



**HAL**  
open science

## Écoulement d'un grain sur un plan incliné lisse soumis à des vibrations

Arnaud Benedetti, Maxime Nicolas, Blanche Dalloz, Philippe Sornay

► **To cite this version:**

Arnaud Benedetti, Maxime Nicolas, Blanche Dalloz, Philippe Sornay. Écoulement d'un grain sur un plan incliné lisse soumis à des vibrations. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03422818

**HAL Id: hal-03422818**

**<https://hal.science/hal-03422818>**

Submitted on 9 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Écoulement d'un grain sur un plan incliné lisse soumis à des vibrations

A. BENEDETTI<sup>a, b</sup>, M. NICOLAS<sup>b</sup>, B. DALLOZ<sup>b</sup> ET P. SORNAY<sup>a</sup>

a. CEA, DEN, DEC, SPUA, LCU, F-13108 Saint-Paul-Lez-Durance (France)

b. Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels (IUSTI), GEP, UMR 6595, 5 rue Enrico Fermi, 13453 Marseille cedex 13 (France)

## Résumé :

Nous nous intéressons à l'influence des vibrations sur les propriétés rhéologiques d'un milieu granulaire sec cohésif. Préalablement à l'étude d'un milieu granulaire, nous considérons le mouvement d'un grain sur un plan incliné lisse soumis à des vibrations afin de déterminer, plus précisément, le rôle de la friction paroi-grain. Un modèle simple, utilisant une loi de Coulomb à coefficient de friction constant, a été développé et permet de prédire les trajectoires des grains observées expérimentalement. L'existence de trois régimes d'écoulement dits {stick, stick-slip et slip} en fonction des paramètres de vibration a été mise en évidence.

## Abstract :

We focus our interest on the influence of vibration on rheological properties for a dry and cohesive granular material. Before reaching the scale of granular matter (the bed), we consider the move of one grain on vibrated inclined plane, so that to determine, precisely, the role of friction wall/grain. A simple model using a Coulomb law with a constant friction coefficient, was developed and allows us to predict the trajectory of one grain. The existence of three flow regimes {stick, stick-slip and slip} function of the vibration's parameters was demonstrated.

**Mots clefs :** Milieu granulaire, cohésion, adhérence, vibration, friction, plan incliné

## 1 Introduction

De façon générale, les milieux granulaires sont au centre de nombreuses activités industrielles : génie civil (bétons, stabilité des sols), agroalimentaire (stockage et transport des céréales), pharmaceutique (médicaments, cosmétiques) ou métallurgie des poudres notamment. La maîtrise de leur mise en œuvre passe par la compréhension de leur comportement à l'écoulement. A partir des connaissances sur les écoulements de milieux granulaires secs et modèles [1 à 5], nous étudions l'influence des vibrations sur les propriétés rhéologiques d'un milieu granulaire sec et cohésif. Ce dernier est constitué de particules obtenues par granulation mécanique de poudres qui ne s'écoulent pas naturellement. Cette préparation de poudres est souvent utilisée en milieu industriel pour obtenir un écoulement satisfaisant.

Préalablement à l'étude du comportement d'un milieu granulaire soumis à des vibrations, nous nous intéressons à l'influence des conditions de vibration pour un grain placé sur un plan incliné lisse afin de déterminer le rôle de la friction paroi-grain et sa vitesse de déplacement. Un modèle simple utilisant une loi de Coulomb à coefficient de friction constant [6] a été développé. Les résultats de cette étude et les premiers éléments de comparaison entre les expériences et le modèle sont présentés dans ce document.

## 2 Étude expérimentale

### 2.1 Dispositif expérimental

La figure 1 présente le dispositif expérimental utilisé. Il est constitué d'un générateur de vibration (vibreur) et d'un support vibrant sur lequel repose le plan dont l'angle d'inclinaison est réglé à l'aide de deux glissières à  $\pm 0,2^\circ$  près. La réaction du montage aux sollicitations appliquées par le vibreur a préalablement été analysée à l'aide d'accéléromètres placés dans les trois directions sur le plan incliné afin de s'assurer de

l'absence de vibrations parasites.

Le plan incliné lisse est une paroi en aluminium poli pour alléger la masse mobile mise en mouvement par le vibreur. Le matériau granulaire est constitué de grains d'alumine obtenus par granulation mécanique puis frittés. Leur taille est comprise entre 300 et 500 $\mu$ m. La forme de ces grains est anguleuse (figure 2) et celle-ci diffère quelque peu d'un grain à l'autre. Ainsi, selon leur forme, les grains réagissent différemment aux vibrations. Leur adhérence sur le plan incliné dépend de leur géométrie.

Les vibrations transmises au plan sont des vibrations horizontales de forme sinusoïdale orientées perpendiculairement à l'inclinaison du plan (de direction y) (figure 1). Les paramètres de la vibration sont exprimés en fréquence,  $f$  (Hz) ou en pulsation,  $\omega$  ( $2\pi f$ ) et en amplitude,  $A$  (m) ou en accélération relative,  $\Gamma$  avec  $\Gamma = A\omega^2/g$ . Leurs caractéristiques sont mesurées par observation du déplacement d'un point solide du plan à l'aide d'une caméra rapide. Pour une fréquence fixée à 30Hz, nous avons fait varier l'accélération relative entre 0 et 3. L'inclinaison du plan varie entre 5 et 35° (figure 1).

Les grains sont déposés sur le plan incliné, un à un, à l'aide d'un pinceau en fil de cuivre relié à la terre pour réduire/annihiler les forces électrostatiques. Ces grains sont immobiles avant que nous augmentions progressivement l'accélération de la vibration jusqu'à leur mise en mouvement. Cette accélération est mesurée et permet de calculer l'accélération relative seuil. Pour l'observation des trajectoires des grains, l'accélération de la vibration qui est supérieure à l'accélération seuil, est directement fixée à la valeur souhaitée.

L'acquisition des trajectoires est réalisée à l'aide d'une caméra rapide, cadencée à 1000 images/s. Après l'acquisition et le traitement des images, nous disposons de l'évolution du contour représentatif du grain en vue de dessus. Ensuite, nous relevons la position du centre du grain à chaque instant et nous caractérisons sa trajectoire en termes d'amplitude d'oscillation du grain, de fréquence propre du grain et de longueur d'oscillation du grain (équivalent à la longueur d'onde).

Par ailleurs, les observations montrent que le grain reste en contact avec le plan à tout instant.

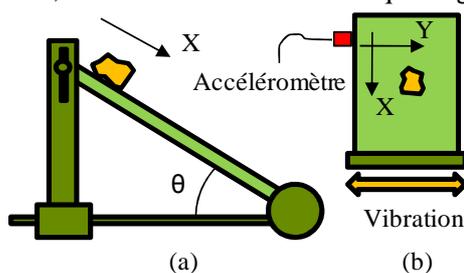


FIG. 1 – Représentation du dispositif expérimental  
(a) – vue de profil ; (b) – vue de dessus.

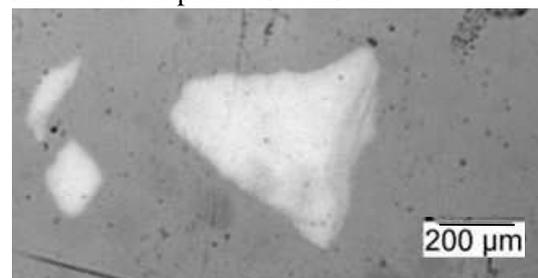


FIG. 2 – Morphologie d'un grain d'alumine.

## 2.2 Résultats expérimentaux

### 2.2.1 Vibration seuil d'écoulement

Sur la figure 3, nous présentons les accélérations relatives minimum nécessaires pour permettre l'écoulement de grains d'alumine déposés sur un plan dont l'inclinaison est inférieure à l'angle spontané d'écoulement,  $\theta_s$  qui est de 28° (pour le milieu granulaire). L'accélération de la vibration mesurée nous renseigne sur l'énergie nécessaire à injecter au système paroi/grain pour vaincre les forces de friction. Pour les grains mis en œuvre, il existe une plage, plus ou moins large, d'accélérations seuils permettant l'écoulement des grains sur le plan. Les causes de cette dispersion sont dues à des différences de morphologie des grains ; nous avons constaté que certains grains avaient tendance à rouler/basculer alors que d'autres semblent adhérer davantage au plan. Nous remarquons également que le seuil d'accélération ne semble pas, ou faiblement, dépendre de l'angle d'inclinaison, à moins que sa dépendance soit masquée par la dispersion

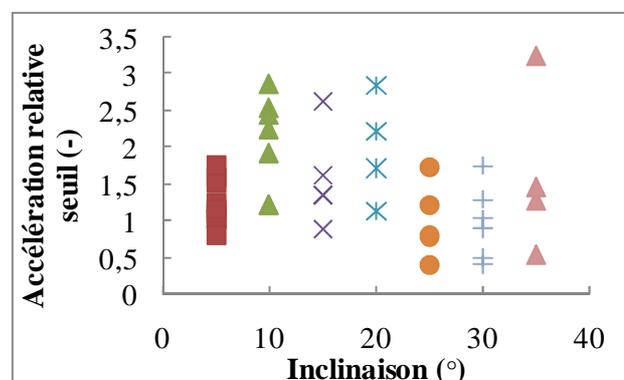


FIG. 3 – Accélération de la vibration nécessaire à l'écoulement pour différents grains sur un plan incliné lisse.

des résultats.

## 2.2.2 Trajectoire

La figure 4 présente le déplacement d'un grain d'alumine sur un plan incliné à 15° soumis à des vibrations (30Hz,  $\Gamma = 1,4$ ) dans le référentiel du laboratoire. La figure 5 présente l'évolution du déplacement de ce grain au cours du temps suivant x et y dans le même référentiel.

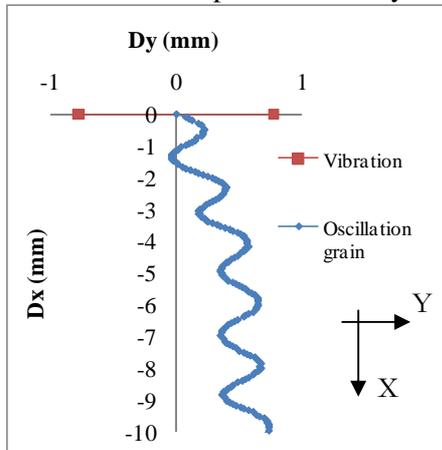


FIG. 4 – Position du centre du grain sur un plan incliné lisse (15°) soumis à des vibrations (30Hz,  $\Gamma = 1,4$ ).

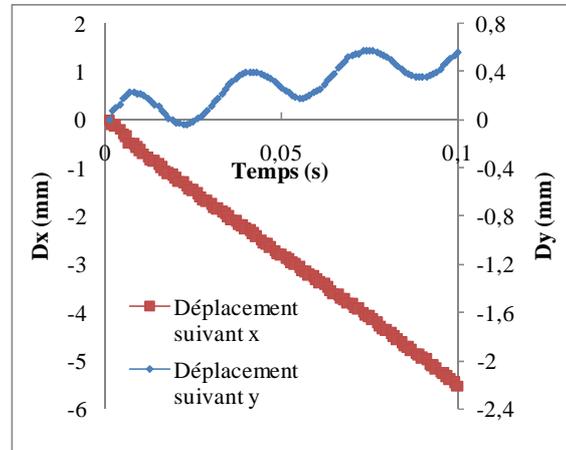


FIG. 5 – Evolution du centre du grain sur un plan incliné lisse (15°) soumis à des vibrations (30Hz,  $\Gamma = 1,4$ ) en fonction du temps (avec un pas de temps = 0,001s).

Au cours de l'écoulement, le grain oscille sur le plan suivant la direction Y et acquiert une vitesse d'écoulement suivant la direction X constante (figure 5). La dérive du grain vers les valeurs de Y positives n'est pas significative de l'expérience. Elle dépend de la rugosité du plan à la position initiale du grain, de la forme du grain, ... Pour d'autres grains, des dérives vers les valeurs de Y négatives ont été observées.

Nous avons reporté sur le tableau 1 les grandeurs caractéristiques du déplacement de plusieurs grains pour différentes conditions expérimentales. Les dispersions observées entre les grains testés dans des conditions de vibration et d'inclinaison données sont dues à leur différence de morphologie. L'amplitude d'oscillation et la fréquence moyenne du grain dans ces conditions d'écoulement sont du même ordre de grandeur que celles de la vibration. Nous constatons que, pour des inclinaisons inférieures à 10°, l'amplitude d'oscillation du grain est supérieure à celle de la vibration alors que pour des angles supérieurs à 10°, l'amplitude du grain est inférieure à celle de la vibration. Pour des angles d'inclinaison supérieurs à 20°, le grain a tendance à rouler/basculer selon la direction X avec ou sans l'apport de vibration. La face du grain en contact avec la paroi change. Le roulement contribue au déplacement du grain sur le plan. Pour ce type de particules, il existe un domaine d'angle d'inclinaison pour lesquels leur roulement est limité.

La vitesse des grains selon la direction X augmente continuellement avec l'angle d'inclinaison ; faiblement jusqu'à une inclinaison de 15° puis beaucoup plus rapidement pour des inclinaisons supérieures à 15°.

Conditions expérimentales	Mesure	Grain 1	Grain 2	Grain 3	Moyenne	Ecart type (%)
$\theta = 5^\circ$ $f = 30\text{Hz}$ , $A_{\text{vib}} = 1,8\text{mm}$	Amplitude (mm)	1,9	1,9	2,1	2,0	5,9
	Vitesse /x (m/s)	0,02	0,02	0,02	0,02	2,5
$\theta = 10^\circ$ $f = 30\text{Hz}$ , $A_{\text{vib}} = 1,5\text{mm}$	Amplitude (mm)	1,4	1,5	1,6	1,6	4,6
	Vitesse /x (m/s)	0,03	0,03	0,02	0,03	21,8
$\theta = 15^\circ$ $f = 30\text{Hz}$ , $A_{\text{vib}} = 1,6\text{mm}$	Amplitude (mm)	1,4	1,5	1,5	1,5	1,7
	Vitesse /x (m/s)	0,05	0,03	0,04	0,04	22,7
$\theta = 20^\circ$ $f = 30\text{Hz}$ , $A_{\text{vib}} = 1,7\text{mm}$	Amplitude (mm)	1,5	1,6	1,7	1,6	5,2
	Vitesse /x (m/s)	0,1	0,1	0,1	0,1	14,3

TAB. 1 – Quelques grandeurs caractéristiques du déplacement de grains sous différentes conditions expérimentales (\*A vib : Amplitude de la vibration).

## 3 Simulations numériques

### 3.1 Modèle

Pour modéliser l'écoulement d'un grain sur un plan incliné lisse soumis à des vibrations, nous avons fait comme hypothèse que les grains sont suffisamment anguleux pour ne pas rouler/basculer. Par conséquent,

les différents moments de rotation peuvent être négligés et l'équation du mouvement est la somme des forces dues à la gravité, à la friction entre le grain et la paroi et aux vibrations appliquées au plan :

$$M\ddot{D} = Mg \sin(\theta)\bar{X} - \bar{\tau} - M\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)\bar{Y} \quad (1)$$

où M est la masse du grain, D est le déplacement du grain, g est l'accélération de la pesanteur,  $\theta$  est l'inclinaison du plan,  $\tau$  est la force de friction et  $\{A, \omega\}$  sont les paramètres de la vibration, soit l'amplitude et la pulsation. Cette équation est proche de celle mentionnée par [7]. Pour la résolution des équations, nous avons adimensionné les variables :

$$\left\{ \tilde{t} = \sqrt{\frac{g \cos(\theta)}{A}} t ; \tilde{D} = \frac{1}{A} \bar{D} ; \tilde{\tau} = \frac{\bar{\tau}}{Mg \cos(\theta)} ; Fp = \omega \sqrt{\frac{A}{g \cos(\theta)}} \right\} \quad (2)$$

où t est le temps, D est le déplacement dans les directions X et Y et Fp est le paramètre caractérisant la vibration (équivalent au rapport des accélérations suivant les coordonnées X et Y).

L'équation (1) peut donc se reformuler :

$$\frac{d^2 \tilde{D}}{dt^2} = \tan(\theta)\bar{X} - \tilde{\tau} - Fp^2 \cos(Fp\tilde{t} + \varphi)\bar{Y} \quad (3)$$

Nous avons choisi une méthode implicite pour résoudre cette équation. La loi de friction que nous avons choisie pour l'instant, est une loi de friction de Coulomb simple avec un coefficient de friction constant,  $\mu$ .

## 3.2 Résultats numériques

Les paramètres de la simulation sont  $\{\mu, \theta, Fp\}$  avec  $\mu$ , le coefficient de friction entre la paroi et le grain,  $\theta$ , l'inclinaison du plan et Fp, le paramètre de vibration. Pour nos conditions initiales, nous considérons que le grain est posé sur le plan sans vitesse initiale et que les forces électrostatiques sont nulles.

### 3.2.1 Vibration et seuil de déplacement

En faisant varier les paramètres d'inclinaison,  $\theta$  et de vibration, Fp, nous réalisons un diagramme de phase traduisant l'évolution de l'interaction entre la paroi et le grain suivant les conditions de vibration. Ce diagramme de phase met en évidence trois régimes de déplacement : stick, stick-slip et slip que nous définissons par la suite. Pour cette représentation, nous avons normalisé les paramètres en définissant :

$$\left\{ Fp_{norm} = \frac{Fp}{\sqrt{\mu}} ; \theta_{norm} = \frac{\tan(\theta)}{\mu} \right\} \quad (4)$$

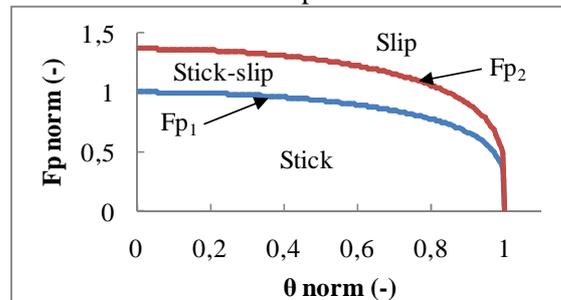


FIG. 6 – Diagramme de phase des différents régimes d'écoulement d'un grain sur un plan incliné soumis à des vibrations.

Sur la figure 6, nous identifions deux limites séparant trois modes de mouvement. Pour une condition de vibration inférieure à la condition limite entre stick et stick-slip ( $Fp < Fp_1$ ), le grain adhère en permanence au plan. Pour une condition de vibration supérieure à la condition limite entre stick-slip et slip ( $Fp > Fp_2$ ), le grain glisse continument sur la paroi vibrée. Pour une condition de vibration comprise entre ces deux conditions limites ( $Fp_1 < Fp < Fp_2$ ), le grain a un mouvement stick-slip (défini par la suite). Les limites  $Fp_1$  et  $Fp_2$  sont définies par les expressions suivantes :

$$\left\{ Fp_1 = (\mu^2 - \tan^2(\theta))^{1/4} ; Fp_2 = \left( \left( 1 + \frac{\pi^2}{4} \right) (\mu^2 - \tan^2(\theta)) \right)^{1/4} \right\} \quad (5)$$

La condition de vibration minimale à la mise en mouvement du grain,  $Fp_1$ , est égale à la racine quatrième de la différence des carrés entre la friction du grain sur la paroi et sa gravité (dans un repère normalisé). La condition régissant la limite entre les domaines stick-slip et slip s'écrit comme le produit de la condition de vibration  $Fp_1$  par une constante.

### 3.2.2 Trajectoire

La figure 7 présente un exemple de simulation de trajectoire, dans le référentiel du plan, pour une condition de vibration par domaine de phase et pour une inclinaison prise égale  $20^\circ$ . Pour une "intensité" de vibration insuffisante pour atteindre le seuil d'écoulement ( $F_p = 0,6$  équivalent à  $\Gamma = 0,34$ ), le grain adhère continument au plan, nous sommes dans le domaine stick. La trajectoire du grain est donc confondue avec celle du plan. Pour une "intensité" de vibration strictement supérieure au seuil d'écoulement du grain ( $F_p = 0,9$  équivalent à  $\Gamma = 0,76$ ), le grain glisse sans interruption sur le plan, il s'agit du domaine slip. Le grain est continument en mouvement par rapport au plan. Pour une "intensité" de vibration intermédiaire ( $F_p = 0,75$  équivalent à  $\Gamma = 0,53$ ), la trajectoire du grain sur le plan est une succession d'étapes « collées » et « glissées » sur le plan, c'est le domaine stick-slip. Les vibrations ne sont pas suffisantes pour permettre au grain de se déplacer continument par rapport au plan. La forme de l'oscillation du grain n'est pas une forme sinusoïdale mais elle s'apparente à une forme en dent de scie dans le référentiel du plan. L'amplitude et la longueur d'oscillation sont beaucoup plus faibles que lorsque le grain glisse continument.

La figure 8 présente l'évolution des vitesses selon les directions X et Y des grains pour les trois configurations. Pour une "intensité" de vibration du domaine stick ( $F_p = 0,6$ ), les vitesses du grain sur le plan restent nulles. Lorsque l'"intensité" de vibration est dans le domaine slip ( $F_p = 0,9$ ), la vitesse suivant la direction X oscille autour d'une valeur moyenne après trois oscillations sans jamais s'annuler. La période de cette oscillation est égale à la demi-période de l'oscillation du plan. Pour une "intensité" de vibration dans le domaine stick-slip ( $F_p = 0,75$ ), la vitesse du grain s'annule durant une partie de l'oscillation du plan ; cette phase correspond à la phase collée.

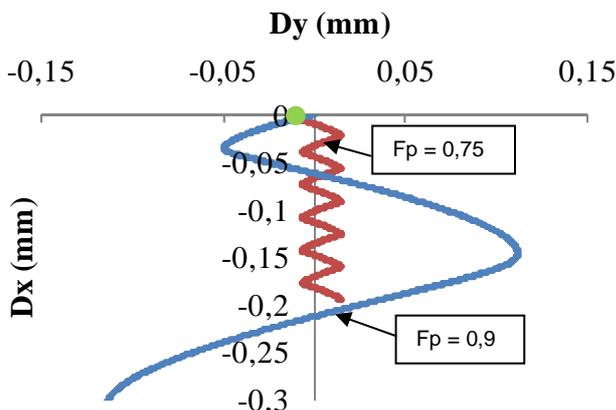


FIG. 7 – Trajectoire simulée, dans le référentiel du plan, d'un grain placé sur un plan incliné soumis à des vibrations  $\{\mu=\tan(30^\circ), \theta=20^\circ, F_p=0,6$  (vert) ;  $0,75$  (rouge) ;  $0,9$  (bleu)}.

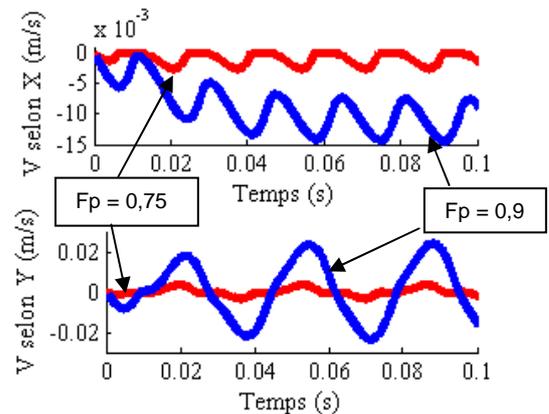


FIG. 8 – Evolution des vitesses simulées d'un grain placé sur un plan incliné soumis à des vibrations  $\{\mu=\tan(30^\circ), \theta=20^\circ, 0,75$  (rouge) ;  $0,9$  (bleu)}.

## 4 Comparaison et discussions des résultats

La figure 9 présente les différents paramètres  $F_p$  calculés à partir des accélérations seuils relevées expérimentalement sur le diagramme de phase simulé. Les grains qui roulent légèrement sont positionnés en dessous de la courbe  $F_{p1}$  (5) et les grains qui adhèrent le plus au plan sont les points les plus éloignés de cette courbe. La dispersion des accélérations seuils est d'une part liée à la différence de morphologie des grains mis en œuvre. D'autre part, il existe toujours une dispersion intrinsèque à la transition stick-slip [6].

Pour comparer les trajectoires issues des simulations avec celles issues des expériences, le seul paramètre du modèle que nous ne connaissons pas, est le coefficient de friction entre la paroi et le grain. Les autres paramètres du modèle correspondent aux conditions expérimentales telles que l'inclinaison du plan ou les paramètres de la vibration que nous maîtrisons. Par ailleurs, expérimentalement, nous avons accès à la vitesse moyenne des grains selon la direction X et son déplacement selon la direction Y. Il est donc possible de calculer la valeur de  $\mu$  qui permet de rendre compte des résultats expérimentaux à partir de ces deux grandeurs. Par exemple, pour l'écoulement d'un grain sur un plan incliné à  $15^\circ$  soumis à des vibrations  $\{f = 30\text{Hz}, \Gamma = 1,4\}$ , nous trouvons un coefficient de friction égal à  $\tan(27,5^\circ)$  à partir de son déplacement selon Y tandis que la valeur trouvée à partir de sa vitesse moyenne selon X est égale à  $\tan(30,5^\circ)$ . La détermination de  $\mu$  à partir de la vitesse du grain dans la direction X est celle qui est la plus précise car la vitesse moyenne selon cette direction est connue avec une très bonne précision. En revanche, une erreur de  $30\mu\text{m}$  lors de la mesure de l'amplitude de l'oscillation du grain selon Y conduit à une variation de la valeur du coefficient de

friction  $\mu$  de  $\tan(27,5^\circ)$ , à  $\tan(30,5^\circ)$ .

Sur la figure 10, nous avons représenté les vitesses expérimentales et simulées selon les directions X et Y du grain. Les évolutions des vitesses en fonction du temps selon Y sont semblables. En revanche, il ne nous est pas possible de confirmer expérimentalement la présence des oscillations de la vitesse dans la direction X. L'amplitude des oscillations de la vitesse selon X étant inférieure à 10mm/s, l'amplitude maximale de déplacement à observer est de l'ordre de 100 $\mu$ m sur une demi-période (environ 8ms). Pour observer ces oscillations, il faudra que la cadence d'acquisition de la caméra rapide soit supérieure à 5000im/s et que la résolution d'un pixel soit de l'ordre de grandeur de la dizaine  $\mu$ m. Les courbes simulées présentées ont été calculées avec la valeur de  $\mu$  déterminée à partir de la vitesse moyenne dans la direction X.

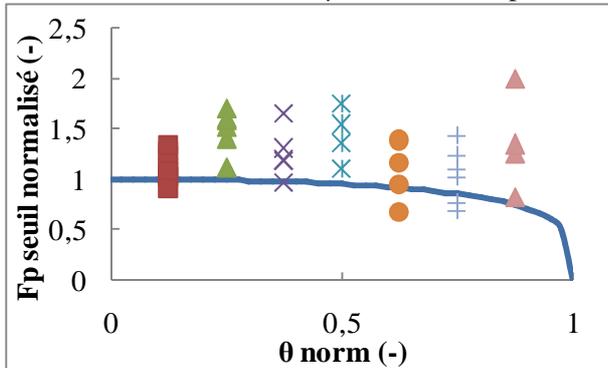


FIG. 9 – Comparaison des "intensités" de vibration seuils normalisées obtenues expérimentalement et par simulation pour un coefficient de friction paroi-grain égal à  $\tan(40^\circ)$ .

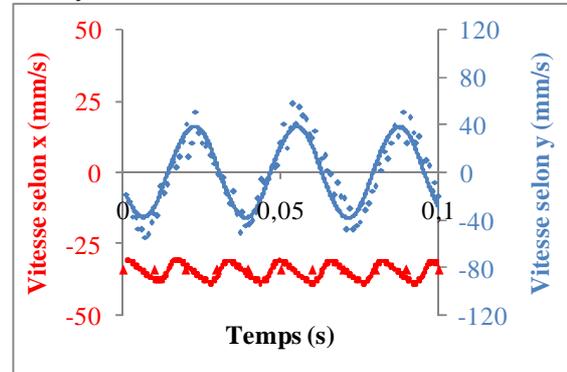


FIG. 10 – Comparaison des vitesses expérimentales et simulées suivant la direction X (en rouge) et Y (en bleu) d'un grain d'alumine. Les symboles représentent les valeurs expérimentales, les traits continus les valeurs issues du modèle.

{ $\mu = \tan(30,5^\circ)$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $f = 30\text{Hz}$ ,  $\Gamma = 1,4$ ,  $F_p = 1,54$ }.

## 5 Conclusion et perspectives

Les expériences et le modèle développé ont permis de mettre en évidence trois régimes de déplacement : stick, stick-slip et slip. Ces différents régimes dépendent, dans le cas étudié, seulement de deux paramètres pour un type de particule donné : l'inclinaison du plan,  $\theta$  et le paramètre de vibration,  $F_p$ . La limite entre les domaines stick et stick-slip correspond à la racine carrée de la différence entre la friction du grain sur la paroi et sa gravité (dans un repère normalisé). La condition régissant la limite entre les domaines stick-slip et slip s'écrit comme le produit de la condition de vibration  $F_{p1}$  par une constante.

L'écoulement d'un grain non roulant sur un plan incliné lisse soumis à des vibrations tend vers un régime stationnaire ; l'amplitude des oscillations selon la direction parallèle aux vibrations et la vitesse du grain dans la direction perpendiculaire sont constantes après seulement 2 oscillations. Les premières observations de l'écoulement d'un lit de particules sur un plan incliné vibré tendent à montrer que la largeur du lit (parallèle aux vibrations) et sa vitesse selon la direction perpendiculaire sont également constantes. Les interprétations sont en cours. Nous recherchons plus particulièrement les causes à l'origine de la présence ou de l'absence de ségrégation.

Par ailleurs, la seule variable ajustable de notre modèle étant le coefficient de friction entre la paroi et le grain, rendre compte via la modélisation d'une trajectoire expérimentale revient à déterminer le coefficient de friction paroi-grain.

## References

- [1] Chevoir F., Ecoulements granulaires, LCPC, 16, 2008.
- [2] Lanier J., Mécanique des milieux granulaires, Hermes Science, 2001.
- [3] GDR.MiDi, On dense granular flows, The European Physical Journal E, 14(4), 341-365, 2004.
- [4] Jop P., Forterre Y., Pouliquen O., A constitutive law for dense granular flows, Nature, 441, 727, 2006.
- [5] Lindemann K., Two dimensional granular flow in a vibrated small angle funnel, Phys. Rev. E, 2000.
- [6] Olsson H. & al., Friction models and friction compensation, Euro. Journal of Control, 4(3), 176-95, 1997.
- [7] Westermo B., Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation, Earthquake Eng. And Struct. Dyn., 11, 135-146, 1983.