the large», Econometrica, vol. 58, no 1, p. 53–73.

Kimball, M. S. ,1993, «Standard risk aversion», Econometrica, vol. 61, no 3, p. 589–611.

Lavigne, A., 2010, « Etudier l'équité intergénérationnelle » in La norme - Jacques Teboul - 168-184.

Le Bris, D., Hautecoeur, P.C., 2010, « A challenge to the Triumphant Optimists, A Blue Chips Index for the Paris Stock Exchange (1854-2007) », Financial History Review, December 2010, vol. 27, no. 2, pp. 141-183.

Le Cacheux J. et Touzé V., 2002, « Les modèles d'équilibre général calculable à générations imbriquées : enjeux, méthodes et résultats », Revue de l'OFCE, 80, janvier.

Lo, A.W., and MacKinlay, A.C. ,1988, «Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test», Review of Financial Studies, volume 1, No 1, pp. 41-66.

Lucas R.E. Jr (1988), « On the Mechanics of Development Planning » Journal of Monetary Economics, n°22-1, juillet.

Lockwood, L. M., 2014, «Incidental bequests : Bequest motives and the choice to selfinsure late-life risks», Working Paper 20745, National Bureau of Economic Research.

Michaelides, A., & Zhang, Y. ,2017, «Stock Market Mean Reversion and Portfolio Choice over the Life Cycle», Journal of Financial and Quantitative Analysis, 52(3), 1183-1209.

Modigliani, F., and Brumberg, R.H., 1954, « Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data ». In: Kurihara, K.K., Ed., Post-Keynesian Economics, Rutgers University Press, New Brunswick, 388-436.

Nardi, M. D., French, E., et Jones, J. B., 2010, «Why do the elderly save? the role of medical expenses», Journal of Political Economy, vol. 118, no 1, p. 39–75.

Poterba, J. M., et Summers, L. H., 1988, «Mean reversion in stock prices : Evidence and implications», Journal of financial economics, vol. 22, no 1, p. 27–59.

Pradat, Y., 2017, Retraite et risque financier. Thèse de doctorat Economies et finances - Université Paris-Dauphine. PSL Research University.

Hodrick, R., et Prescott, E. (1981), «Post-war U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation», Working Paper, Carnegie-Mellon, University. Reprinted in Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 29, No. 1, February 1997.

Romer, P.M., 1986, « Increasing returns and Long-Run Growth » Journal of Political Economy, n°94-5, october.

Sewell, M. ,2012, «The efficient market hypothesis : Empirical evidence», International Journal of Statistics and Probability, vol. 1, no 2, p. 164.

Siegel, J. J. 2014, Stocks for the Long Run 5 : The Definitive Guide to Financial Market Returns & Long-Term Investment Strategies, McGraw Hill Professional.

Solow, R., 1956, « A Contribution to the Theory of Economic Growth », Quarterly Journal of Economics, February.

Shiller R. (2000), Irrational Exuberance, Princeton, Princeton University Press.

Spierdijk, L., Bikker, J. A. et van den Hoek, P., 2012, « Mean reversion in international stock markets: An empirical analysis of the 20th century », Journal of International Money and Finance. 31, 2, p. 228-249 22 p.

Stangeland, D. A., et Turtle, H. J., 1999, «Time diversification : Fact or fallacy», Journal of Financial Education, p. 1–13.

Thierfelder, C., 2015, «The trending ornstein-uhlenbeck process and its applications in mathematical finance», Mathematical Finance.

Wilkie, D. (2001), «On the risk of stocks in the long run : a response to zvi bodie», in Proceedings of the 11th International AFIR Colloquium, p. 741–762.