



**HAL**  
open science

## Modélisation de l'endommagement localisé avec des modèles continus et discontinus

Fabien Cazes, Michel Coret, Alain Combescure

► **To cite this version:**

Fabien Cazes, Michel Coret, Alain Combescure. Modélisation de l'endommagement localisé avec des modèles continus et discontinus. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03422824

**HAL Id: hal-03422824**

**<https://hal.science/hal-03422824>**

Submitted on 9 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation de l'endommagement localisé avec des modèles continus et discontinus

Fabien Cazes<sup>a</sup>, Michel Coret<sup>a</sup>, Alain Combescure<sup>a</sup>

a. Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, F-69621, France

## Résumé :

Les travaux présentés portent sur les modèles d'endommagement régularisés par gradient d'endommagement et les modèles de zone cohésive. Un modèle d'endommagement permettant de séparer l'endommagement diffus et l'endommagement localisé a été développé. Une formulation faible construite pour l'implémentation numérique d'une loi cohésive à rigidité initiale infinie sera également présentée. Enfin, une méthode pour effectuer la transition continu-discontinu en mécanique de la rupture sera exposée.

## Abstract :

The work presented deals with the gradient damage models and the cohesive zone models. A damage model that permits to separate the diffuse and the localized damage has been developed. A weak formulation constructed for the numerical implementation of a cohesive law with an infinite initial stiffness will also be presented. Last, a method to do the continuous-discontinuous transition in fracture mechanics will be presented.

**Mots clés :** endommagement régularisé, zone cohésive

## 1 Introduction

Les travaux présentés, issus de [1], portent sur les modèles de ruptures continus et discontinus dans l'objectif de construire un modèle mixte combinant ces deux approches de la rupture. Ceci a été réalisé en utilisant la notion de fissure équivalente de Mazars [2, 3] dans un cadre numérique unidimensionnel en utilisant un modèle cohésif [4] pour la partie discontinue du modèle. La loi cohésive équivalente est construite à partir d'un modèle à deux variables d'endommagement permettant de bien séparer la partie diffuse et la partie localisée de l'endommagement. La loi cohésive obtenue étant une loi cohésive à rigidité initiale infinie (loi extrinsèque), une formulation faible particulière a été développée pour simplifier l'implémentation numérique de ce modèle. Cette formulation a ensuite été améliorée en remplaçant la contrainte cohésive par une contrainte cohésive modifiée dans les équations du problème. Le modèle à deux variables d'endommagement est d'abord présenté (partie 2), puis le modèle cohésif et son implémentation numérique (partie 3), et enfin la méthode de changement de modèle permettant d'obtenir un modèle continu-discontinu à partir d'un modèle continu régularisé est présentée (partie 4).

## 2 Modèle à double endommagement

Le comportement d'un matériau peut être séparé en deux parties :

- une partie durcissante pour laquelle un endommagement « classique » suffit à obtenir des résultats numériques satisfaisants et non dépendants du maillage ;
- une partie adoucissante pour laquelle des problèmes numériques de dépendance au maillage peuvent être observés. Une technique de régularisation est alors souvent utilisée pour obtenir une solution moins dépendante du maillage.

Les techniques de régularisation habituellement utilisées (endommagement non-local, effet-retard, ...) s'appliquent à tout le processus d'endommagement, aussi bien dans sa partie durcissante qu'adoucissante. Un modèle à deux variables d'endommagement a été développé pour pouvoir traiter de manière distincte ces deux types d'endommagement. On définit ainsi :

- une variable d'endommagement diffus  $\omega_d$  dont la loi d'évolution engendre un comportement durcissant du matériau et qui n'est pas régularisée ;
- une variable d'endommagement localisé  $\omega_l$  dont la loi d'évolution est à l'origine du comportement adoucissant du matériau et qui est régularisée avec la méthode du second-gradient [5].

Ce modèle permet de limiter la zone de régularisation à la partie du modèle ayant un comportement adoucissant, correspondant également à la zone de rupture qui peut ainsi être identifiée plus facilement. Un modèle similaire avec deux variables d'endommagement est également utilisé dans [6] sans régularisation de l'endommagement localisé (qui se concentre alors dans une bande de l'épaisseur d'un élément-fini). On considère que la variable d'endommagement diffus correspond à un ensemble de micro-fissures réparties dans le matériau à une échelle fine, et que l'endommagement localisé provient de la coalescence de ces micro-fissures à une échelle plus grossière pour former des macro-fissures. Les volumes élémentaires représentatifs (VER) correspondants à ces deux échelles sont représentés sur la figure 1, et le tableau 1 récapitule les caractéristiques de ce modèle à deux variables d'endommagement.

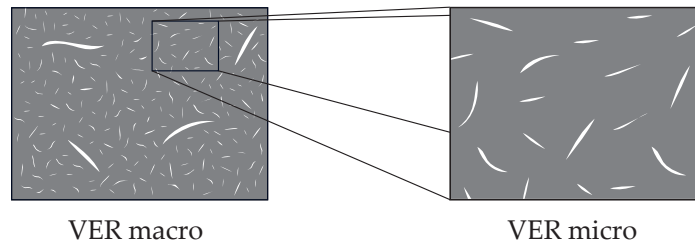


FIGURE 1 – VER macroscopique et VER microscopique

Endommagement	Diffus	Localisé
échelle	micro	macro
loi de comportement	durcissant	adoucissant
régularisation	sans	gradient
variable d'endommagement	$\omega_d$	$\omega_l$
variable pilotant l'endommagement	$z_d$	$z_l$
variable régularisée	sans	$\bar{z}$
variable mémoratrice	$\kappa_d$	$\kappa_l$

TABLE 1 – Caractéristiques du modèle à deux variables d'endommagement

La variable  $z_l$  pilotant l'endommagement localisé  $\omega_l$  est choisie égale à la déformation équivalente de Mazars (définie dans [2]). La variable  $z_d$  pilotant l'endommagement diffus  $\omega_d$  est reliée à  $z_l$  par la relation suivante permettant de tenir compte d'un effet de décharge du VER microscopique en présence d'endommagement localisé (macro-fissures) :

$$z_d = (1 - \omega_l) z_l. \quad (1)$$

L'endommagement total  $D$  tenant compte des deux types de dégradations aux échelles microscopique et macroscopique est calculé avec la formule :

$$1 - D = (1 - \omega_d)(1 - \omega_l). \quad (2)$$

L'implémentation numérique a été faite en adaptant la formulation faible à deux champs présentée dans [7], ce qui permet d'obtenir un modèle numérique assez simple mais un peu coûteux en temps de calcul

du fait de la perte de la symétrie de la matrice de raideur du problème lorsque le comportement devient adoucissant. La figure 2 montre des résultats de calculs utilisant ce modèle à deux endommagements sur lesquels on peut identifier les deux zones d'endommagement diffus et localisé. La structure est soumise à un déplacement vertical homogène du bord supérieur tandis que le bord inférieur reste immobile.

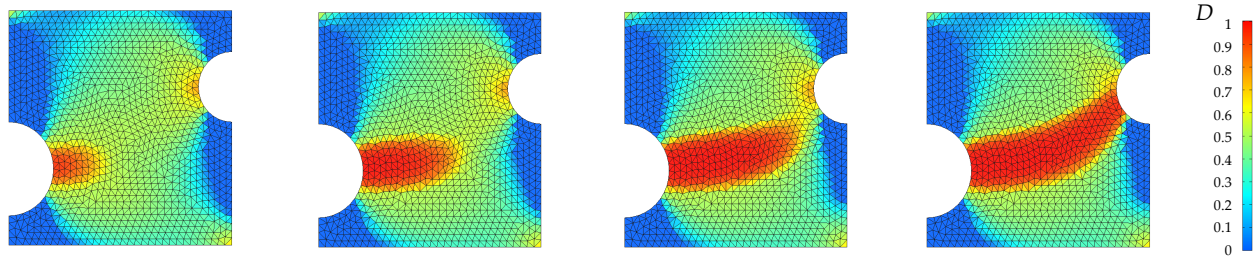


FIGURE 2 – Résultats de calculs éléments-finis utilisant le modèle à deux variables d'endommagement

### 3 Modèle cohésif

Le comportement de la zone cohésive est défini par

$$[[\mathbf{u}]] = s_{eq} \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\sigma}^s, \quad \text{avec,} \quad \mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} (1-c_0) & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$[[\mathbf{u}]]$  étant le saut de déplacement,  $\boldsymbol{\sigma}^s$  la contrainte cohésive,  $s_{eq}$  un terme caractérisant la souplesse de la zone cohésive,  $c_0$  un indicateur de contact égal à 1 si les deux bords de la fissure sont en contact et à 0 sinon, et  $\beta$  un coefficient faisant le lien entre la souplesse de la zone cohésive en cisaillement et en traction. Le modèle cohésif utilisé a été construit pour donner un résultat cohérent par rapport à un modèle de fissuration diffuse [8] (endommagement réparti dans une bande d'épaisseur fixée). La construction du modèle cohésif est schématisée sur la figure 3 et permet d'obtenir la relation suivante entre le coefficient  $\beta$  du modèle cohésif et le coefficient de poisson  $\nu$  du matériau continu :

$$\beta = 2(1 + \nu). \quad (4)$$

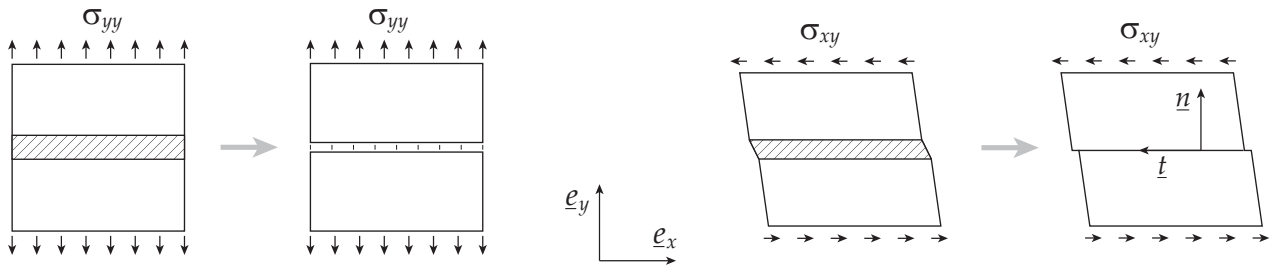


FIGURE 3 – Construction du modèle cohésif par une analogie avec un modèle de fissuration diffuse

L'implémentation numérique du modèle cohésif a été réalisée de telle sorte qu'une loi cohésive à rigidité initiale infinie (loi extrinsèque) puisse être utilisée. De cette manière, il n'y a aucune ouverture de la fissure tant que le critère d'initiation de la zone cohésive n'est pas atteint. Ceci a d'abord été fait en utilisant une formulation dont les champs discrétisés sont :

- pour la partie continue du domaine, le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  ;
- pour la partie discontinue du domaine, le champ de contrainte cohésive  $\boldsymbol{\sigma}^s$ .

Pour cette formulation, des termes de souplesse sont calculés pour la zone cohésive à la place des termes de raideur devant être calculés avec les formulations en déplacement. Le système final à résoudre est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{U} \\ d\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mathbf{F}_{\text{ext}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité de la partie continue du matériau,  $\mathbf{S}$  une matrice de souplesse calculée pour la zone cohésive, et  $\mathbf{H}$  une matrice permettant d'établir le couplage entre la partie continue et la partie discontinue du modèle. Ceci permet de remplacer dans le système à résoudre les termes infinis présents avant l'initiation de la fissure par des termes nuls. Cette formulation est différente de celles basées sur la méthode du lagrangien augmenté car un seul champ est discrétisé pour la partie discontinue du modèle (le champ de contrainte cohésive). Un inconvénient de cette formulation est que des termes de souplesse infinis apparaissent lorsque la zone cohésive est rompue, nécessitant de supprimer les éléments cohésifs au fur et à mesure qu'ils se cassent. Un autre inconvénient provient d'indéterminations apparaissant lors de l'actualisation des variables internes de la zone cohésive : il est difficile de définir un critère pour distinguer une charge d'une décharge car la contrainte cohésive diminue dans les deux cas.

Une solution à ces deux problèmes a été apportée par la reformulation du problème mécanique en utilisant une contrainte cohésive modifiée  $\zeta$  définie (pour un problème bidimensionnel) par

$$\zeta = \sigma^s + \alpha \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \quad \text{avec,} \quad \alpha = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$\alpha$  étant un paramètre numérique choisi par l'utilisateur. Le modèle cohésif utilisé est du même type que celui défini dans [9], où la loi cohésive relie une contrainte cohésive équivalente  $\sigma_{eq}^s$  à un saut de déplacement équivalent  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{eq}$ . Le fait d'introduire une contrainte cohésive modifiée permet de définir également une contrainte cohésive équivalente modifiée  $\zeta_{eq}$  vérifiant

$$\zeta_{eq} = \sigma_{eq}^s + \alpha \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{eq}. \quad (7)$$

$\alpha$  est choisi de tel sorte que la loi cohésive modifiée (reliant  $\zeta_{eq}$  à  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{eq}$ ) soit une fonction croissante du saut de déplacement équivalent  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{eq}$ . La figure 4 montre l'influence du paramètre  $\alpha$  sur la loi cohésive modifiée.

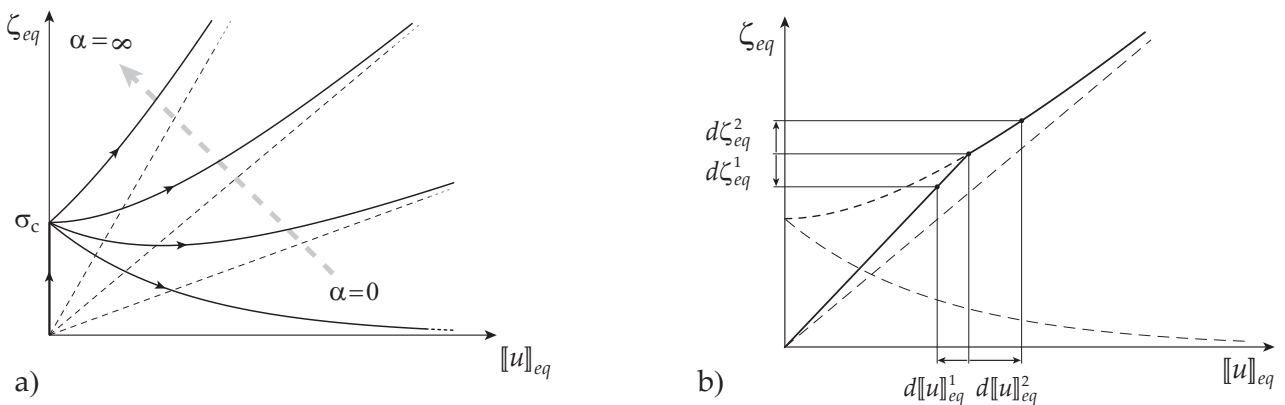


FIGURE 4 – Loi cohésive modifiée (a) et comportement incrémental en charge-décharge (b)

Des changements de variables sont effectués dans les équations faibles du problème pour supprimer complètement la contrainte cohésive des inconnues du problème et la remplacer par la contrainte cohésive modifiée. Cette opération ne change pas le problème mécanique mais permet d'éliminer les

problèmes numériques de la première formulation (souplesse infinie des éléments rompus et indétermination numérique de l'état de chargement). La figure 5 montre les résultats d'une étude de convergence réalisée pour un problème bidimensionnel (exposé dans [1]) en superposant les courbes de l'effort imposé  $\bar{F}$  en fonction du facteur de charge  $\lambda$  obtenues avec des maillages de densités différentes.

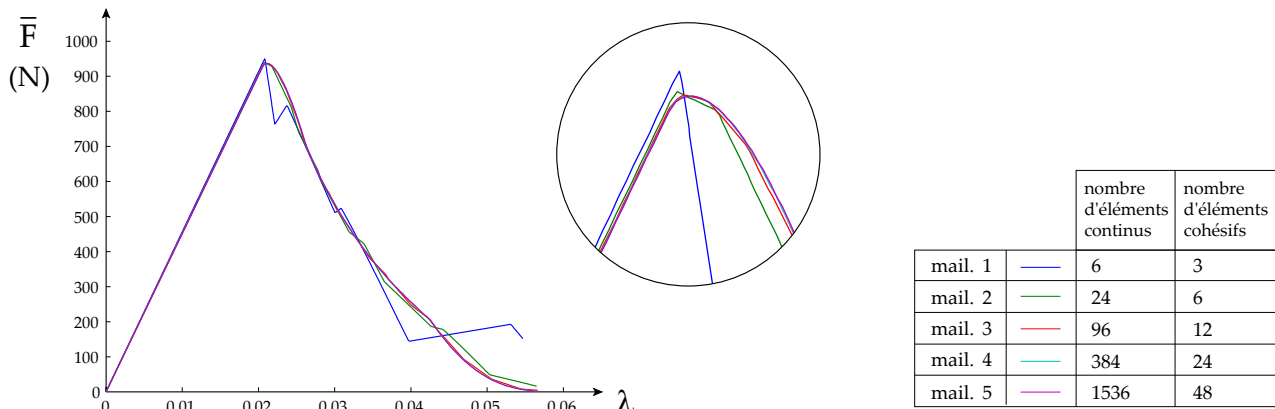


FIGURE 5 – Étude de la convergence des courbes effort-déplacement

#### 4 Transition endommagement-fissuration

La transition endommagement-fissuration a été étudiée avec l'objectif de construire un modèle combinant une description continue de la rupture (endommagement, plasticité) à une description discontinue (zone cohésive) prenant le relais à partir d'un certain stade d'endommagement. Ce modèle « mixte » a été construit de telle sorte que le comportement global de la structure reproduise le comportement obtenu avec un modèle continu régularisé avec la méthode du gradient implicite. La base de ces travaux est la notion de fissure équivalente développée dans [2, 3], selon laquelle un modèle de fissuration peut être construit à partir d'un modèle d'endommagement en imposant que l'énergie dissipée dans la fissure soit égale à l'énergie dissipée par le modèle d'endommagement servant de référence. Cette méthode, présentée dans [10], a été utilisée dans un cadre numérique unidimensionnel pour construire une loi cohésive équivalente à un modèle d'endommagement régularisé. Pour cela, deux calculs sont réalisés successivement :

- un premier calcul utilise le modèle d'endommagement régularisé de référence, les incréments d'énergie dissipée sont stockés à chaque nouveau pas de temps ;
- ces incréments d'énergie dissipée servent de donnée d'entrée à un deuxième calcul utilisant un modèle discontinu pour prendre en compte le comportement adoucissant du modèle (la donnée de l'énergie dissipée permet de compenser le fait que la loi cohésive est *a priori* inconnue).

L'initiation de la fissure équivalente se fait lorsque de l'énergie dissipée est introduite dans la discontinuité. Ce transfert d'énergie du modèle de référence vers le modèle équivalent débute lorsque le modèle de référence entre dans la phase adoucissante du comportement du matériau (donc lorsqu'il y a initiation de l'endommagement localisé, si le modèle de référence est le modèle à deux variables d'endommagement défini dans la partie 2). La loi cohésive est donc construite incrémentalement pendant le calcul. La méthode peut aussi être étendue aux cas de ruptures avec déformations plastiques résiduelles [11]. La figure 6 illustre la méthode de changement de modèle utilisée et montre un résultat de loi cohésive obtenu dans le cas d'un modèle de référence élasto-plastique endommageable.

La méthode de construction de la zone cohésive peut être vue comme une méthode de changement d'échelle où un modèle correspondant à une vision grossière de la rupture (le modèle cohésif) est construit à partir d'un modèle en donnant une description plus fine (le modèle d'endommagement régularisé). Le passage du modèle fin au modèle grossier se fait en ajoutant l'hypothèse que l'énergie dissipée n'est plus répartie dans un volume mais concentrée sur une surface. Une approche encore plus grossière serait de considérer que l'énergie dissipée est concentrée sur une ligne, on obtiendrait alors un modèle de Griffith équivalent en sortie.

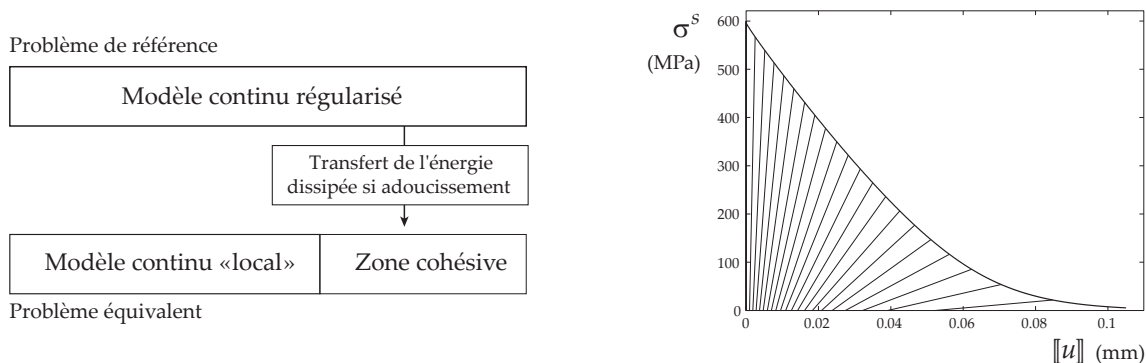


FIGURE 6 – Méthode pour la construction de la loi cohésive et exemple de loi cohésive équivalente pouvant être obtenue

## 5 Conclusion

Les modèles d'endommagement et de zones cohésives ont été étudiés conjointement. Une méthode basée sur la notion de fissure équivalente a été utilisée pour obtenir un modèle cohésif reproduisant le comportement d'un modèle d'endommagement régularisé. Les lois cohésives obtenues ayant une rigidité infinie, une formulation faible a été développée pour l'implémentation de ce type de lois. La construction de la loi cohésive nécessite d'être capable de faire clairement la séparation entre le comportement diffus et le comportement localisé de l'endommagement, ce qui a conduit à la définition d'un modèle comportant deux variables d'endommagement.

## Références

- [1] Cazes, F. 2010 Construction et implémentation de lois cohésives extrinsèques. *Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon)*
- [2] Mazars, J. 1984 Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non-linéaire et à la rupture du béton de structure, ENSET.
- [3] Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G. 1996 From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach. *International Journal of Solids and Structures* **33 (20)** 3327-3342
- [4] Barenblatt, G.I. 1962 The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. *Advances in Applied Mechanics* **7** 55-129
- [5] Aifantis, E.C. 1984 On the structural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology* **106** 326-330
- [6] Yaacoub Agha, H., Hild, F., Billardon, R. 1997 Microscopic and mesoscopic damage localization. *Applications of continuum damage mechanics to fatigue and fracture (ed. D.L. McDowell), American Society for Testing and Materials (ASTM), pp. 119-130, Philadelphia (USA)*
- [7] Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., de Vree, J.H.P. 1996 Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39 (19)** 3391-3403
- [8] Bažant, Z.P., Oh, B.H. 1983 Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures* **16 (3)** 155-177
- [9] Camacho, G.T., Ortiz, M. 1996 Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures* **33 (20)** 2899-2938
- [10] Cazes, F., Coret, M., Combescure, A., Gravouil, A. 2009 A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures* **46 (6)** 1476-1490
- [11] Cazes, F., Simatos, A., Coret, M., Combescure, A. 2010 A cohesive zone model which is energetically equivalent to a gradient-enhanced coupled damage-plasticity model. *European Journal of Mechanics - A/Solids* **29 (6)** 976-989