



**HAL**  
open science

## Le profil des tiges

Jean-Marie Delord

► **To cite this version:**

Jean-Marie Delord. Le profil des tiges. Revue forestière française, 1984, 36 (6), pp.505-514.  
10.4267/2042/21764 . hal-03423679

**HAL Id: hal-03423679**

**<https://hal.science/hal-03423679>**

Submitted on 10 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# les cahiers techniques de l'inventaire forestier national

## LE PROFIL DES TIGES

*Recherche d'un modèle mathématique de courbe représentative du profil des tiges. Utilisation des mensurations réalisées par le Service de l'Inventaire forestier national pour adapter ce modèle général au cas particulier de chaque arbre mesuré, et permettre une estimation de son volume à n'importe quelle découpe.*

### POSITION DU PROBLÈME

On sait que le Service de l'Inventaire forestier national (I.F.N.) procède sur chaque arbre à un certain nombre de mesures de diamètre en vue d'en calculer le volume « total » arrêté à une découpe terminale (en général bois fort).

Le problème s'est posé de savoir dans quelle mesure il serait possible, sans procéder à de coûteuses mesures de diamètre supplémentaires, d'estimer non plus seulement ce volume « total », mais également n'importe quel autre volume arrêté à une découpe intermédiaire différente de la découpe terminale.

Par exemple, il peut être intéressant d'estimer les volumes arrêtés à l'une des découpes intermédiaires suivantes :

— découpe de dimension : 50 cm (tranchage ou déroulage), 22 cm (sciage), 12 cm (« petit sciage ») ;

— découpe de hauteur : billons successifs de 4 m de long, hauteur à la première branche ou au premier défaut.

Si l'on s'intéresse à une découpe de dimension donnée, il faut alors rechercher la hauteur où elle se trouve ; de même, si l'on s'intéresse à une découpe de hauteur donnée, il faut rechercher quel est le diamètre de l'arbre à cette hauteur.

Dans ces conditions, l'**objectif de l'étude** est la recherche de la meilleure relation possible  $D = f(H)$  — ou son inverse  $H = g(D)$  — liant les diamètres  $D$  et hauteurs  $H$  de chacun des arbres mesurés par l'I.F.N.

Cette relation traduit le profil en long de la tige.

Si l'on admet qu'en tout point de la tige, sa section transversale peut être assimilée à un cercle de diamètre  $D$ , la connaissance de la relation  $D = f(H)$  permet de calculer le volume à n'importe quelle hauteur  $H_i$  par la formule :

$$V_{H_i} = \frac{\pi}{4} \int_0^{H_i} [f(H)]^2 dH$$

où  $V_{H_i}$  est le volume compris entre le pied de l'arbre et la hauteur  $H_i$ .

La première condition que doit remplir la relation  $D = f(H)$  est bien évidemment d'être vérifiée en chacun des points  $i$  de la tige où l'I.F.N. a procédé à des mesures de diamètre et de hauteur.

Nous rappellerons donc de façon succincte quelles sont ces mesures.

### CUBAGE DES ARBRES PAR L'INVENTAIRE FORESTIER NATIONAL

L'I.F.N. décompose chaque tige en trois parties :

1. à la base de l'arbre, un premier billon de 2,60 mètres de long ;
2. au-dessus, un second billon allant jusqu'à la première déformation (grosse branche ou décroissance brutale) ;
3. dans la partie supérieure de l'arbre enfin, des surbilles comprises entre chacune des nouvelles déformations constatées. En l'absence de déformation, il n'y a pas de surbille et le second billon est « poussé » jusqu'à la découpe bois fort (7 cm). De même, la dernière surbille est arrêtée à la découpe bois fort.

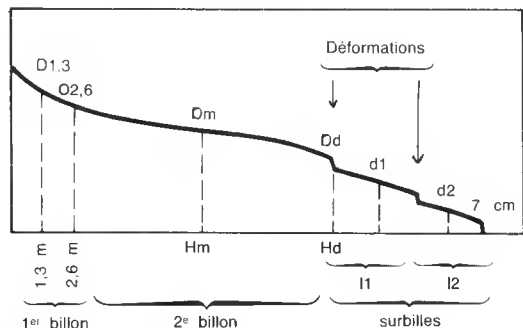
Le schéma ci-contre (figure 1) précise les emplacements où l'I.F.N. procède à des mesures de diamètre sur les 3 parties de la tige, ainsi que la notation utilisée.

La hauteur  $H_m$  correspond au milieu du second billon ; on a donc  $H_m = \frac{H_d + 2,60}{2}$ .

$D_m$  est le diamètre correspondant à cette hauteur  $H_m$ .

Ces différents diamètres sont mesurés au centimètre près avec un compas dit « finlandais » « monté » le long de la tige au moyen d'éléments de perche emboîtables.

Figure 1



Dans le cas général, l'essentiel du volume est situé dans le second billon ; c'est pourquoi dans un premier temps, nous limiterons notre propos à ce seul second billon.

Les mesures I.F.N. sur ce second billon sont les suivantes :

Niveau i :	1	Hauteur Hi :	2,60	Diamètre Di :	$D_{2,6}$
_____	2	_____	Hm	_____	Dm
_____	3	_____	Hd	_____	Dd

L'I.F.N. calcule le volume de ce deuxième billon par la formule de Newton-Simpson dite « à trois niveaux » :

$$V_{2^{\text{e}} \text{ billon}} = \frac{\pi}{24} (D_{2,6}^2 + 4 D_m^2 + D_d^2) (H_d - 2,60)$$

Cette formule est en effet intéressante par sa généralité car elle s'applique aux troncs de cônes, d'ellipsoïdes, de paraboloides, d'hyperboloides, de néloïdes et à tous les corps de révolution engendrés par une courbe du 3<sup>e</sup> degré (cf. Dendrométrie de Pardé).

Mais si l'on ne dispose que des 3 couples de mesure ci-dessus, cette formule ne permet pas le calcul d'un volume intermédiaire, par exemple celui compris entre 2,60 mètres et un niveau que l'on se fixerait entre Hm et Hd.

D'où la nécessité de rechercher une relation  $D = f(H)$  qui traduise au mieux la forme du second billon.

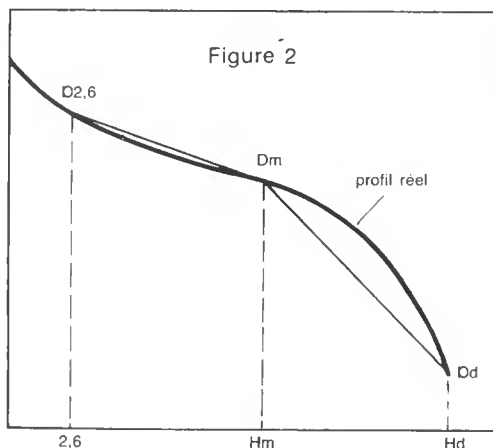
La première condition que doit remplir cette relation est bien évidemment d'être vérifiée en chacun des 3 points de la tige où les mesures de diamètre ont été faites.

### PREMIÈRES RECHERCHES D'UNE FORMULE DE PROFIL $D = f(H)$

L'étude a porté sur environ 150 arbres abattus de différentes espèces et provenant de diverses régions. Les diamètres de ces arbres, mesurés tous les mètres, ont permis de reconstituer leur profil réel. Les différentes formules testées ont été comparées avec ces profils réels.

La première idée — la plus simple — est évidemment de calculer une intrapolation linéaire entre les niveaux 1 et 2 d'une part, 2 et 3 d'autre part. Mais outre le fait qu'elle introduit une discontinuité peu satisfaisante dans le profil de la tige, elle peut conduire, lorsque Hd est grand, à des discordances relativement importantes avec le profil réel, notamment dans la deuxième moitié du second billon : voir figure 2.

Il a alors été essayé divers types de courbes continues à 3 paramètres calculés en imposant à ces courbes de passer par les 3 points de calage ci-dessus. Ont été testées les formules suivantes :



- ①  $D = \frac{aH + b}{H + c}$       ②  $D = a \times e^{\frac{b}{H+c}}$       ③  $D^2 = a(H + b)^c$       ④  $D = aH^2 + bH + c$

A noter que la formule ③ correspond aux courbes qui engendrent par rotation les types dendrométriques classiques : cônes, paraboloides, néloïdes.

Si pour l'ensemble des arbres testés ces formules donnent de bons résultats, il n'en est pas de même pour quelques arbres où certaines divergences avec les profils réels paraissent inacceptables. On en trouvera ci-dessous un exemple dans le cas de la formule ④ (figure 3).

### RECHERCHE D'UNE AUTRE FORMULE

L'observation des profils réels des arbres fait apparaître que ces profils comportent :

- dans le tiers inférieur une concavité vers les Y positifs ;
- dans les deux tiers supérieurs une concavité en sens contraire ;
- et par conséquent un point d'inflexion situé vers le tiers inférieur de la tige.

Il fallait donc trouver une courbe répondant à ces conditions. Le cas le plus simple en est celui des cubiques. Il a alors été testé la formule ci-dessous :

$$D = a \left( H - \frac{Hd}{3} \right)^3 + b \left( H - \frac{Hd}{3} \right) + c \quad \text{⑤}$$

Les 3 paramètres a, b et c de cette cubique peuvent être calculés en remplaçant H et D par les trois valeurs  $H_i$  et  $D_i$  correspondant aux 3 points de calage de chaque arbre. On trouve :

$$a = \frac{(d - D)(h_1 - h_2) + (D - M)(h_1 - h_3)}{(h_1 - h_2)(h_1 - h_3)(h_2 - h_3)(h_1 + h_2 + h_3)} \quad \text{avec} \quad h_1 = 26 - \frac{Hd}{3} \quad h_3 = 2 \frac{Hd}{3}$$

$$b = \frac{D - M}{h_1 - h_2} - a(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) \quad h_2 = 13 + \frac{Hd}{3} \quad D = D_{2,6}$$

$$c = D - ah_1^3 - bh_1 \quad M = Dm$$

$$d = Dd$$

Le volume à la hauteur H peut alors être calculé par la formule :

$$V_H = \int_0^H \left[ a \left( H - \frac{Hd}{3} \right)^3 + b \left( H - \frac{Hd}{3} \right) + c \right]^2 dH$$

qui est un polygone de degré 7.

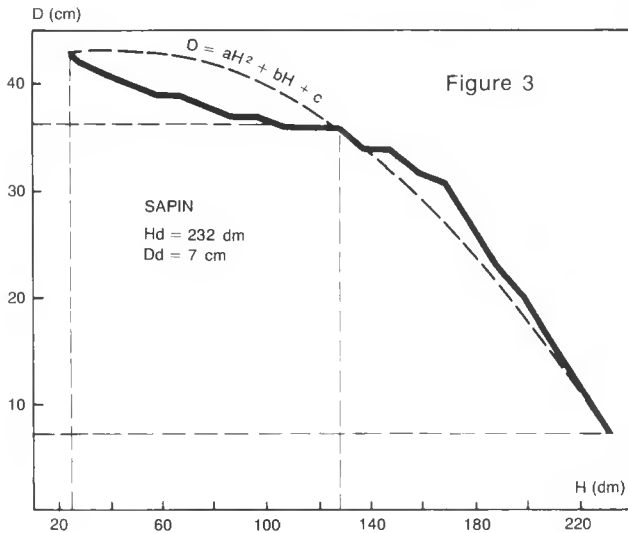
### Résultats obtenus par la formule ⑤.

- A titre d'exemple, on trouvera ci-dessous (figure 4) le profil réel et celui obtenu par la formule ⑤ pour le Sapin précédemment donné en exemple à propos de la formule ④.

On observe que l'erreur absolue maximum sur le diamètre se produit à 9 mètres de haut ; elle est de 1,87 cm.

En valeur relative l'erreur moyenne sur le diamètre aux différentes hauteurs est de 2,6 % avec un écart-type de 2,8 %.

Considérons maintenant les erreurs relatives sur le volume entraînées par l'utilisation de la formule ⑤ en distinguant :



Er m = erreur sur le volume de la tige arrêtée au milieu du 2<sup>e</sup> billon ;

Er d = erreur sur le volume total (jusqu'à la découpe).

Er M = erreur maximum.

On trouve pour l'arbre en cause :

Er m = 4,16 % ;

Er d = 3,43 % ;

Er M = 4,46 % (cette erreur maximum se produit pour une découpe à 12 m).

● En faisant les mêmes calculs pour l'ensemble des arbres tests, on aboutit aux résultats suivants :

Er m est compris 2 fois sur 3 entre - 2 % et + 3 %

est dans tous les cas compris entre - 7,0 % et + 7,0 % ;

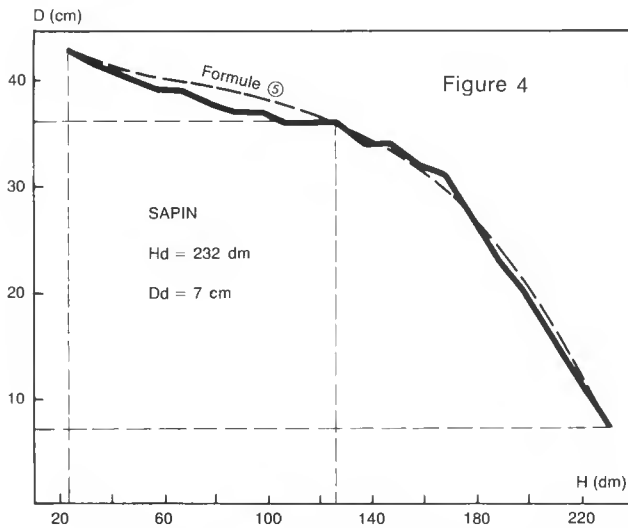
Er d est compris 2 fois sur 3 entre - 2,5 % et + 3,5 %

est dans tous les cas compris entre - 7,5 % et + 7 % ;

Er M est compris 2 fois sur 3 entre - 3 % et + 4 %

est dans tous les cas compris entre - 7,5 % et + 7,5 %.

Globalement on peut donc dire que l'estimation des volumes à partir de la formule ⑤ est obtenu avec une **erreur inférieure à 5 %**.



● Les distorsions les plus importantes entre le profil donné par la formule ⑤ et le profil réel se produisent pour les arbres ayant un fort empattement s'élevant jusqu'à plus de 2,60 mètres de haut. On en trouvera un exemple sur la figure 5 (page 510) dessinée à la même échelle que les précédentes pour permettre une meilleure comparaison. Chevrou (I.F.N. Montpellier) a fait justement observer que pour de tels arbres, la formule ⑤ donne d'excellents résultats si l'on calcule les 3 paramètres a, b, et c en remplaçant le premier point de calage (à 2,60 m de haut) par un point situé au-dessus de l'empattement. Dans l'exemple présenté ci-après ce point devrait être situé vers 6 ou 7 m de hauteur.

Mais fort heureusement de tels arbres sont assez rares sous climat tempéré. De plus, il faut bien voir que le problème posé — celui de l'évaluation des volumes à une découpe fixée a posteriori — ne se pose pour l'I.F.N. au niveau des arbres pris individuellement que dans la mesure où ces volumes pourront, après sommation, être donnés au niveau des peuplements. A ce niveau, la prise en compte, avec un premier point de calage à 2,60 m, de quelques rares arbres exceptionnels ne peut entraîner que des erreurs sans signification.

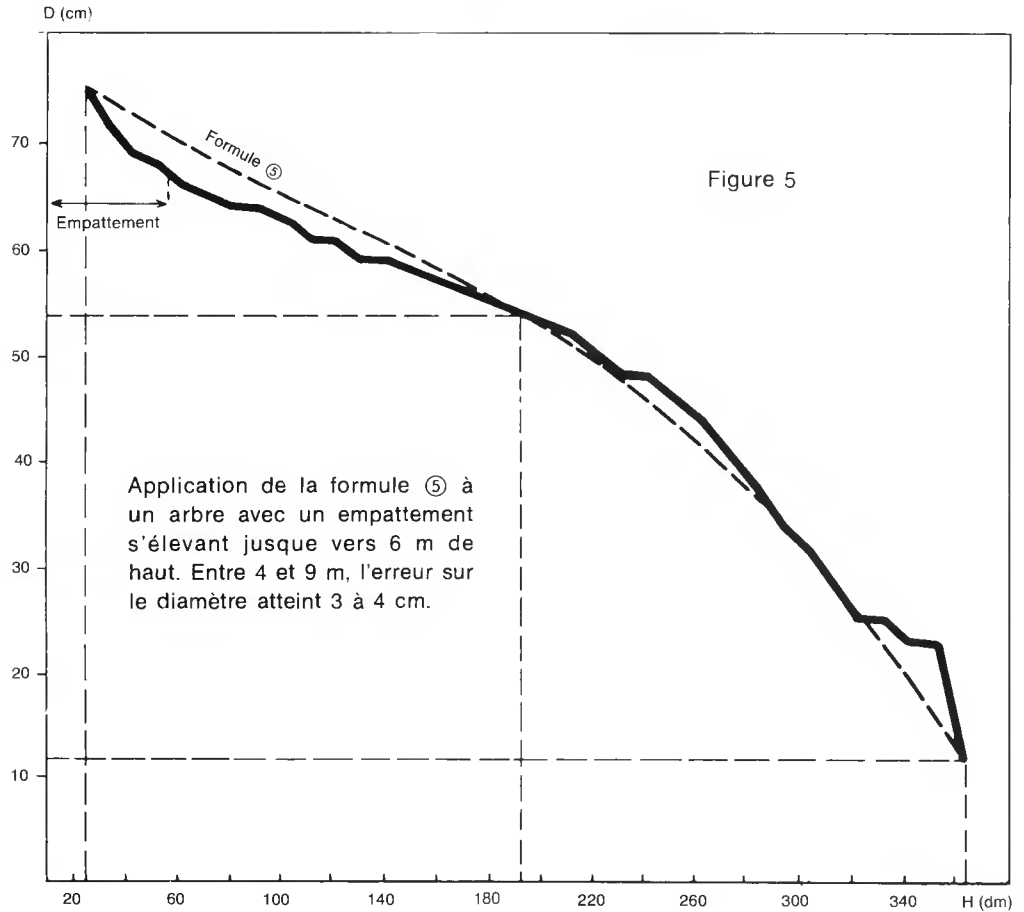


Figure 5

**DISCUSSION**

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

$V_{RÉEL}$  = Volume du second billon obtenu par la méthode C.N.R.F., c'est-à-dire par sommation des volumes de tronçons de 1 m de long dont chacun d'eux a eu son diamètre mesuré.

$V_{IFN}$  = Volume du même second billon obtenu, comme le fait l'I.F.N., par la formule à 3 niveaux (cf. page 507).

$V_{FOR}$  = Volume du même second billon obtenu par intégration de la formule 5 ci-dessus entre les niveaux extrêmes (2,60 et  $H_d$ ) de ce second billon :

$$V_{FOR} = \frac{\pi}{4} \int_{2,6}^{H_d} \left[ a \left( H - \frac{Hd}{3} \right)^3 + b \left( H - \frac{Hd}{3} \right) + c \right]^2 dH$$

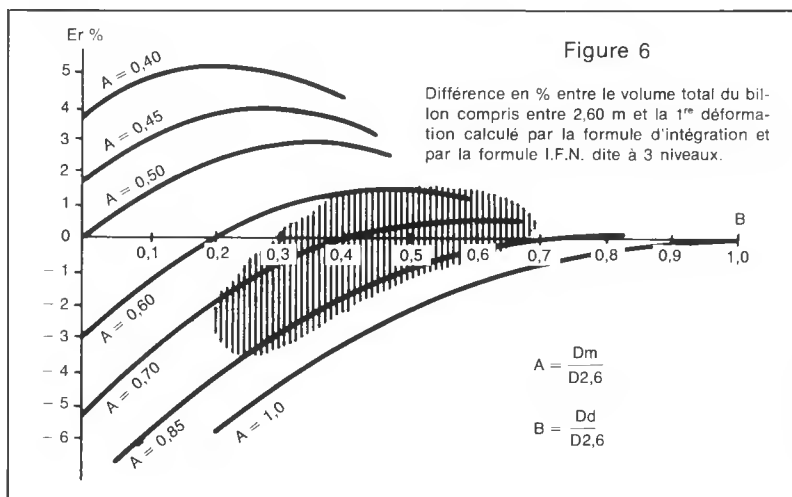
**Comparaison  $V_{IFN}$  -  $V_{FOR}$ .**

Cette comparaison peut être faite pour toutes les formes d'arbre possibles (ou même extravagantes et impossibles) en utilisant, comme l'ont fait divers auteurs, la technique des « profils réduits » (J. Fries et B. Matern - O. M'Hirit et J.-G. Postaire - R. Palm).

Cette technique appliquée au cas qui nous intéresse, consiste à exprimer les diamètres en pourcentages de  $D_{2,6}$  et les hauteurs en pourcentage de Hd.

Partant de ce principe, les différences relatives ( $E_r$ ) entre  $V_{FOR}$  et  $V_{IFN}$  ont été calculées pour toutes les valeurs possibles des rapports

$A = \frac{D_m}{D_{2,6}}$  et  $B = \frac{D_d}{D_{2,6}}$ . Les résultats obtenus figurent sur le graphique ci-dessous (fig. 6).



Dans le cas général, la majorité des arbres ont des valeurs de A et B situées dans la zone hachurée, ce qui correspond à une différence entre  $V_{FOR}$  et  $V_{IFN}$  comprise entre + 1,5 % et - 3,5 %.

Pour l'ensemble des arbres testés dont on disposait du profil réel, cette différence a été trouvée égale à - 0,6 %.

#### Comparaison de $V_{FOR}$ et $V_{IFN}$ d'une part, avec $V_{RÉEL}$ d'autre part

Pour ces mêmes arbres, si l'on calcule maintenant la différence de  $V_{FOR}$  d'une part et de  $V_{IFN}$  d'autre part avec le volume réel résultant du profil connu on obtient :

$$(V_{FOR} - V_{RÉEL})/V_{RÉEL} = + 0,85 \%$$

$$(V_{IFN} - V_{RÉEL})/V_{RÉEL} = + 1,48 \%$$

#### Emplacement du point d'inflexion sur la courbe du profil

Nous avons vu que l'adoption de la formule (5) est basée sur la constatation que « les profils réels des tiges comportent un point d'inflexion vers le tiers inférieur de leur hauteur ».

Le lecteur pourra être surpris de l'imprécision de l'expression « vers le tiers inférieur ». Ceci résulte de ce que le point d'inflexion est en fait peu marqué, et qu'il se situe dans une partie de la tige où le profil est à peu près linéaire. En conséquence, le terme  $\frac{Hd}{3}$  de la formule (5) peut en général



être remplacé par des valeurs comprises entre  $\frac{Hd}{2,5}$  et  $\frac{Hd}{3,5}$  sans que l'on obtienne des résultats très différents.

De même, Hd peut être remplacé par la longueur du 2<sup>e</sup> billon (Hd - 2,60) ou même par la hauteur totale Ht comme l'a proposé Chevrou. Mais dans ce dernier cas (hypothèse où l'on remplace  $\frac{Hd}{3}$  par  $\frac{Ht}{3}$ ), il y a indétermination pour le calcul des paramètres a, b et c si :

$$Ht = \frac{Hd + 2,60}{2} + Hd + 2,60 \text{ m}$$

On est alors conduit à remplacer  $\frac{Ht}{3}$  par  $\frac{Ht}{4}$  par exemple.

Les résultats sont également bons, mais pas meilleurs.

### Prolongement de la courbe de profil vers le bas

La formule ⑤ est une courbe d'interpolation entre les niveaux 2,60 mètres et Hd ; en aucun cas elle ne peut être utilisée en dehors de ce domaine de validité, sous peine d'erreurs importantes.

On peut alors se poser la question de savoir si l'on ne pourrait utiliser la formule à 4 paramètres  $D = aH^3 + bH^2 + cH + d$  en lui imposant de passer par les 3 points de calage déjà utilisés, et en plus, par un quatrième point constitué par le diamètre à 1,30 m ( $D_{1,3}$ ). Après expérimentation, cette solution doit être écartée car elle entraîne dans de nombreux cas d'importants écarts entre le profil calculé et le profil réel.

Chevrou a alors proposé d'utiliser entre 1,30 et 2,60 mètres une courbe spline, c'est-à-dire telle que ses dérivées première et seconde à 2,60 m soient égales à celles de la formule ⑤. Dans ces conditions les 2 courbes représentatives du profil de part et d'autre du niveau 2,60 m sont en continuité.

La courbe représentative du profil entre 1,30 et 2,60 mètres s'écrit alors :

$$D_p = f(H) + d(H - 2,60)^3$$

où f(H) n'est autre que la formule ⑤ et d'un paramètre que l'on obtient en remplaçant H par 1,30 m et Dp par  $D_{1,3}$ .

Mais plus simplement encore, il est possible en admettant une discontinuité du profil au niveau 2,60 m, de calculer les diamètres D par interpolation linéaire entre  $D_{1,3}$  et  $D_{2,6}$ .

Remarque : le volume du 1<sup>er</sup> billon est calculé par l'I.F.N. par cubage cylindrique (= cubage commercial) :

$$V_{1er \text{ billon}} = \frac{2,6 \pi}{4} D_{1,3}^2$$

En effet l'utilisation de la formule à trois niveaux impliquerait la mesure du diamètre à la souche, mesure en général sans signification pour le cubage de ce premier billon, car elle prend en compte l'empatement à la naissance des racines.

## CONCLUSION ET RÉSUMÉ

Les recherches sur les courbes représentatives du profil des arbres sont en général orientées vers la construction de modèles paramétriques (polynômes de degré plus ou moins élevé) ou non paramétriques (profil point par point mémorisé sur ordinateur) ; ces modèles, après réduction des diamètre et hauteur homologues, sont construits pour une essence et pour un peuplement donné, et traduisent la forme moyenne de tous les arbres de l'ensemble concerné.

L'objectif de la présente étude est plus restreint, car il ne prétend en aucune manière rechercher un profil moyen pour tel ou tel peuplement particulier.

Mais en même temps, cet objectif est plus général, en ce sens qu'il consiste à proposer un modèle (paramétrique) applicable à tous les arbres (quel que soit leur essence ou le peuplement auquel ils appartiennent) ayant fait l'objet de 3 couples de mesure diamètre-hauteur.

En ce qui concerne l'I.F.N., les 3 couples de mesure considérés sont les :

- diamètre à 2,60 mètres ;
- diamètre et hauteur à la première déformation (ou à la découpe bois fort) ;
- diamètre au milieu de l'intervalle de hauteur précédent.

Partant de la constatation que les courbes représentatives du profil comportent un point d'inflexion vers le tiers inférieur de la tige et que leur concavité, dans la partie supérieure de cette tige, est tournée vers les diamètres décroissants, le modèle proposé est :

$$D = a \left( H - \frac{Hd}{3} \right)^3 + b \left( H - \frac{Hd}{3} \right) + c$$

avec Hd = hauteur à la découpe (première déformation, ou bois fort).

a, b, c = paramètres calculés pour chaque arbre en imposant à la courbe de profil de passer par les 3 points de calage définis ci-dessus.

L'intégration de cette formule permet de calculer pour chacun des dizaines de milliers d'arbres mesurés chaque année par l'I.F.N., son volume à n'importe quelle hauteur ou à n'importe quelle découpe considérées comme intéressantes ; l'erreur sur ce volume est inférieure à 5 % dans la très grande majorité des cas.

J.M. DELORD  
INVENTAIRE FORESTIER NATIONAL  
Echelon interrégional de Lyon  
Chemin des Chasseurs  
Parc de Parilly  
B.P. 74 - 69672 BRON CEDEX

BIBLIOGRAPHIE

- BOUCHON (J.). — Les tarifs de cubage. — Nancy : Ecole nationale du Génie rural, des Eaux et Forêts, 1974, 57 p.
- CAILLET (F.). — Estimation des volumes et accroissements forestiers, vol. 1. — Estimation des volumes. — Publication F.A.O. Forêts, 1980, 98 p.
- DECOURT (N.). — Remarques sur la forme et la croissance des tiges. — *Revue forestière française*, juillet 1965, pp. 512-523.
- DESAULNIERS (G.). — Equation du défilement d'un tronçon : fondement du cubage des arbres en vue de débitage. — Mémoire n° 69. *Service de la Recherche forestière, Ministère de l'Energie et des Ressources, Québec*, 1980, 91 p.
- FRIES (J.), MATERN (B.). — On the use of multivariate methods for the construction of tree taper curves, Advisory group of forest statisticians I.U.F.R.O. Stockholm 27/9 au 1/10/65, 1965, 33 p.
- JEROME L. CLUTTER. — Development of taper functions from variable — top merchantable volume equations. — *Forest Science*, vol. 26, n° 1, 1980, pp. 117-120.
- LIU (C.-J.). — Log volume estimation with spline approximation. — *Forest Science*, vol. 26, n° 3, 1980, pp. 361-369.
- M'HIRIT (O.), POSTAIRE (J.-G.). — Analyse de la forme des tiges du Cèdre du Maroc. Application à la détermination des courbes de profil. — *Annales des Sciences forestières*, vol. 40, n° 4, 1981, pp. 354-372.
- MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE. — But et méthodes de l'Inventaire forestier national. — Paris : Service des Forêts, 1972, 38 p.
- PALM (R.). — Contribution méthodologique au cubage des arbres et à la construction de tables de cubage et d'assortiments. Thèse de doctorat. — Gembloux (Belgique) : Faculté des Sciences Agronomiques, 1981, 295 p.
- PARDÉ (J.). — Dendrométrie. — Nancy : Ecole nationale des Eaux et Forêts, 1961, 350 p.

POUR GARDER EN BON ÉTAT LA COLLECTION DE LA  
**Revue forestière française**

UTILISEZ LA

**Reliure instantanée**

QUI CONSERVE INTACTS TOUS LES NUMÉROS D'UNE ANNÉE  
**Très belle présentation, couleur verte, impression or sur le dos**

**sans millésime**

**prix : 35 f**

(PORT ET EMBALLAGE COMPRIS)

Les commandes sont à envoyer à l'adresse suivante :

**Revue forestière française** - 14, rue Girardet,  
54042 NANCY CEDEX

Paiement au C. C. P. Nancy 5.400.64 D  
au nom du Régisseur de l'École Nationale du Génie Rural  
des Eaux et des Forêts