



HAL
open science

Calcul de l'intégrale J et détermination des zones 3D entourant la pointe de fissure. Application aux matériaux élastiques

Stephen Hedan, Valéry Valle, Mario Cottron

► **To cite this version:**

Stephen Hedan, Valéry Valle, Mario Cottron. Calcul de l'intégrale J et détermination des zones 3D entourant la pointe de fissure. Application aux matériaux élastiques. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03422885

HAL Id: hal-03422885

<https://hal.science/hal-03422885>

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calcul de l'intégrale J et détermination des zones 3D entourant la pointe de fissure. Application aux matériaux élastiques

S. HEDAN^a, V. VALLE^b, M. COTTRON^b,

a. Laboratoire HydrASA, CNRS UMR 6269, ENSIP, 1 Rue Marcel Doré, 86022 Poitiers Cedex

b. Institut Pprime, CNRS UPR3346, 2 Bd Marie et Pierre CURIE, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex

Résumé :

Contrairement aux valeurs de l'intégrale J calculées à partir du modèle numérique 2D, les intégrales J calculée à partir de spécimens 3D [1] dans les cas numériques et expérimentaux sont très différentes de celles de la littérature. Le problème est un problème de structure et peut être expliqué par des effets locaux tridimensionnels entourant la pointe de la fissure. Des essais expérimentaux utilisant deux matériaux polymères sont réalisés pour leur amplitude de déformations lors de sollicitations mécaniques. La méthode des grilles a permis de déterminer expérimentalement les champs de déplacements plans entourant la fissure pour des spécimens SEN (Single-Edge-Notch) en polyuréthane et PMMA soumis à un chargement mode I. Une méthode indirecte, composée de champs de déplacements plans et de 2 formulations empiriques, permet de déterminer les intégrales J expérimentales, ces résultats seront comparés aux simulations numériques basées sur la méthode des éléments finis.

Abstract :

Contrary to J-integral values calculated from the 2D numerical model, calculated J-integrals [1] from 3D specimen in the numerical and experimental cases are not very close with J-integral used in the literature. The problem is a structure problem and can be explain by local three-dimensional effects surrounding the crack tip. Two applications using polymer materials for large and minor deformations are experimented. A grid method is used to experimentally determine the in-plane displacement fields around a crack tip in a Single-Edge-Notch (SEN) tensile polyurethane and PMMA specimens. This indirect method composed of experimental in-plane displacement fields and of 2 empirical formulations, allows the experimental J-integral to be determined and the obtained results by the numerical simulations to be confirmed.

Mots clefs : Intégrale J, méthode des grilles, zone 3D

1 Introduction

Plusieurs aspects de l'étude comportement des polymères n'ont pas encore complètement été étudiés. Parmi ces aspects le comportement des polymères en présence de fissures dans une structure 3D. En élasticité linéaire, afin d'obtenir le comportement mécanique 2D, des hypothèses [2], telles : milieu infini et problème plan (contraintes ou déformations planes) sont imposées. Cependant, des études expérimentales mettant en œuvre par exemple des méthodes interférométriques [3], ou des simulations numériques [4] mentionnent la présence d'une zone 3D entourant de la singularité. Par conséquent, le Facteur d'Intensité des Contraintes (K_I) et l'intégrale J considérés comme constants lorsque les hypothèses 2D sont imposées, ne peuvent pas être correctement évalués par des approches numériques et expérimentales 3D dans cette même région. Pour évaluer avec précision ces paramètres, il est nécessaire de mesurer les champs proches de la pointe de la fissure et d'avoir une représentation théorique ou numérique des champs contraintes/déformation [5] [6]. Ces derniers doivent tenir compte du comportement particulier de la structure 3D et de la géométrie finie des structures fissurées.

Dans la littérature [7], les intégrales J expérimentales dépendent sur le contour ($R=r/h<0,5$) lorsque la structure est tridimensionnelle. Les premiers développements [1] [8] sur les intégrales J ont été essentiellement faits sur des matériaux élastiques et plastiques avec l'hypothèse des déformations planes et à

partir des courbes contrainte/déformation. L'utilisation de ce paramètre en mécanique de la rupture est largement employé car facile à mettre en œuvre. L'indépendance de l'intégrale J vis-à-vis du contour a permis de distinguer très facilement la zone plastique de la zone élastique, pour les échantillons soumis à un processus de déformation mécanique. Depuis l'intégrale J est utilisée : pour déterminer le critère d'ouverture, le critère de propagation pour des matériaux ductiles (J_{IC}) [9], pour des investigations en fatigue [10], en numérique avec la procédure X-FEM [11], etc.

Les objectifs de ce papier sont orientés sur l'analyse des valeurs de l'intégrale J pour des simulations 3D en comparaison avec des simulations 2D et pour deux essais expérimentaux. Le premier objectif est d'estimer l'influence de la tridimensionnalité sur une structure qui pourrait modifier les champs de déformation à proximité de la pointe de la fissure, et ainsi les mesures de l'intégrale J. Le second est de définir une distance du contour intégration/pointe de fissure permettant d'utiliser l'approche bidimensionnelle pour le calcul de l'intégrale J et ainsi de déterminer le taux de restitution d'énergie. Ce dernier objectif sera validé sur deux cas expérimentaux différents.

Pour les simulations numériques, le logiciel d'éléments finis CASTEM développé par le CEA est utilisé.

Les essais expérimentaux mettent en œuvre la méthode des grilles pour extraire les champs de déplacements plans (u_{x-exp} , u_{y-exp}) au voisinage de la fissure d'une structure 3D, chargée en mode I (ouverture de fissure). La méthode de calcul l'intégrale J à partir de données expérimentales nécessitent d'utiliser 2 formulations empiriques pour caractériser les champs de déplacements [12] car la présence de bruit nuit fortement les valeurs de J.

2 Calcul des intégrales J numériques

Le calcul de l'intégrale J à partir des simulations numériques est possible en utilisant la procédure G-thêta de CASTEM [13]. Cette procédure nous permet d'avoir une seule valeur moyennée de G sur le front de fissure. Dans notre étude, nous voulons spatialiser (différents contours d'intégration Γ) sur la surface libre, le calcul du taux de restitution d'énergie. Une autre possibilité pour calculer l'intégrale J dans le cas élastique linéaire, c'est d'utiliser les gradients de déplacement à partir de l'équation suivante :

$$J = \frac{E}{4(1+\nu)} \int_{\Gamma} \left[\left\{ k_1 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right\} dy + 2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + k_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx \right] \quad (1)$$

Nous limitons le calcul de J-intégrale spatialement à un contour circulaire Γ égal à la longueur de la fissure. Pour valider l'hypothèse de l'indépendance intégrale J par rapport au contour Γ , une étude avec des modèles numériques 2D est réalisée.

Utilisant le logiciel CASTEM, une analyse par éléments finis, sur des échantillons de type SEN est effectuée afin d'estimer les gradients de déplacements 2D. Ce logiciel est développé par le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA). Pour des raisons de symétrie, seul une moitié de l'échantillon est modélisée et analysée. Le maillage est circulaire (rayon $r=9$ mm), centré sur la pointe de la fissure est utilisé et basé sur les travaux de Nakamura [4]. Pour tenir compte des forts gradients de déplacements, la densité de nœuds est accrue proche de la pointe. Le modèle numérique a les dimensions géométriques et les caractéristiques mécaniques suivantes : (largeur : $W=40$ mm, longueur : $L=145$ mm, Module d'Young= 3 MPa et un coefficient de Poisson $\nu=0,3$). L'éprouvette de type SEN est chargée en mode I ($F=9.53$ N).

Les éléments constituant du modèle numérique sont des quadrilatères à 4 nœuds (figure 1). Les conditions aux limites sont : ($u_{y,num}=0$ sur le ligament et $u_{x,num}=0$ en pointe de fissure ($x=0$, $y=0$). La loi de comportement est élastique linéaire et les hypothèses de contraintes planes sont imposées.

Pour extraire les gradients de déplacements pour le calcul de l'intégrale J, la procédure *Grad* est implémentée dans CASTEM [14], ce qui permet d'interpoler ces derniers aux nœuds.

Pour calculer l'intégrale J pour différents contours circulaires, un programme C++ est réalisé, utilisant l'équation (1) et les gradients de déplacements aux nœuds. La figure 2 montre l'évolution de l'intégrale J numérique 2D (J_{num2D}) en fonction du rayon (r) centré en pointe de fissure.

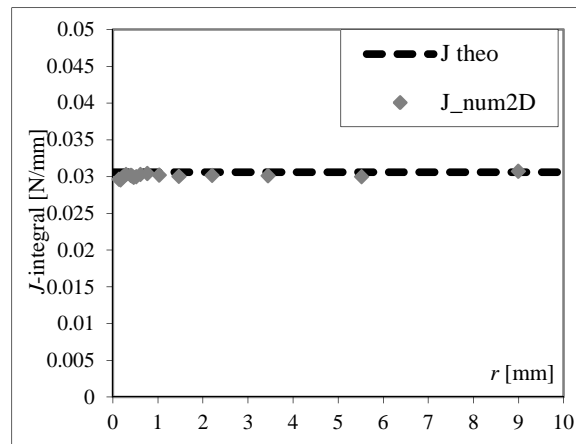


FIG. 1 – Tracé des intégrales J à partir de l'équation (1) et des gradients numériques 2D

On peut remarquer (figure 1) que le calcul de l'intégrale J (J_{num2D}), utilisant les gradients numériques est indépendant du contour Γ , et est égal à J_{theo} ($=K_I^2/E$). Dans les hypothèses de contraintes planes et pour une loi élastique linéaire, les valeurs de l'intégrale J (J_{num2D}) sont égales au taux de restitution d'énergie.

De plus, il n'y a pas de différences significatives entre les valeurs calculées à l'aide de l'équation (1) couplée à des gradients numériques interpolés au nœuds (J_{num2D}) et l'utilisation de J_{theo} . Par conséquent, le maillage rayonnant et le contour d'intégration circulaire sont appropriés pour calculer l'intégrale J. Néanmoins, les cas réels sont des problèmes de structures essentiellement tridimensionnelles. Dans ces conditions, le développement de modèles 3D est entrepris pour estimer l'influence de la troisième dimension sur le calcul de J et le domaine de validité de l'équation (1) pour ces mêmes modèles. Dans la plupart des cas expérimentaux, les données ne sont accessibles que sur la surface libre et ainsi nos calculs des intégrales J seront limités à cette même surface.

3 Tests de fissuration sur des matériaux fragiles

3.1 Modèle numérique 3D

Ce modèle 3D est composé d'hexaèdres trilineaires à huit nœuds, un quart du spécimen est modélisé, du fait des symétries et le même maillage circulaire (figure 2) entourant la pointe de la fissure est choisi. Pour tenir compte de la variation des contraintes dans l'épaisseur de la plaque, les couches successives d'éléments sont progressivement réduites lorsque l'on s'approche de la surface libre. Cette représentation a été validée par des comparaisons de champs de déplacements expérimentaux proches de la pointe [12]. L'épaisseur (h) est égale à 6mm (figure 2) et pour le calcul de J_{num} nous utilisons le même programme C++ (voir §2) avec les gradients de déplacements 3D extraits sur la surface libre de notre modèle.

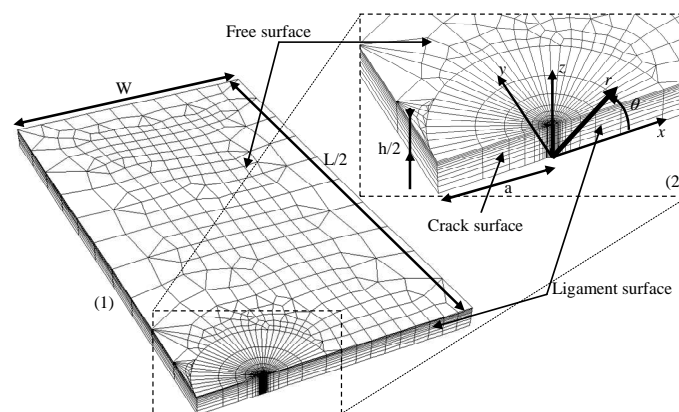


FIG. 2 – Maillage d'un quart du modèle 3D (1) et proche de la pointe de fissure (2)

3.2 Essais expérimentaux

Nous avons réalisé 2 essais sur des éprouvettes fissurées ayant des caractéristiques géométriques et mécaniques différentes (tableau 1).

Matériaux	a/W	a [mm]	W [mm]	L [mm]	h [mm]	E [MPa]	ν
polyuréthane	0,225	9±0,1	40±0,2	145±0,2	6±0,1	3±0,4	0,46±0,04
PMMA	0,116	7±0,1	60±0,2	62±0,2	6±0,1	2825±25	0,4±0,04

TAB. 1 – Propriétés géométriques et mécaniques du polyuréthane et du PMMA

Le rapport (a/W) est différent pour les tests. Les échantillons sont placés sur un dispositif de chargement avec un système d'imagerie numérique et les essais de rupture sont réalisés à température ambiante.

L'extraction directe des gradients de déplacements expérimentaux lors d'une sollicitation mécanique est difficile, toutefois une méthode indirecte (composée de champs déplacements et de 2 formulations empiriques) permet de calculer les champs de gradients de déplacements numériques [12]. Pour cela, la méthode des grilles [12] [15] est mise en œuvre, pour extraire les champs de déplacements sur la surface libre de l'éprouvette. La figure suivante présente les champs de déplacements, numériques (u_{x_num} , u_{y_num}) obtenus avec CASTEM, expérimentaux (u_{x_exp} , u_{y_exp}) obtenus avec la méthode des grilles, ainsi que empiriques ($u_{x_int-exp}$, $u_{y_int-exp}$) obtenus à partir de l'interpolation des 2 formulations sur les champs expérimentaux.

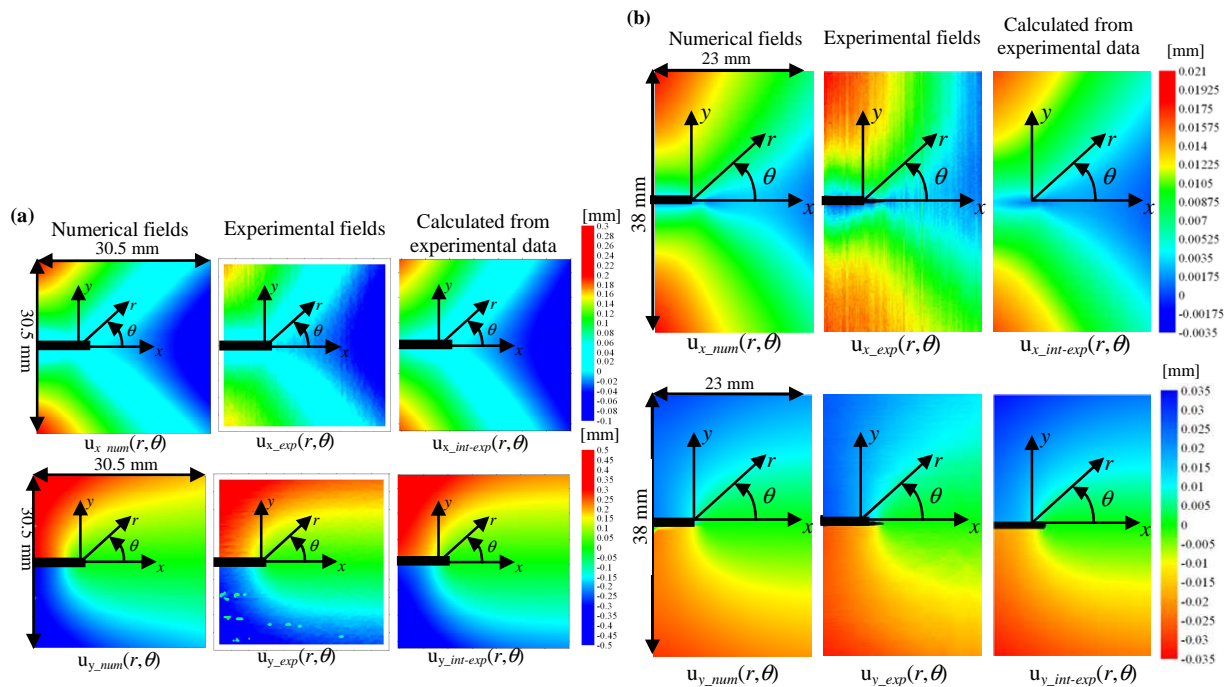


FIG. 3 – Champs de déplacements plans numériques, expérimentaux et empiriques.
(a) Polyuréthane, (b) PMMA

La figure 3 (polyuréthane (a) et PMMA (b)) montre les différentes évolutions des intégrales J théorique (J_{theo}) (equation 1), numérique (J_{num}) et expérimentale ($J_{int-exp}$) et montre dans les 2 cas la dépendance du calcul de l'intégrale J vis à vis du contour d'intégration Γ . On voit que le calcul de $J_{int-exp}$ est proche de J_{num} , mais toutefois un écart persiste. Pour le polyuréthane, J_{theo} n'est pas suffisante pour estimer G même loin de la pointe. Contrairement, sur la figure 9b (PMMA) l'écart entre J_{num} et J_{theo} est localisé au voisinage de la pointe de la fissure ($r < 2$ mm) ($R=r/h < 0,33$). Pour des rayons supérieurs à 2mm, J_{theo} est suffisant pour déterminer G, et les intégrales J sont indépendantes de Γ .

L'écart entre $J_{int-exp}$ et J_{num} , localisé près de la pointe (< 2 mm), est dû (i) au rapport signal/bruit expérimental (Figure 3) qui peut être atteindre 50% des déplacements à proximité de la pointe et influence fortement la minimisation ($\approx 7\%$ des erreurs; 5% pour le bruit et 2% pour l'interpolation), et donc les gradients de

déplacements, ainsi que J_{int_exp} et (ii) au comportement des polymères qui ne sont pas parfaitement élastiques linéaires ($\approx 2\%$ d'erreur). Cependant, à partir des champs de déplacements fortement bruités (Figure 3b), il est possible de déterminer J_{int_exp} avec une erreur d'environ 10% proche de la pointe de fissure. Nous pouvons également voir que J_{int_exp} et J_{num} diminuent lorsque $r < 2$ mm ($R=r/h < 0,333$) (Figure 3b). Ceci peut être expliqué par la présence d'« effets locaux 3D » dans les essais expérimentaux et numériques, classiquement observés dans la littérature [3] [4] et appelés 3D zone.

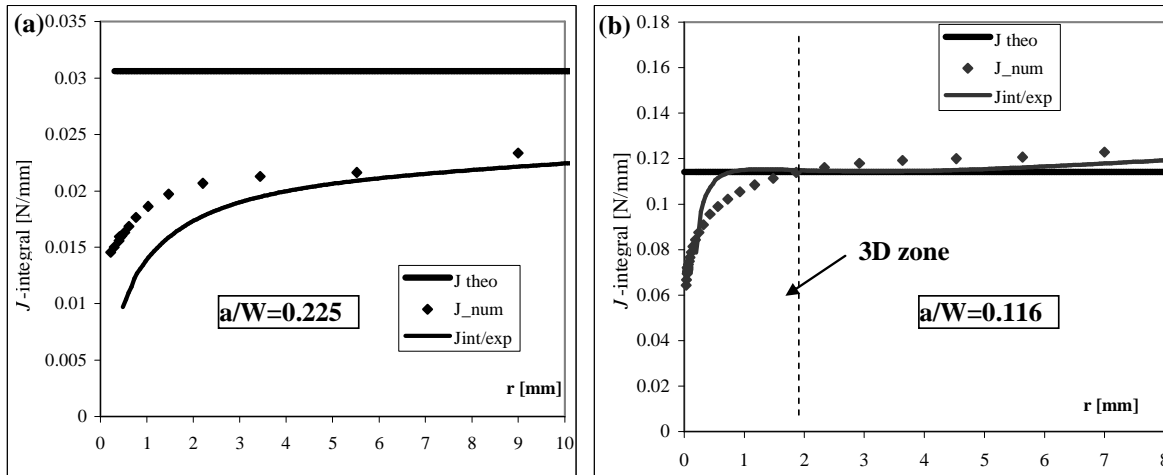


FIG. 3 – Tracés de J_{theo} , (J_{num}) et J_{int_exp} (a) Polyuréthane, (b) PMMA

4 Conclusion

L'approche numérique 2D a permis de valider l'équation (1) pour le calcul des intégrales-J et a montré l'indépendance de cette dernière vis-à-vis du contour d'intégration circulaire Γ (figure 1).

Dans le cas d'essais expérimentaux et numériques sur des structures élastiques fissurées 3D, nous avons montré la dépendance de J_{num} par rapport au contour Γ , ce qui est en désaccord avec l'hypothèse des intégrales J. Pour vérifier ces résultats, deux études expérimentales 3D ont été menées sur des éprouvettes de type SEN chargé en mode I et dont les matériaux sont des polymères élastiques linéaires. Pour extraire l'intégrale J à partir d'essais expérimentaux, la méthode des grilles a été mise en œuvre. Couplée à 2 formulations empiriques, le calcul des intégrales J expérimentales a pu être fait. De plus, cette méthode indirecte permet de limiter les erreurs ($\approx 10\%$) sur les valeurs de J dues au bruit de mesure. Ces expressions sont très bien adaptées pour caractériser à la fois les déplacements ainsi que les gradients de déplacements nécessaires au calcul de J.

De plus, cette étude montre que les mesures de champs dans le plan (champs de gradients de déplacements) extraites sur la surface libre de la structure 3D sont suffisantes pour calculer G d'une façon précise lorsque le calcul est effectué pour $r > 2$ mm. Pour un cas élastique, il est possible aussi de déterminer la zone 3D entourant la pointe.

Il a été montré que l'équation (1) ne peut pas être directement utilisée comme critère d'initiation et de propagation des fissures lorsque la structure est tridimensionnelle.

References

- [1] Rice J.R., Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, J. Mech. Phys Sol. 1968, 16:1–12.
- [2] Westergaard H.M., Bearing pressures and cracks. J. Appl. Mech. 1939, 49-53.
- [3] Humbert L., Valle V., and Cottron M., Experimental determination and empirical representation of out-of-plane displacements in a cracked elastic plate loaded in mode I. Int. J. Sol. Struct. 2000, 37(39):5493–5504.
- [4] Nakamura T, Parks D.M., Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate. J. Appl. Mech. 1988, 55:805-813.

- [5] Réthoré J., Roux S., Hild F., Noise-robust stress intensity factor determination from kinematic field measurements. *Engng Fract. Mech.* 2008, 75:3763-3781.
- [6] Barsoum I., Ravi Chandran K.S., Stress intensity factor solutions for cracks in finite-width three layer laminates with and without residual stress effects. *Engng Fract Mech* 2003, 70:2015–31.
- [7] Luo P.F. and Wang C.H., An experimental study on the elastic–plastic fracture in a ductile material under mixed-mode loading. *Strain* 2008, 44(3):223–230.
- [8] Hutchinson J.W., Plastic stress and strain fields at a crack tip. *J. Mech. and Phys. Sol.* 1968, 16(5):337–342
- [9] Xiao D. and Dexter R.J., Finite element calculation of applied J-integral for cracked ship structural details, *Eng. Fract. Mech.* 1998, 60(1): 59-82.
- [11] El Haddad M. H., Dowling N.E., Topper T.H., and Smith K.N., J integral applications for short fatigue cracks at notches. *Int J Fract* 1980, 16(1):15–30
- [11] Moës N., Dolbow J., and Belytschko T., A finite element method for crack growth without remeshing. *Int J Numer Methods Eng*, 1999 46(1):131–150
- [12] Hedan S., Valle V., and Cottron M., In plane displacement formulation for finite cracked plates under mode I using grids method and finite element analysis, *Exp. Mech.* 2010, 50(3):401-412.
- [13] Dubois F., Chazal C., and Petit C., A finite element analysis of creep-crack growth in viscoelastic media. *Mech Time Depend Mater* 1998, 2(3):269–286
- [14] <http://www-cast3m.cea.fr/cast3m/printeso.do?name=grad>
- [15] Moulart R., Rotinat R., Pierron F., Lerondel G., On the realization of microscopic grids for local strain measurement by direct interferometric photolithography. *Opt. Lasers Engng*2007, 45: 1131-1147.