



**HAL**  
open science

# Une méthode numérique à deux échelles pour la détermination du comportement effectif des composites non linéaires

Guy Bonnet, Trung-Kien Nguyen, Julien Yvonnet, Vincent Monchiet

## ► To cite this version:

Guy Bonnet, Trung-Kien Nguyen, Julien Yvonnet, Vincent Monchiet. Une méthode numérique à deux échelles pour la détermination du comportement effectif des composites non linéaires. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03422812

**HAL Id: hal-03422812**

**<https://hal.science/hal-03422812v1>**

Submitted on 9 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une méthode numérique à deux échelles pour la détermination du comportement effectif des composites non linéaires

G. Bonnet<sup>a</sup>, T.-K. Nguyen<sup>a</sup>, J. Yvonnet<sup>a</sup>, V. Monchiet<sup>a</sup>,

a. Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, LMSME UMR8208 CNRS, 5 boulevard Descartes, 77454 Marne la Vallée Cedex, France

## Résumé :

*On présente une approche à deux échelles en vue de l'identification de la loi de comportement macroscopique des composites dont les phases sont régies par une loi en puissance. La méthode repose sur des calculs locaux sur la cellule élémentaire et des techniques d'interpolation pour la reconstruction de la loi macroscopique. Les calculs non linéaires locaux sont effectués à l'aide de l'algorithme reposant la transformée de Fourier rapide et le Lagrangien augmenté, introduite dans [6]. La méthode d'interpolation repose sur une technique de séparation de variable qui permet de réduire considérablement les calculs nécessaires à l'identification de la loi macroscopique. Cette approche présente de nombreux avantages, en outre, elle est purement séquentielle, c'est-à-dire qu'elle ne nécessite pas de calculs simultanés aux deux échelles. A titre d'illustration on propose, dans la seconde partie de ce travail, une application à la flexion d'une poutre constituée d'un composite à fibres.*

## Abstract :

*We present a two-scale approach for the identification of the macroscopic behavior of non linear, power law type, heterogeneous materials. The method is based on local computations over the elementary cell and use original interpolation techniques to reconstruct the macroscopic law. The local nonlinear problems are performed using the algorithm based fast Fourier transform and the augmented Lagrangian introduced in [6]. The interpolation is realized by means of an outer product decomposition that significantly reduces the calculations necessary to identify the macroscopic law. This two-scale approach present many advantages. For instance, it is purely sequential, namely it does not require simultaneous calculations on both scales. As for illustration, we apply our approach to the calculation of the response of a beam consisting of fiber reinforced composite and submitted to bending.*

**Mots clefs : composite non linéaire, homogénéisation, interpolation**

## 1 Introduction

L'homogénéisation des milieux hétérogènes non linéaires est un domaine de recherche qui a fait l'objet de travaux ces dernières décennies. On notera en outre les approches analytiques [3], [4], [5], etc. Elles reposent généralement sur des hypothèses restrictives importantes tant sur le comportement locale que sur la morphologie de la microstructure. De plus elle conduisent à des bornes mais ne permettent pas de résoudre de manière exacte le problème non linéaire posé sur la cellule élémentaire. La résolution "exacte" du problème d'homogénéisation du composite non linéaire et son implémentation dans un code de calcul de structure peut-être effectuée par les approches de type "FE2" (éléments finis au carré) développés par Feyel et al. [1] ou encore Gosh et al.[2]. Ces approches sont dites concourantes puisqu'elles traitent simultanément les deux échelles. Elle nécessite donc un grand nombre de calculs, ce qui en limite, à l'heure actuelle, son application à des problèmes de structures comportant un grand nombre de degrés de libertés. Une des difficultés majeure réside dans le fait que la loi de comportement

macroscopique n'est pas connue. Une méthode alternative à ces méthodes a été récemment proposée par Yvonnet et al. [7] et repose sur des techniques d'interpolation multidimensionnelles. Cette approche présente plusieurs avantages face aux méthodes concourantes et ce, essentiellement par sa nature séquentielle. La loi de comportement macroscopique, une fois déterminée, peut alors être appliquée à tous les problèmes de structure et permet des études de convergence des calculs éléments finis macroscopiques.

Dans cet article on propose d'abord de rappeler les équations du problème d'homogénéisation dans le cas d'un composite constitué de phases régies par des lois en puissance puis, on présente la méthode basée sur les techniques d'interpolation en vue de la reconstruction de la loi macroscopique. Dans une seconde partie, on propose d'illustrer la méthode dans le cas d'un composite à fibres. Les calculs locaux sont réalisés par la méthode basée sur la transformée de Fourier introduite dans [6]. La loi macroscopique est alors reconstruite puis implémentée dans un code élément fini pour la résolution d'un problème de flexion de poutre.

## 2 Homogénéisation des composites régis par une loi puissance

On considère un milieu périodique défini par sa cellule de base de volume  $V$  et constituée de plusieurs phases, notées  $\alpha$ , chacune définie dans un volume  $V_\alpha$ . On note par  $f_\alpha = V_\alpha/V$  la fraction volumique des phases. Le comportement des constituants est décrit par une loi puissance :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x}) \quad (1)$$

Où  $w(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x})$  est le potentiel local des déformations, défini par :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{x}) = \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{x}) w_{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})) \quad (2)$$

Les  $I_{\alpha}(\underline{x})$  sont les fonctions caractéristiques des phases. Les potentiels  $w_{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}))$  sont de la forme :

$$w_{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})) = \frac{9}{2} k_{\alpha} \varepsilon_m(\underline{x})^2 + \frac{\sigma_{0,\alpha} \varepsilon_{0,\alpha}}{m_{\alpha} + 1} \left( \frac{\varepsilon_{eq}(\underline{x})}{\varepsilon_0} \right)^{m_{\alpha} + 1} \quad (3)$$

où  $\varepsilon_m(\underline{x}) = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}))/3$  et  $\varepsilon_{eq}$  est la déformation équivalente au sens de Von Mises :

$$\varepsilon_{eq}(\underline{x}) = \left( \frac{2}{3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}) \right)^{1/2} \quad (4)$$

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x})$  est la partie déviatorique du champ de déformation,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) - \varepsilon_m(\underline{x}) \mathbf{I}$ . Les exposants  $m_{\alpha}$  sont compris dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Des conditions de périodicité sont imposés à la cellule élémentaire :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n} \text{ antipériodique, } \underline{u}(\underline{x}) - \mathbf{E} \cdot \underline{x} \text{ périodique} \quad (5)$$

où  $\mathbf{E}$  est la déformation macroscopique imposée à la cellule élémentaire. Pour un état de déformation macroscopique imposé  $\mathbf{E}$ , le potentiel effectif du milieu périodique est défini par :

$$W(\mathbf{E}) = \inf_{\underline{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})} \langle w(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v}(\underline{x}))) \rangle_V \quad (6)$$

où  $\mathcal{K}(\mathbf{E})$  définit l'ensemble des champs cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}) = \{ \underline{v}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} + \underline{v}^*(\underline{x}), \underline{v}^*(\underline{x}) \text{ périodique} \} \quad (7)$$

et  $\langle \bullet \rangle_V$  représente la moyenne prise sur le volume élémentaire représentatif du milieu hétérogène. La loi de comportement macroscopique est donnée par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \mathbb{C}(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \quad (8)$$

Le principe d'homogénéisation consiste donc, classiquement, à déterminer les composantes de la contrainte macroscopique,  $\boldsymbol{\Sigma}$  pour une valeur de  $\mathbf{E}$  imposée. Contrairement au cas de l'élasticité linéaire, pour lequel  $W(\mathbf{E})$  est une fonction quadratique de  $\mathbf{E}$ , ici, la forme générale de ce potentiel est inconnue.

### 3 Principe de la méthode par interpolation

Pour des raisons de simplicité d'écriture, on introduit les notations suivantes :  $E_1 = E_{11}, E_2 = E_{22}, \dots, E_6 = \sqrt{2}E_{12}$  et on introduit les mêmes notations pour les composantes de  $\Sigma$ . Les composantes de la contrainte macroscopique sont donc des fonctions des composantes de la déformations macroscopiques,  $\Sigma_i = \mathcal{F}_i(E_1, \dots, E_6)$ . Aucune expression analytique des ces six fonctions ne peuvent être déterminées (hormis dans des cas très particulier tel que celui du composite stratifié), en conséquence c'est sous forme numérique et discrétisée que nous allons évaluer ces fonctions. Les  $\Sigma_i$  pour  $i = 1..6$  sont donc définis sur un l'espace vectoriel de dimension 6,  $\mathcal{E} = (E_1, E_2, \dots, E_6)$ . Bien que les  $E_i$  soient définis sur des intervalles non bornés, l'hypothèse de petites déformations nous autorise à borner l'intervalle de définition. Ainsi, les  $E_i$  pour  $i = 1, \dots, 6$  sont supposés varier sur les l'intervalles  $\Delta_i = [E_i^{\min}, E_i^{\max}]$  où  $E_i^{\min}$  et  $E_i^{\max}$  sont respectivement choisis égaux à  $-5.10^{-3}$  et  $5.10^{-3}$  pour tout  $i = 1, \dots, 6$ . Le domaine  $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_6$  est discrétisé sur une grille régulière. Pour cela, on introduit l'ensemble de "m + 1" points :  $\{\varphi_0^i, \varphi_1^i, \dots, \varphi_m^i\}$  tels que  $E_i^{\min} = \varphi_0^i < \varphi_1^i < \dots < \varphi_m^i = E_i^{\max}$  et  $\varphi_1^i - \varphi_0^i = \varphi_2^i - \varphi_1^i = \dots = \varphi_m^i - \varphi_{m-1}^i$ . Le noeud de  $\Delta$  est le point  $(\varphi_{i_1}^1, \dots, \varphi_{i_6}^6)$  avec  $0 \leq i_\alpha \leq m$ . On choisit un même nombre de points dans chacune des directions  $E_i$ . Le domaine  $\Delta$  contient alors  $(m + 1)^6$  noeuds pour les problèmes tridimensionnels et  $(1 + m)^3$  pour le cas 2D. A chaque noeud  $(\varphi_{i_1}^1, \dots, \varphi_{i_6}^6)$  on note :

$$(\Sigma_i)_{[i_1, \dots, i_6]} = \Sigma_i(\varphi_{i_1}^1, \dots, \varphi_{i_6}^6) \quad (9)$$

Qui est la valeur de  $\Sigma_i$  évaluée au noeud  $(\varphi_{i_1}^1, \dots, \varphi_{i_6}^6)$ . Les  $(\Sigma_i)_{[i_1, \dots, i_6]}$  pour  $(0 \leq i_\alpha \leq m)$  sont alors stockés dans des hypermatrices de dimension  $(m + 1)^6$ , elles sont notées  $\mathbb{S}_i$ .

L'ensembles de valeurs discrètes de ces hypermatrices peuvent être obtenues en procédant à des calculs locaux, c'est à dire sur une cellule élémentaire représentative du composite et soumise un déformation macroscopique. Ces calculs sont être réalisés en utilisant les outils numérique classiques, basées sur les éléments finis ou sur la transformée de Fourier discrète [6]. C'est cette dernière méthode, bien adaptée pour traiter les microstructures complexes, a été utilisé dans ce travail. Une fois l'ensemble des valeurs discrètes obtenues, on procède à l'interpolation des composantes de la contrainte macroscopique. Des approches classiques, tel que l'interpolation par spline cubique, peut être utilisée. Toutefois cette approche conduit à la résolution d'un système linéaire de très grande taille lorsque la fonction interpolée dépend d'un nombre important de variables. Une approche par séparation des variables permet de réduire significativement les temps de calculs. On se propose de rappeler ici brièvement la méthode, pour plus de détail le lecteur pourra se référer à Yvonnet et al. [7]. Les hypermatrices  $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1, \dots, \mathbb{S}_6$  sont approchées par :

$$\mathbb{S} = \sum_{r=1}^R \underline{\phi}_1^r \otimes \dots \otimes \underline{\phi}_6^r \quad (10)$$

Où  $R$  est un entier et les  $\underline{\phi}_i^r$  pour  $i = 1, \dots, 6$  sont des vecteurs associés au composantes  $E_i$ . Pour une valeur de  $R$  donnée, les vecteurs  $\underline{\phi}_i^r$  sont déterminés en résolvant un problème des moindre carrés :

$$\phi_i^r = \min \left\| \mathbb{S} - \sum_{r=1}^R \underline{\phi}_1^r \otimes \dots \otimes \underline{\phi}_6^r \right\|^2, \quad r = 1..R, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (11)$$

Où  $\|\bullet\|$  est la norme de Frobenius. La valeur de  $R$  est augmentée jusqu'à atteindre la précision  $\beta$  souhaitée :

$$\left\| \mathbb{S} - \sum_{r=1}^R \underline{\phi}_1^r \otimes \dots \otimes \underline{\phi}_6^r \right\|^2 \leq \beta \quad (12)$$

La résolution du problème non linéaire (11) est effectuée à l'aide de l'algorithme des moindres carrés alternés (voire [7] pour plus de détails). Une fois les  $\underline{\phi}_i^r$  identifiés, on obtient une représentation de

$\Sigma_i(E_1, \dots, E_6)$  sous la forme :

$$\Sigma_i(E_1, \dots, E_6) \simeq \sum_{r=1}^R \underline{\psi}_1^r(E_1) \dots \underline{\psi}_6^r(E_6) \quad (13)$$

Où les  $\underline{\psi}_i^r(E_i)$  sont définis par :

$$\underline{\psi}_i^r(E_i) = \sum_{k=1}^n N_k(E_i) (\underline{\phi}_j^r)_k \quad (14)$$

Les  $N_k$  sont des fonctions d'interpolation unidimensionnelle de type spline cubique.

## 4 Application

On se propose maintenant d'illustrer la méthode. On considère un composite défini par sa cellule élémentaire donnée ci-dessous (figure 1). La cellule est carrée, de cotés  $2b$ , et contient 16 inclusions circulaires de rayons identiques  $a = 0.1b$  définissant ainsi la fraction volumique de fibres  $f_I = 0.1256$ . Le comportement des inclusions est régi par une loi élastique linéaire et l'on posera donc  $n_I = m_I = 1$ .

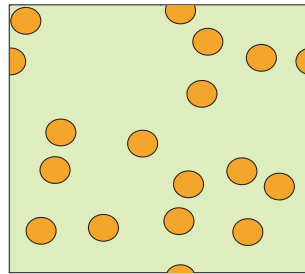


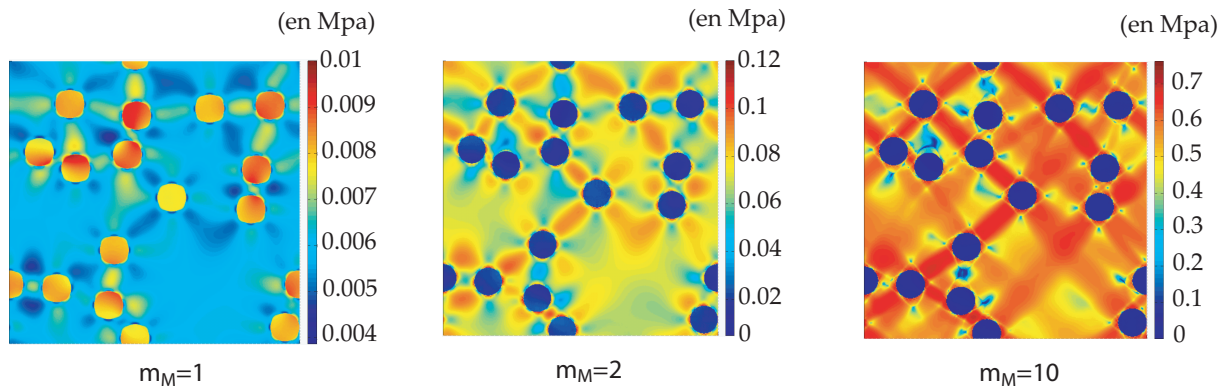
FIGURE 1 – Cellule élémentaire du composite à fibres

On définit par  $c = \mu_I/\mu_M$  le contraste entre les phases (les modules de compressibilité  $k_I$  et  $k_M$  étant choisis égaux). Les paramètres des matériaux sont définis dans le tableau ci-dessus. Le comportement

	$k$	$\sigma_0$	$\varepsilon_0$	$n$
matrice	20MPa	1MPa	1	$n_M$
inclusion	20MPa	2MPa	1	1

TABLE 1 – Paramètres des matériaux

des inclusions est élastique tandis que celui de la matrice est en loi puissance avec l'exposant  $n_M$ . Le problème considéré est plan, les composantes de la déformation sont  $E_1, E_2$  et  $E_6$  et les composantes de la contrainte macroscopique sont  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma_6$ . L'espace des déformations  $E_1, E_2, E_6$  est représenté par un cube que l'on discrétise suivant une grille régulière à  $21 \times 21 \times 21$  points. Pour chacun des points on calcule donc la réponse macroscopique, en résolvant un problème non linéaire posé sur la cellule élémentaire 1. Un nombre total de 9261 calculs locaux est donc nécessaire pour obtenir les formes discrétisées  $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \mathbb{S}_6$  dans composantes  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_6$ . Les problèmes locaux sont résolus par le méthode fondée sur la transformée de Fourier rapide (TFR) et une formulation Lagrangienne, introduite dans [6]. A titre d'illustration, on représente sur les figures 2 les cartes des valeurs de la contrainte équivalente,  $\sigma_{eq}$ , pour un contraste de 2, des valeurs d'exposant  $n_M$  choisies égales à 1, 2, 10 et un chargement imposé défini par  $E_{11} = -E_{22} = 0.005$  et  $E_{12} = 0$ . L'exemple correspondant à  $n_M = 1$  est celui d'un composite élastique linéaire. Il a été choisi uniquement à titre de comparaison

FIGURE 2 – Carte de la contrainte équivalente pour un exposant  $n_M = 1, 2, 10$ .

avec les cas non linéaires  $n_M = 2$  et  $n_M = 10$ . Les calculs basés sur la TFR ont été menés avec une résolution de l'image de  $512 \times 512$ . Pour chaque problème les composantes des hypermatrices  $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \mathbb{S}_6$  sont obtenues à l'aide de la relation de moyenne  $\Sigma_i = \langle \sigma_i \rangle_V$  où  $\langle \bullet \rangle_V$  représente la moyenne prise sur le volume de la cellule élémentaire. La réponse macroscopique du composite non linéaire est alors obtenue par interpolation des hypermatrices à l'aide des techniques d'interpolation présentées dans la section précédente. Sur la figure 3 on représente la réponse du composite dans

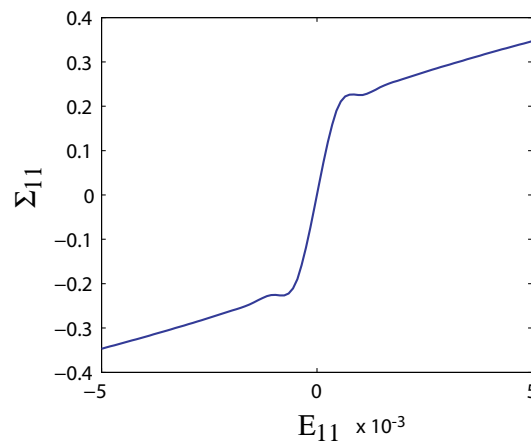


FIGURE 3 – Courbe contrainte-déformation macroscopique obtenue par interpolation

le plan  $\Sigma_{11} - E_{11}$ . On observe une très légère oscillation de la courbe aux points de forte courbure. L'origine de ces oscillations est attribuée à la méthode d'interpolation utilisée, et elles peuvent être réduites en augmentant le nombre de points de discrétisation de l'espace des déformations. La loi macroscopique du composite est maintenant implémentée dans un code élément fini et on propose ici une application au problème de flexion d'une poutre. La poutre est en état plan de déformation, un déplacement nul est imposé à l'extrémité gauche de la poutre tandis qu'à l'autre extrémité on impose une charge répartie  $F = 10^{-3} N/m$  (cf. figure 4). Les dimensions de la poutre sont données par  $H = 10^{-3} m$  et  $L = 5.10^{-3} m$ . Le maillage est constitué de 804 éléments triangulaires. Les figures 5 donnent la distribution de la contrainte équivalente macroscopique,  $\Sigma_{eq}$ , dans la poutre pour les exposants  $n_M = 2$  et  $n_M = 10$  et le contraste  $c = 2$ .

## 5 Conclusion

Une approche numérique à deux échelles du comportement des matériaux hétérogènes non linéaires a été présentée dans ce travail. L'approche consiste à déterminer la contrainte macroscopique sur une

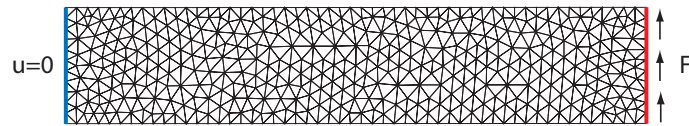
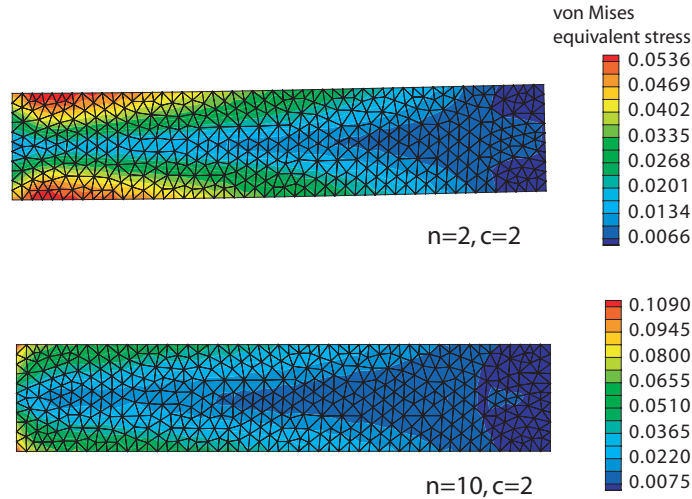


FIGURE 4 – Géométrie et maillage de la structure.

FIGURE 5 – Répartition de la contrainte équivalente,  $\Sigma_{eq}$ , dans la poutre pour  $n_M = 2, 10$ .

grille de valeurs dans l'espace des déformations macroscopiques. Chacune des valeurs des composantes de la contrainte est déterminée en résolvant numériquement un problème local non linéaire par une méthode basée sur la transformée de Fourier Rapide. La loi de comportement est alors obtenue par des techniques d'interpolation. L'approche a été appliquée dans le cas d'un composite à fibre très rigides et dont la matrice est régie par une loi en puissance et pour diverses valeurs d'exposants. Enfin, la loi macroscopique obtenue a été intégrée dans un code élément finis et appliquées en vue de la résolution du problème de flexion de poutre.

## Références

- [1] **Feyel F.** 1999 Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. *Comput. Mater. Sci.* **1**(1-4); 344-354.
- [2] **Ghosh S., Lee K., Suresh M.** 1995 Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoï cell finite element method. *Int. J. Solids Struct.* **21**(1); 27-62.
- [3] **Hill R.** 1965 Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids.* **13**; 89-101.
- [6] **Michel J.C., Moulinec H., Suquet P.** 2001 A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **52**; 139-160.
- [5] **Ponte-Castañeda P.** 1991 The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39, 45-71, .
- [4] **Willis J.R.** 1983 he overall response of composite materials. *T, ASME J. Appl. Mech.* **50**; 1202-1209.
- [7] **Yvonnet J., Gonzalez D., He Q.-C** 2009 Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* **198** 2723-2737.