



**HAL**  
open science

## Planimètres, intégraphes, tractoriographes : les instruments de la géométrie transcendante

Dominique Tournès, Isabelle Voillequin, Claude Voillequin

### ► To cite this version:

Dominique Tournès, Isabelle Voillequin, Claude Voillequin. Planimètres, intégraphes, tractoriographes : les instruments de la géométrie transcendante. Géométries d'hier à demain : pratiques, méthodes, enseignement, May 2019, Poitiers, France. pp.185-202. hal-03425877

**HAL Id: hal-03425877**

**<https://hal.science/hal-03425877>**

Submitted on 5 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

# Planimètres, intégraphes, tractoriographes : les instruments de la géométrie transcendante

## Introduction

Après la naissance du calcul infinitésimal, les mathématiciens et les ingénieurs ont cherché à concevoir des instruments mécaniques pour effectuer concrètement les opérations du nouveau calcul et construire d'un mouvement continu les courbes transcendentes désormais admises en géométrie<sup>1</sup>. En 1693, Leibniz lui-même a donné le schéma d'une sorte d'intégraphe universel permettant de réaliser les quadratures et de résoudre le problème inverse des tangentes (Leibniz, 1693). En fait, c'est surtout au XIX<sup>e</sup> siècle qu'ont été inventés, fabriqués et diffusés des instruments mécaniques de précision au service de la géométrie transcendante (Jacob, 1911 ; Morin, 1913). Jusque dans les années 1970, ils ont été utiles aux scientifiques et aux ingénieurs pour calculer les aires des surfaces planes et tracer les courbes intégrales des équations différentielles. L'objectif de notre atelier était de faire découvrir aux participants quelques-uns de ces instruments. Nous leur avons d'abord présenté le fonctionnement d'un planimètre à cône à l'aide de simulations numériques, puis nous leur avons fait manipuler de vrais planimètres polaires pour calculer des aires. Dans une seconde partie, ils ont pu se livrer à des expérimentations à l'aide d'un intégraphe et d'un tractoriographe construits pour l'occasion par Claude Voillequin, et ils se sont servi d'une tractoire de cercle, tracée par le tractoriographe, pour réaliser une construction exacte de l'heptagone régulier. Ne pouvant rendre compte en totalité de l'aspect vivant et interactif de l'atelier, cet article se propose principalement de décrire les quatre instruments étudiés, de les replacer dans leur contexte historique et de fournir une justification mathématique de leur fonctionnement.

## Planimètre à cône

Historiquement, le planimètre à cône est le premier instrument exact de mesure des surfaces. L'idée d'utiliser comme mécanisme intégrateur une roulette qui peut être déplacée le long d'une génératrice d'un cône est due à un ingénieur bavarois, Johann Martin Hermann (1785-1841). Inventé vers 1814, le planimètre de Hermann est toutefois resté à l'état de prototype (Fischer, 2017, p. 3502-3504). Ce n'est que dans les années 1830 que le principe de l'appareil a été repris par plusieurs fabricants pour des productions en petites séries. À partir des années 1850, le planimètre à cône a été remplacé par le planimètre à disque, dont la théorie est la même si l'on considère un disque comme un cône d'angle au sommet plat. Cependant, ces instruments n'ont eu qu'un succès limité en raison de leur coût élevé. Ils ont été rapidement éclipsés par le planimètre polaire (voir section suivante), beaucoup moins cher et plus simple d'utilisation.

## Description du planimètre à cône

Les divers éléments d'un planimètre à cône sont schématisés sur la figure 1. Le support est l'élément de référence, immobile par rapport à la table. La feuille avec le tracé de la courbe  $\mathcal{C}$

---

1. Du point de vue épistémologique, la conception d'instruments apparaissait essentielle pour légitimer l'emploi de ces nouvelles courbes (Bos, 1988 ; Tournès, 2009).

est fixée au support. L'extrémité  $M$  du stylet lié au porte-stylet décrit la courbe  $\mathcal{C}$ . Le chariot se déplace, par rapport au support, en translation parallèlement à  $Ox$ .

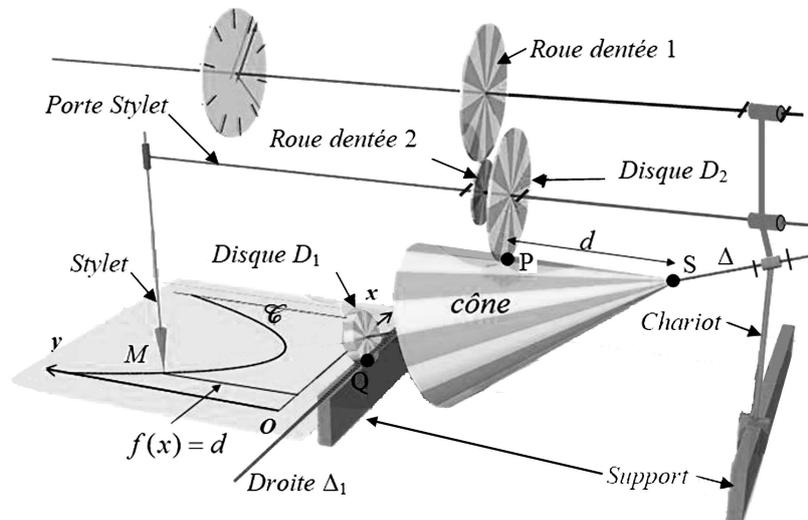


FIGURE 1 – Schéma d'ensemble d'un planimètre à cône (figure reprise et modifiée du site Images des mathématiques : <https://images.math.cnrs.fr/Un-planimetre-a-cone.html>)

Le cône de sommet  $S$ , muni d'un disque  $D_1$ , tourne par rapport au chariot autour de l'axe  $\Delta$ . L'inclinaison de l'axe est choisie de façon que la génératrice supérieure du cône soit horizontale. Le disque  $D_1$ , en contact en  $Q$  avec le support, roule sans glisser sur celui-ci. Le point  $Q$  décrit la droite  $\Delta_1$ .

Le porte-stylet se déplace, par rapport au chariot, en translation parallèlement à  $Oy$  (figure 2). Le disque  $D_2$ , en contact en  $P$  avec la génératrice supérieure du cône, roule sans glisser sur le cône et glisse le long de cette génératrice. La roue dentée 2 est solidaire de  $D_2$ . L'ensemble du disque  $D_2$  et de la roue 2 tourne autour du porte-stylet sans translation : quand le stylet est à la distance  $d$  de l'axe  $Ox$ , le point  $P$  est à la distance  $d$  du sommet  $S$  du cône. En particulier, quand le stylet se trouve sur l'axe  $Ox$  (cas  $d = 0$ ), le point  $P$  est confondu avec le sommet du cône, donc il n'y a pas de rotation du disque  $D_2$ .

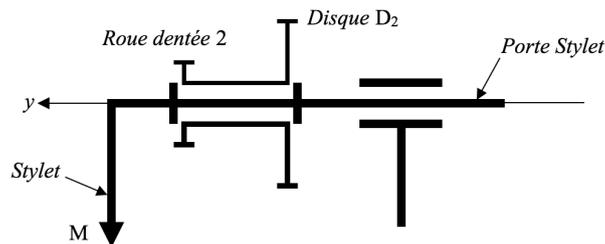


FIGURE 2 – Configuration du porte-stylet

La roue dentée 1 tourne autour d'un axe parallèle à  $Oy$  et lié à l'aiguille. L'ensemble des roues 1 et 2 constitue un réducteur de vitesse. Le cadran, quant à lui, est lié au support.

## Fonctionnement du planimètre à cône

Supposons que le stylet passe du point  $M_1$  au point  $M_2$  en suivant le parcours  $M_1K_1M_2$  (figure 3).

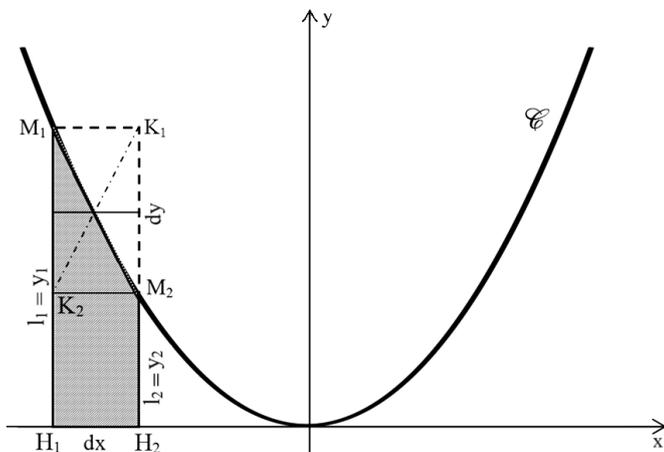


FIGURE 3 – Mouvement élémentaire du stylet le long de la courbe  $\mathcal{C}$

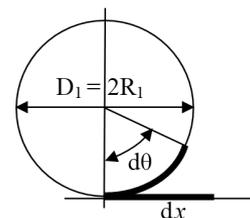


FIGURE 4 – Rotation élémentaire du disque  $D_1$

Pour le segment  $M_1K_1$ , le porte-stylet se déplace de  $dx$  dans la direction  $Ox$ , entraînant un déplacement identique du chariot par rapport au support. L'axe du cône, entraîné en translation par le chariot, se déplace aussi de  $dx$ . Il y a roulement sans glissement en  $Q$  au contact entre le disque  $D_1$  de rayon  $R_1$  et la droite  $\Delta_1$ , donc il y a proportionnalité entre l'angle de rotation  $d\theta$  du cône par rapport au chariot et le déplacement  $dx$  du porte-stylet par rapport au support :  $dx = R_1 d\theta$  (figure 4).

Pour le segment  $K_1M_2$ , le porte-stylet se déplace dans la direction  $Oy$  de  $-dy$  par rapport au chariot, entraînant ainsi une translation de l'ensemble du disque  $D_2$  et de la roue 2 de  $-dy$  par rapport au cône. Le point  $P$ , point de contact entre le disque 2 et le cône, se déplace le long de la génératrice supérieure du cône, modifiant ainsi le rayon du cercle de roulement sans glissement entre le disque 2 et le cône.

Pour un parcours entre  $M_1$  et  $M_2$  en suivant la courbe  $\mathcal{C}$ , il y aura un déplacement du point  $P$  le long de la génératrice supérieure de  $P_1$  à  $P_2$  (figure 5) et, par suite, une variation du diamètre de la section droite du cône sur laquelle roule le disque  $D_2$ , qui passera de  $d_1$  à  $d_2$ . Comme  $dx$  est infiniment petit, la rotation du disque  $D_2$  est la même que s'il avait roulé constamment sur un cercle de diamètre  $d_{\text{moy}}$ , moyenne de  $d_1$  et  $d_2$ , ce qui revient à confondre la corde et la courbe. Simultanément, le chariot se déplace de  $dx$ , donc le cône tourne de  $d\theta = \frac{2dx}{D_1}$  (pour ne pas multiplier les notations, on note  $D_1$  le diamètre du disque  $D_1$  et  $D_2$  celui du disque  $D_2$ ).

Comme  $\frac{d_1}{D} = \frac{l_1}{L}$ , on a  $d_1 = \frac{D}{L} l_1$  et, de même,  $d_2 = \frac{D}{L} l_2$ , d'où  $d_{\text{moy}} = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{D}{L} \frac{y_1 + y_2}{2}$ . Par ailleurs, le disque  $D_2$  roule sans glissement sur le cône en  $P$  (figure 6), donc il y a égalité des arcs :  $\frac{d_{\text{moy}}}{2} d\theta = \frac{D_2}{2} d\alpha$ . On obtient finalement :

$$d\alpha = \frac{d_{\text{moy}}}{D_2} d\theta = \frac{D}{LD_2} \frac{y_1 + y_2}{2} d\theta = \frac{D}{LD_2} \frac{y_1 + y_2}{2} \frac{2dx}{D_1} = \frac{2D}{LD_1 D_2} \frac{y_1 + y_2}{2} dx.$$

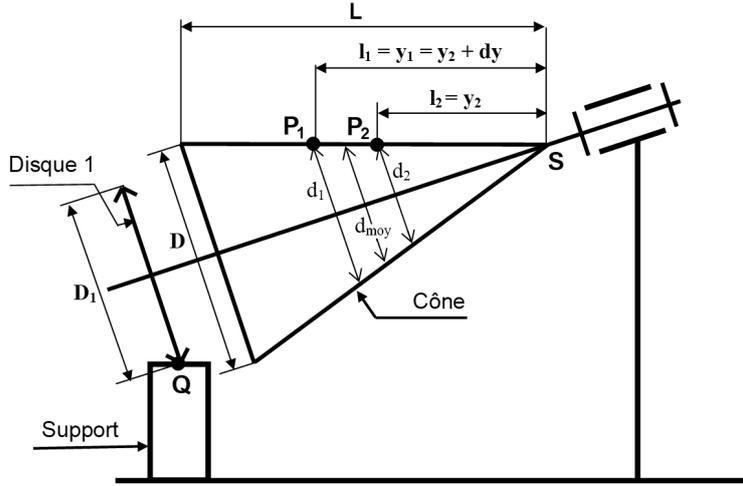


FIGURE 5 – Mouvement élémentaire du disque  $D_2$  le long de la génératrice du cône

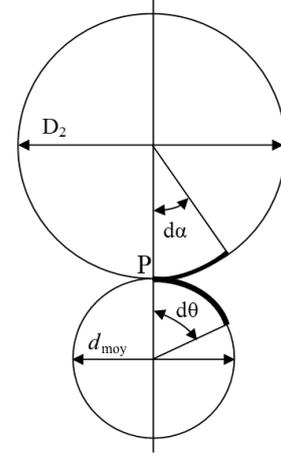


FIGURE 6 – Rotation élémentaire du disque  $D_2$  au contact du cône

Supposons maintenant que le stylet parcourt le contour  $M_1M_2H_2H_1M_1$  en suivant la courbe  $\mathcal{C}$  entre  $M_1$  et  $M_2$  (figure 3). De  $M_1$  à  $M_2$ , le disque  $D_2$  tourne de l'angle  $d\alpha$  calculé précédemment. De  $M_2$  à  $H_2$ , le point  $P$  passe de  $P_2$  à  $S$  en glissant sur la génératrice du cône (figure 5), donc il n'y a pas de rotation du disque  $D_2$ . De  $H_2$  à  $H_1$ , le chariot se déplace de  $-dx$ , le cône tourne de  $d\theta = \frac{-2dx}{D_1}$ , mais le disque  $D_2$  ne tourne pas, car  $P$  est en  $S$ . Enfin, de  $H_1$  à  $M_1$ , le point  $P$  passe de  $S$  à  $P_1$  en glissant sur la génératrice du cône, donc le disque  $D_2$  ne tourne pas non plus. Au total, le disque  $D_2$  aura tourné de  $d\alpha$ . Soit  $k$  le rapport de réduction du réducteur de vitesse constitué des roues dentées 1 et 2, et soit  $d\beta$  l'angle de rotation de l'aiguille pendant le parcours du contour  $M_1M_2H_2H_1M_1$ . Cet angle vaut

$$d\beta = \frac{d\alpha}{k} = \frac{2D}{kLD_1D_2} \frac{y_1 + y_2}{2} dx.$$

Le coefficient  $\frac{2D}{kLD_1D_2} = C$  est une constante de construction de l'appareil et  $\frac{y_1 + y_2}{2} dx$  est l'aire  $\mathcal{A}$  de la zone hachurée sur la figure 3. Au final, on a  $d\beta = C \times \mathcal{A}$ , c'est-à-dire que l'angle de rotation de l'aiguille est proportionnel à l'aire de la surface dont le contour est décrit par l'extrémité du stylet<sup>2</sup>.

## Planimètre polaire

En 1854, l'ingénieur suisse Jakob Amsler (1823-1912) est parvenu à innover par rapport aux planimètres à cône et à disque dont nous avons parlé précédemment, en inventant un nouvel

2. La description détaillée que nous avons faite du planimètre à cône peut être comprise par un élève de terminale ayant choisi la spécialité Sciences de l'ingénieur, pour qui les notions de liaison mécanique, d'engrènement et de roulement sans glissement font partie des acquis. Dans le cas d'autres élèves, une présentation préalable succincte de ces notions leur permettra de suivre pas à pas la démonstration. Accompagnée de schémas, cette description pourrait donner lieu à la construction, avec une imprimante 3D, d'un tel appareil dans quelques lycées en vue d'expérimentations.

instrument qu'il a baptisé lui-même « planimètre polaire ». Très simple, l'appareil se réduit à deux bras articulés entre eux et à une roulette de mesure fixée sur l'un des bras. Une extrémité de l'un des bras, le « pôle », reste fixe pendant que l'extrémité de l'autre bras, celui qui porte la roulette, parcourt le contour de la surface à mesurer. Léger, fiable et peu coûteux, le planimètre polaire a immédiatement connu un succès triomphal. Dès 1854, Amsler a ouvert une entreprise personnelle à Schaffhausen, en Suisse, pour le produire en grande série, puis d'autres fabricants lui ont emboîté le pas. On estime qu'environ 1,5 million de planimètres polaires ont été commercialisés entre 1854 et la fin du XX<sup>e</sup> siècle (Fischer, 2017, p. 3506).

## Description et fonctionnement du planimètre polaire

L'un des planimètres polaires utilisés pour l'atelier a été fabriqué par la maison Coradi de Zurich (figure 7). Sur la figure 8, qui illustre son fonctionnement, on voit un pôle fixe  $O$  (dont la fixité est assurée par une masse), un pointeur  $M$  qui suit le contour  $\mathcal{C}$  de la surface dont on veut calculer l'aire, deux bras articulés en  $A$ , le bras polaire  $OA$  de longueur  $a$  et le bras traceur  $AM$  de longueur  $b$ , et une roulette intégrante de rayon  $r$  perpendiculaire au bras  $AM$ .



FIGURE 7 – Planimètre polaire de marque Coradi

Lorsque le pointeur se déplace le long du contour  $\mathcal{C}$ , la roulette tourne. Le nombre de tours est proportionnel à la composante perpendiculaire à  $AM$  du déplacement du pointeur. Une fois la courbe parcourue en entier, le nombre de tours de la roulette est proportionnel à la longueur de la courbe. Enfin, par un calcul au cours duquel on utilise le théorème de Green qui permet de transformer une intégrale curviligne en une intégrale double (voir section suivante), on montre que le nombre de tours de la roulette est proportionnel à l'aire du domaine délimité par  $\mathcal{C}$ .

## Justification mathématique et mécanique du planimètre polaire

Un petit déplacement  $\overrightarrow{dM}$  du pointeur le long de  $\mathcal{C}$  génère un petit déplacement  $\overrightarrow{dG}$  du point de contact de la roulette, qui est la somme d'une composante sur  $\vec{u}$  qui n'induit aucune rotation de la roulette et d'une composante sur  $\vec{v}$  qui vaut  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{dG}$  et qui induit une rotation de  $d\alpha$  telle que  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{dG} = r d\alpha$ , selon la propriété du roulement sans glissement. Par conséquent, le déplacement total de  $M$  est

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dG} = \int_{\mathcal{C}} r d\alpha = 2\pi r n,$$

où  $n$  est le nombre de tours de la roulette.

En posant  $\vec{u} = \frac{1}{b}(x - x_A, y - y_A)$  et  $\vec{v} = \frac{1}{b}(-(y - y_A), x - x_A)$ , le déplacement de  $M$  s'écrit

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{1}{b} \int_{\mathcal{C}} -(y - y_A) dx + (x - x_A) dy.$$

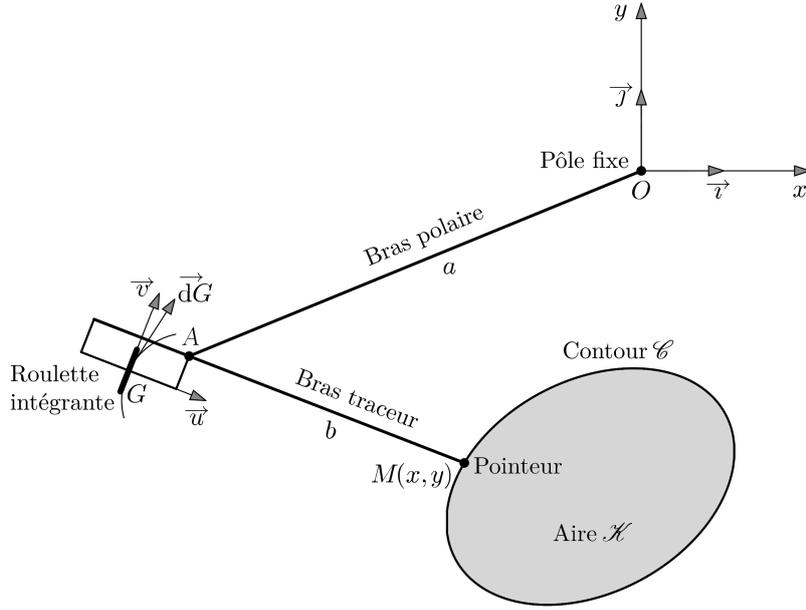


FIGURE 8 – Fonctionnement d'un planimètre polaire

Le théorème de Green permet de transformer une intégrale curviligne le long de  $\mathcal{C}$  en une intégrale double sur le domaine  $\mathcal{D}$  délimité par  $\mathcal{C}$ . Dans le cas général, il s'écrit

$$\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Pour la situation qui nous intéresse, le déplacement de  $M$  devient

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{1}{b} \iint_{\mathcal{D}} \left( \left( 1 - \frac{\partial x_A}{\partial x} \right) - \left( -1 + \frac{\partial y_A}{\partial y} \right) \right) dx dy = \frac{1}{b} \iint_{\mathcal{D}} \left( 2 - \frac{\partial x_A}{\partial x} - \frac{\partial y_A}{\partial y} \right) dx dy.$$

Utilisons maintenant les relations  $x_A^2 + y_A^2 = a^2$  et  $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = b^2$ . En les dérivant par rapport à  $x$ , puis par rapport à  $y$ , on obtient les systèmes

$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial x} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial x} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = x - x_A \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial y} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial y} = 0 \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial y} = y - y_A \end{cases}$$

La résolution de ces deux systèmes donne  $\frac{\partial x_A}{\partial x} = \frac{x_A y_A - x y_A}{x_A y - x y_A}$  et  $\frac{\partial y_A}{\partial y} = \frac{x_A y - x_A y_A}{x_A y - x y_A}$ , d'où  $\frac{\partial x_A}{\partial x} + \frac{\partial y_A}{\partial y} = 1$  et

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{1}{b} \iint_{\mathcal{D}} dx dy.$$

En fin de compte, l'aire  $\mathcal{K}$  du domaine  $\mathcal{D}$  est égale à

$$\mathcal{K} = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = b \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = 2\pi b r n.$$

Ainsi, à un coefficient de proportionnalité près dépendant du planimètre, l'aire du domaine délimité par  $\mathcal{C}$  est mesurée par le nombre de tours de la roulette.

## Utilisation d'un planimètre polaire

Pendant l'atelier, les participants disposaient d'un planimètre pour deux. Leur premier travail a consisté à apprendre à lire un résultat donné par le planimètre sous la forme d'un nombre à quatre chiffres (figure 9) : un disque plat comptabilise le nombre de tours complets ; la roulette proprement dite comporte cent graduations, ce qui permet d'accéder aux chiffres des dixièmes et des centièmes de tour ; enfin un vernier permet d'obtenir le chiffre des millièmes de tour. Sur l'exemple de la figure 10, la lecture fournit le nombre 0653 qui signifie que la roulette a tourné de 653 millièmes de tour.

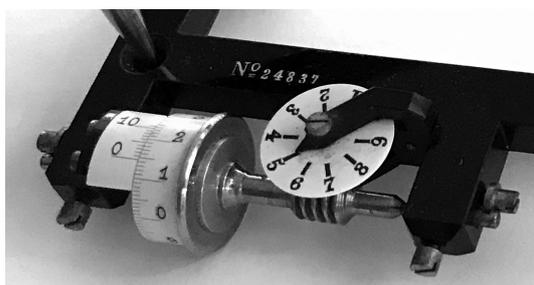


FIGURE 9 – Disque plat, roulette et vernier

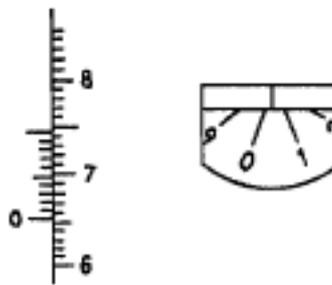


FIGURE 10 – Exemple de lecture : 0653

Pour procéder à un calcul d'aire, on choisit un point sur le contour du domaine à mesurer, on y place le pointeur, et on lit le planimètre. Cette lecture est notée dans un tableau sur une ligne « Première lecture ». On parcourt ensuite tout le contour dans le sens des aiguilles d'une montre, régulièrement et sans s'arrêter. À la fin du déplacement, on doit se retrouver exactement sur le point de départ. On relit le planimètre et on porte le résultat dans le tableau sur une ligne « Deuxième lecture ». La différence des deux lectures est portée sur une ligne « Différence » : c'est le résultat de la mesure. Il serait bien sûr possible de régler le planimètre au départ sur 0000 et de ne faire qu'une lecture, mais la pratique montre qu'il est plus rapide de ne pas faire de remise à zéro.

Après cette première manipulation, on déplace légèrement la masse pour que la roulette suive un autre itinéraire dans de bonnes conditions et on recommence le planimétrage de la même surface, puis on déplace une deuxième fois la masse et on fait une troisième fois la mesure. Si l'un des résultats est très différent des deux autres, on peut soupçonner qu'il est dû à une mauvaise manipulation ou une mauvaise lecture ; dans ce cas, on le supprime et on recommence. Une fois qu'on a obtenu trois mesures cohérentes, leur moyenne, considérée comme le résultat final, est conservée dans la ligne « Moyenne ».

À titre d'exemple, les tableaux ci-dessous donnent les résultats obtenus par un participant pour un carré de côté 3 cm (à gauche), pris comme surface de référence, et pour un cercle de rayon 3 cm (à droite).

Première lecture	0983	1491	1577
Deuxième lecture	0893	1400	1487
Différence	90	91	90
Moyenne	90,33		

Première lecture	1572	2096	2637
Deuxième lecture	1288	1813	2355
Différence	284	283	282
Moyenne	283		

Sachant que l'aire du carré est  $9 \text{ cm}^2$ , on en déduit que l'aire du cercle vaut  $\frac{283}{90,33} \times 9 \text{ cm}^2 \approx 28,20 \text{ cm}^2$ . La valeur exacte étant  $\pi \times 9 \text{ cm}^2 \approx 28,27 \text{ cm}^2$ , cela donne une première idée de la précision du planimètre. Il est probable que dans le passé, des utilisateurs expérimentés se servant de planimètres neufs et bien réglés – ce qui n'était pas le cas dans l'atelier – pouvaient faire mieux.

## Intégraphe

Un intégraphe est un instrument qui, à partir d'une courbe  $y = f(x)$  donnée graphiquement et d'un point  $(x_0, y_0)$  pris comme point de départ, trace d'un trait continu la courbe intégrale  $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$ . Les premiers modèles d'intégraphes ont été conçus dans les années 1878-1879 par le mathématicien et ingénieur polonais Bruno Abdank-Abakanowicz (1852-1900). Ce dernier s'est installé à Paris en 1881 après que son pays, partagé entre la Prusse, la Russie et l'Autriche, eut perdu son indépendance. C'est là qu'il a poursuivi ses recherches, qui ont fait l'objet, quelques années plus tard, d'un livre de synthèse intitulé *Les intégraphes. La courbe intégrale et ses applications* (Abdank-Abakanowicz, 1886). Ses instruments les plus aboutis ont été fabriqués et commercialisés par la maison Coradi de Zurich. Par ailleurs, il convient de mentionner qu'un ingénieur anglais, Charles Vernon Boys (1855-1944), a lui aussi trouvé le principe de l'intégraphe en 1881, de manière indépendante, mais son invention est restée à l'état de prototype.

### Principe de l'intégraphe

La figure 11 illustre le principe de fonctionnement d'un intégraphe. Le chariot  $SmT$ , de largeur fixe, se déplace en translation le long de l'axe des abscisses. Prenons  $Sm$  comme unité de longueur, soit  $Sm = 1$ . Avec un pointeur  $M$ , astreint à rester à l'intersection des tiges  $mT$  et  $SM$ , on suit une courbe donnée  $\mathcal{C}$ , d'équation  $y = f(x)$ , préalablement construite sur la feuille de papier. À chaque instant, la pente de la tige  $SM$  est égale à  $\frac{mM}{Sm} = \frac{f(x)}{1} = f(x)$ .

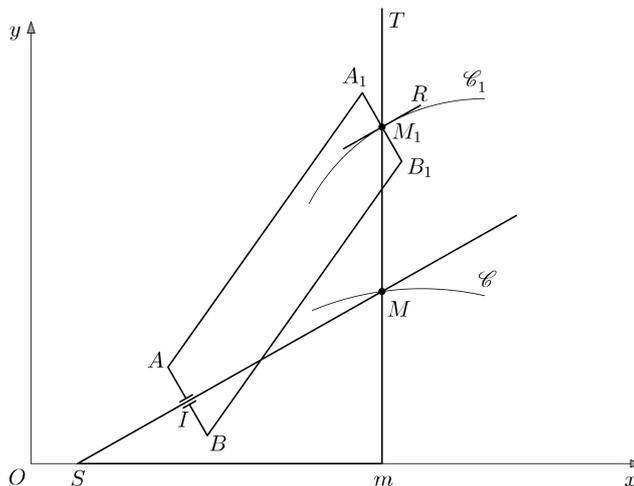


FIGURE 11 – Principe de l'intégraphe

Un parallélogramme articulé  $ABB_1A_1$  coulisse en  $I$  sur la tige  $Sm$ , de sorte que son côté  $AB$  reste perpendiculaire à  $Sm$  et que le milieu  $M_1$  du côté opposé  $A_1B_1$  reste sur la tige  $mT$ . En  $M_1$  est fixée une roulette coupante  $R$  d'axe  $A_1B_1$ . Cette roulette est donc constamment parallèle à  $SM$  et a pour pente  $f(x)$ . La roulette mordant dans le papier sans glissement latéral, son point de contact  $M_1$  trace au cours du mouvement une courbe  $\mathcal{C}$  dont la pente est  $f(x)$ , c'est-à-dire une courbe intégrale de la courbe initiale  $\mathcal{C}$ . En d'autres termes, c'est la courbe représentative d'une primitive de la fonction donnée  $f$ .

## Exploration d'un intégraphe

Les participants de l'atelier ont pu manipuler un intégraphe construit par Claude Voillequin (figure 12) en s'inspirant de l'un des modèles d'Abdank-Abakanowicz. Afin d'éviter les blocages qui pourraient se produire lors du croisement du pointeur et de la roulette sur la tige  $mT$  (figure 11), ces deux pièces ont été placées de part et d'autre du chariot, ce qui revient simplement à translater la courbe intégrale parallèlement à l'axe des abscisses.

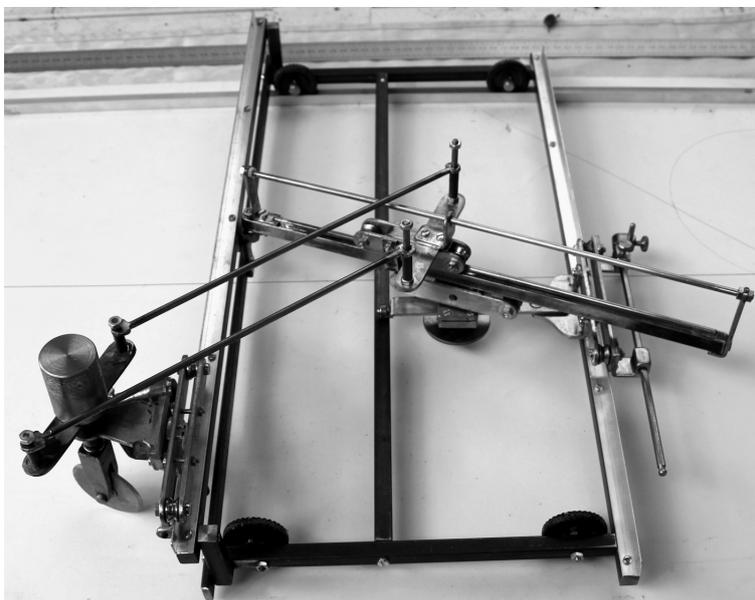


FIGURE 12 – L'intégraphe de Claude Voillequin

Durant l'atelier, des expérimentations ont été conduites à partir de courbes simples, comme  $y = 1$ ,  $y = x$  et  $y = x^2$ , pour comprendre et vérifier le bon fonctionnement de l'intégraphe. Nous avons également construit une courbe intégrale de la courbe  $y = \sqrt{1 - x^2}$  définie sur  $[-1, 1]$ , à savoir

$$y = \int_{-1}^x \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x \right) + \frac{\pi}{4}.$$

L'un des intérêts de cette construction provient du fait que  $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ , et donc que l'intégraphe permet de construire exactement le nombre  $\pi/2$ , autrement dit réaliser la quadrature du demi-cercle (figure 13). Il ne resterait plus qu'à doubler le segment obtenu pour obtenir celle du cercle.

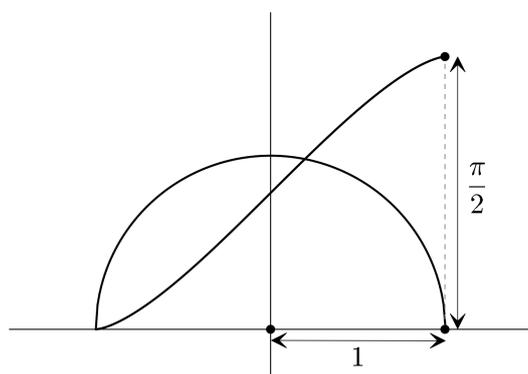


FIGURE 13 – Quadrature du demi-cercle avec l'intégraphe

Felix Klein a commenté ainsi ce résultat remarquable :

« Il est impossible de construire  $\pi$  avec la règle et la compas ; il n'existe même pas de courbe d'ordre supérieur, définie par une équation algébrique, pour laquelle  $\pi$  soit l'ordonnée correspondant à une valeur rationnelle de l'abscisse.

Une véritable construction géométrique de  $\pi$  ne peut donc être effectuée qu'à l'aide d'une courbe transcendante. Comme d'ailleurs il s'agit d'une véritable construction, il faut posséder un appareil transcendant permettant de tracer la courbe en question d'un trait continu.

Cet appareil, c'est l'*intégraphe* [...]. Voilà donc une construction géométrique qui permet la quadrature du cercle. On voit de plus qu'elle la réalise dans l'ordre d'idées où s'étaient engagés les géomètres anciens ; notre courbe intégrale n'est qu'une modification des quadratrices considérées par eux » (Klein, 1896, p. 94-96).

## Tractoriographe

Vers la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, dans le même esprit que ce que nous venons de voir avec l'intégraphe d'Abdank-Abakanowicz et la quadrature du cercle, l'introduction de nouveaux instruments géométriques a permis de résoudre tous les problèmes transcendants classiques dont on avait prouvé auparavant l'impossibilité à l'aide de la règle, du compas et des systèmes articulés. Ce courant de recherche est bien illustré par un article de l'ingénieur serbe Ljubomir Kleritj publié en 1897 dans le *Dinglers polytechnisches Journal* (Kleritj, 1897). Dans cet article, Kleritj décrit un nouvel instrument, appelé « tractoriographe », qu'il a inventé et fait fabriquer par l'Institut de mécanique d'Oskar Leuner à Dresde. À l'aide de cet instrument, Kleritj montre, comme nous allons le voir, qu'il devient possible de construire exactement les nombres  $\pi$  et  $e$ , ainsi que tous les polygones réguliers (Tournès, 2017).

### Présentation du tractoriographe

Le tractoriographe (figure 14) comporte essentiellement un pointeur  $\mathcal{H}$  que l'on peut guider à l'aide d'une double poignée pour suivre une courbe donnée, et une roulette coupante  $\mathcal{T}$ , située à une distance fixe du pointeur et surmontée d'un ruban encreur, dont le point de contact  $t$  avec le papier trace une nouvelle courbe appelée « tractoire » de la courbe donnée. La roulette et la tige  $\mathcal{AB}$  qui la relie au pointeur restent constamment tangente à cette tractoire.

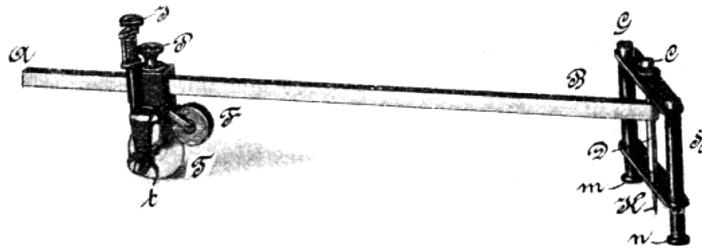


FIGURE 14 – Le tractoriographe de Kleritj (1897, p. 234)

La tractoire la plus simple est celle d'une droite, appelée « tractrice » (figure 15). Cela revient, sur une surface plane, à tirer une extrémité  $A$  d'une tige  $AB$  de longueur donnée  $a$  le long d'une droite à partir d'une position initiale  $A_0B_0$ ; la tractoire est alors la courbe décrite par l'autre extrémité  $B$  de la tige. Au cours du mouvement, la tige  $AB$  reste constamment tangente à la courbe tracée par  $B$ .

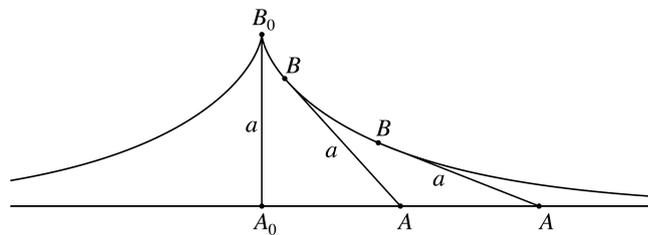


FIGURE 15 – Tractoire d'une droite, ou tractrice

On peut ensuite s'intéresser aux tractoires d'un cercle en tirant de la même manière une extrémité d'une tige de longueur  $a$  le long d'un cercle de rayon  $r$  (figure 16). On obtient trois formes de tractoires : si  $a > r$ , il y a des points de rebroussement et une suite de branches isométriques ; si  $a = r$ , la courbe s'enroule autour d'un point asymptotique ; si  $a < r$ , la courbe s'enroule autour d'un cercle asymptotique.

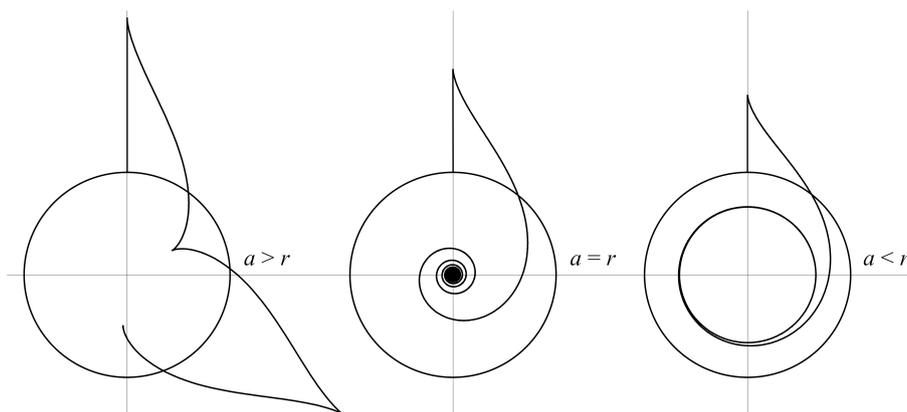


FIGURE 16 – Tractoires d'un cercle

En connectant le pointeur d'un tractoriographe à l'extrémité d'un compas qui l'entraîne dans un mouvement circulaire, on peut tracer de manière exacte les tractoires d'un cercle. Un tel dispositif a été construit par Claude Voillequin et a servi pendant l'atelier à explorer ces courbes (figure 17).

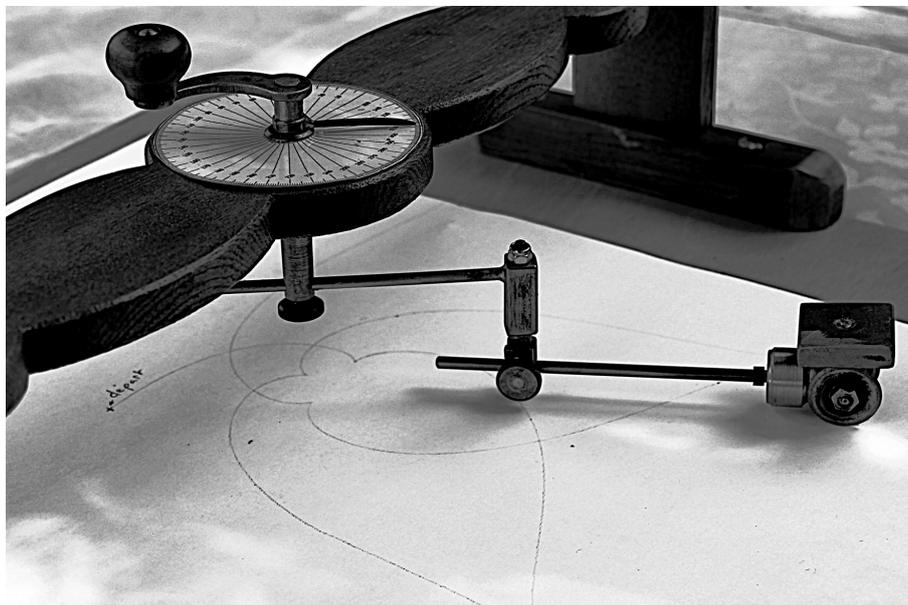


FIGURE 17 – Le tractoriographe circulaire de Claude Voillequin

## Quadrature du cercle et construction des polygones réguliers

Considérons maintenant un cercle de centre  $O$  et de rayon 1, et la tractoire de ce cercle tracée avec la tige  $AB$  de longueur 1 à partir de la position initiale  $A_0B_0$  (figure 18). Une fois que cette tractoire est présente sur la feuille de papier, on n'a plus besoin du tractoriographe. Toutes les constructions classiques peuvent se terminer à la règle et au compas. Nous allons le montrer pour la construction du nombre  $\pi$  et pour celle de tous les polygones réguliers.

Notons  $\varphi$  l'angle  $A_0OA$ , qui est aussi la longueur de l'arc de cercle parcouru par le point  $A$  depuis sa position initiale  $A_0$ , et  $\alpha$  l'angle  $BOA$ . Kleritj prouve que l'intégration de l'équation différentielle définissant la courbe décrite par l'extrémité libre  $B$  de la tige, dont les détails dépassent le niveau de cet article, conduit à la propriété fondamentale  $\tan \alpha = \varphi$ . Si l'on note  $C$  le point d'intersection de la droite  $OB$  et de la perpendiculaire à  $OA$  passant par  $A$ , on a donc  $AC = \tan \alpha = \varphi$ . Ainsi, on a construit un segment dont la longueur est égale à celle de l'arc  $A_0A$ . Autrement dit, la tractoire permet la rectification d'un arc quelconque du cercle.

En particulier, si l'on fait tourner le point  $A$  d'un angle droit, on construit un segment de longueur  $\pi/2$ , et, de même, avec un angle plat, on obtient un segment de longueur  $\pi$  (figure 19). Avec une règle, un compas et un tractoriographe, on peut donc réaliser exactement la quadrature du cercle.

Par ailleurs, on comprend, au vu de la figure 18, qu'il est possible de partager un angle  $\varphi$  en  $n$  parties égales. Il suffit en effet de partager le segment  $AC$  en  $n$  parties égales, ce qui fournit l'angle  $\alpha'$  dont la tangente est égale à  $\varphi/n$ , puis de retrouver la position de la tige correspondant à cet angle  $\alpha'$ . Expliquons la construction en détail dans le cas de la trisection d'un angle (figure 20).

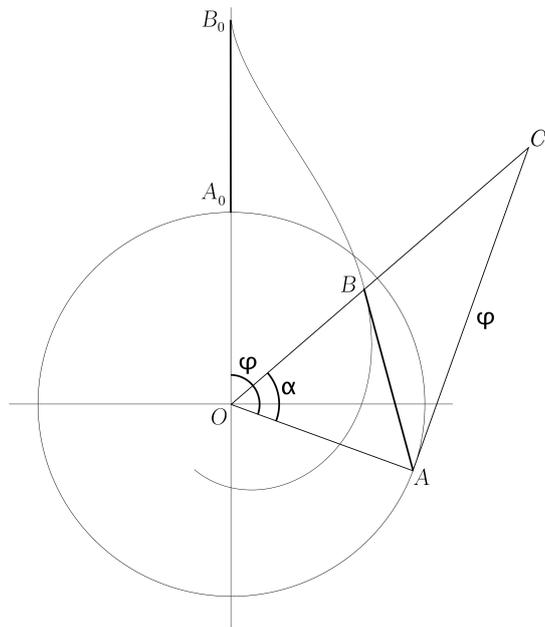


FIGURE 18 – Propriété fondamentale de la tractoire circulaire

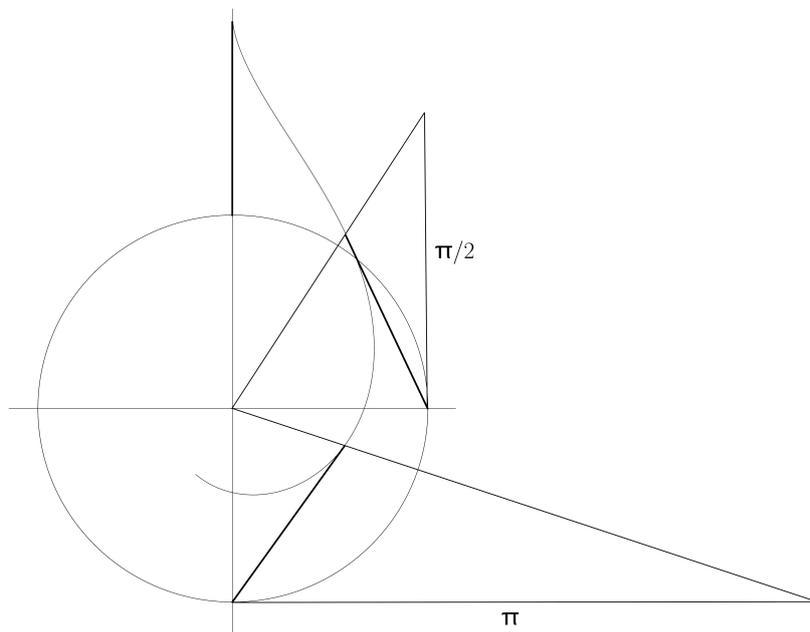


FIGURE 19 – Construction des nombres  $\pi/2$  et  $\pi$

On part de la position de  $AB$  correspondant à l'angle donné  $\varphi$ . Pour cette position, comme on l'a vu plus haut,  $AC = \varphi$ . Grâce au théorème de Thalès, on partage alors le segment  $AC$  en trois parties égales, de sorte que  $AD = \varphi/3$ , et on note  $\alpha'$  l'angle  $AOD$ . On trace le cercle de centre  $A$  et de rayon 1, qui coupe la demi-droite  $OD$  au point  $E$ , puis le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OE$ , qui coupe la tractoire au point  $B'$ , et enfin le cercle de centre  $B'$  et de rayon 1, qui coupe le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 au point  $A'$ . Par construction, les triangles  $OAE$  et  $OA'B'$  ont leurs trois côtés égaux, donc ils sont égaux. Il en résulte que l'angle  $A'OB'$  est égal à  $\alpha'$ . De plus, si l'on note  $D'$  le point d'intersection de  $OB'$  et de la perpendiculaire en  $A'$  à  $OA'$ , on a  $A'D' = AD = \varphi/3$ . On a ainsi retrouvé la position  $A'B'$  de la tige correspondant à l'angle  $\varphi/3$ .

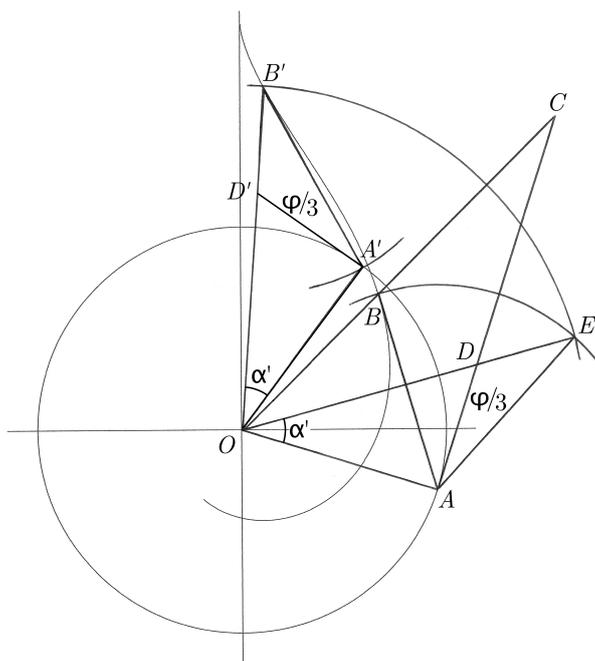


FIGURE 20 – Trisection d'un angle

La même méthode permet de partager un angle quelconque en  $n$  parties égales, et donc de construire un polygone régulier à un nombre quelconque de côtés. À titre d'exemple, les participants de l'atelier ont été invités à construire un heptagone régulier. La figure 21 présente deux des réalisations obtenues.

Enfin, de même que la tractoire d'un cercle nous a conduit à une construction exacte du nombre  $\pi$ , Kleritj a mis en évidence dans son article que la tractoire d'une droite permettrait de construire le nombre  $e$ , mais ce point n'a pas pu être abordé dans l'atelier faute de temps. Il est toutefois facile de s'en convaincre si l'on examine l'équation de la tractrice obtenue avec une tige de longueur 1 :

$$x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} - \sqrt{1 - y^2}.$$

La tractrice et la courbe logarithmique étant liées par des opérations algébriques réalisables à la règle et au compas, il est clair que si l'une des courbes est donnée au départ sur le papier, on

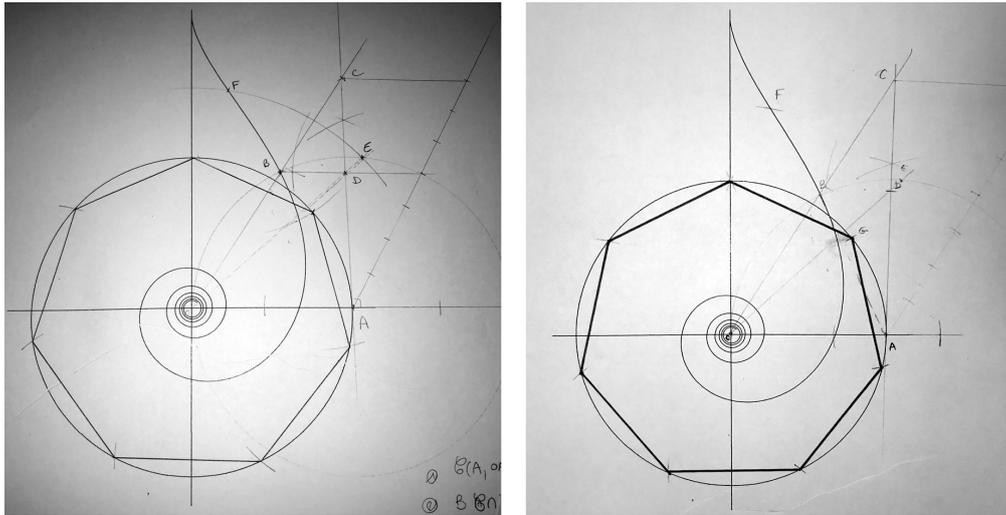


FIGURE 21 – Deux constructions de l’heptagone régulier

peut accéder à l’autre. Une fois que la tractrice a été tracée avec le tractoriographe, il devient donc possible de construire à la règle et au compas le nombre  $e$ .

## Conclusion

Au sein du groupe histoire des mathématiques de l’IREM des Pays de la Loire, a germé l’idée que les instruments graphomécaniques d’intégration pourraient être utilisés pour introduire historiquement la notion d’aire à plusieurs niveaux des classes de lycée. En 2018-2019, le groupe a animé un stage intitulé « Calculer des aires sans formules », au cours duquel étaient présentées différentes méthodes historiques en commençant par Archimède et Euclide, puis Cavalieri et Roberval, pour terminer par les machines à intégrer du XIX<sup>e</sup> siècle (Guillet, Moureau et Voillequin, 2019). L’explication mathématique de l’intégraphe étant assez simple, il a paru intéressant de proposer cet instrument comme support d’un travail interdisciplinaire mathématiques-sciences industrielles et comme moyen d’illustrer le problème inverse des tangentes en classe de première ou terminale. L’aspect concret de ces machines devrait donner aux lycéens ou aux étudiants un autre point de vue sur l’intégration, très éloigné du tout numérique, et favoriser par là une meilleure compréhension de cette notion difficile.

## Références bibliographiques

ABDANK-ABAKANOWICZ Bruno, 1886, Les intégraphes. La courbe intégrale et ses applications, Paris, Gauthier-Villars.

BOS, Henk, 1988, « Tractional motion and the legitimation of transcendental curves », Centaurus, 31, p. 9-62.

FISCHER Joachim, 2017, « The early history of mechanical integration : The first five decades, 1814-1864 », Oberwolfach Reports, 14, p. 3502-3506.

GUILLET, Carène, MOUREAU, Marie-Line, VOILLEQUIN, Isabelle, 2019, « Mathematics and experiment : How to calculate areas without formulas », Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education, Oslo, Oslo Metropolitan University, p. 227-243.

JACOB Louis-Frédéric, 1911, *Le calcul mécanique*, Paris, Doin.

KLEIN Felix, 1896, *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire*, Paris, Novy.

KLERITJ, Ljubomir, 1897, « Tractoriograph und Construction der transcendenten Zahlen “ $\pi$ ” and “ $e$ ”, sowie Construction der  $n$ -seitigen, dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Polygone », *Dinglers polytechnisches Journal*, 305, p. 234-237, 260-263.

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm, 1693, « Supplementum geometriæ dimensoriæ seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum : similiterque multiplex constructio lineæ ex data tangentium conditione », *Acta eruditorum*, 12, p. 385-392.

MORIN Henri de, 1913, *Les instruments d'intégration*, Paris, Gauthier-Villars.

TOURNÈS Dominique, 2009, *La construction tractionnelle des équations différentielles*, Paris, Blanchard.

TOURNÈS Dominique, 2017, « Instruments for impossible problems : Around the work of Ljubomir Klerić (1844-1910) », *Oberwolfach Reports*, 14, p. 3517-3520.