



**HAL**  
open science

# Ondes non linéaires en écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants : mise en évidence d'un effet stabilisant

Nicolas Roland, Emmanuel Plaut, Chérif Nouar

## ► To cite this version:

Nicolas Roland, Emmanuel Plaut, Chérif Nouar. Ondes non linéaires en écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants : mise en évidence d'un effet stabilisant. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03422701

**HAL Id: hal-03422701**

**<https://hal.science/hal-03422701>**

Submitted on 9 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Ondes non linéaires en écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants : mise en évidence d'un effet stabilisant

NICOLAS ROLAND\*, EMMANUEL PLAUT ET CHÉRIF NOUAR

LEMMA, Nancy-Université & CNRS, 2 avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandœuvre cedex

\*LEMMA - Unlock CFD, 2000 route des Lucioles, Les Algorithmes - Thales A, 06480 Biot

## Résumé :

*L'étude expérimentale de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyau de fluides non newtoniens montre souvent un retard à l'apparition des bouffées turbulentes. Pour le modéliser, nous utilisons l'approche par calcul d'ondes non linéaires de [1]. Le fluide est supposé purement rhéofluidifiant. Les calculs sont faits grâce à un nouveau code pseudo-spectral de continuation. On constate une augmentation du Reynolds d'apparition des ondes, qui seraient précurseurs et supports des bouffées turbulentes.*

## Abstract :

*Experiments focused on the transition to turbulence in pipe flow of non-Newtonian fluids often show that the apparition of puffs is delayed because of non-Newtonian effects. In order to model this phenomenon, we use the nonlinear wave approach of [1]. The fluid is assumed to be purely shear-thinning, without any elastic effect. The computations are done with a new pseudo-spectral code and continuation methods. Nonlinear solutions with a fundamental azimuthal wavenumber  $m_0 = 2$  and 3 have been computed. They appear at a Reynolds number that is higher than the one in the Newtonian case (see the Fig. 2b and 5b). This delay might be connected with the delay of the apparition of puffs, because the waves are somehow forerunners and support of the puffs.*

## Mots clefs : transition vers la turbulence, instabilités & bifurcations

## 1 Introduction

La modélisation de la transition vers la turbulence dans des écoulements en tuyau de fluides newtoniens est difficile parce que l'écoulement laminaire de Hagen-Poiseuille est linéairement stable. Une approche intéressante a émergé récemment, avec l'idée de calculer des ondes non linéaires qui constitueraient des solutions instables précurseurs et support des écoulements turbulents [1, 2, 3], ou encore qui séparerait l'attracteur turbulent de l'attracteur laminaire [4]. Cette idée a pu se concrétiser grâce au développement de modèles où l'on force l'équation de Navier-Stokes afin d'induire des structures bidimensionnelles, constituées de « rouleaux » et de « jets ». Ces jets sont susceptibles de subir une bifurcation sous critique par instabilité inflexionnelle, qui peut elle même mener à des solutions ondes non linéaires tridimensionnelles à forçage nul. Ces solutions ondes, qui ont une signification physique, sont calculées par des méthodes de continuation [3, 5]. La pertinence de cette approche a été confirmée par des études expérimentales [2].

Dans le cas de fluides non newtoniens rhéofluidifiants, pour lesquels la viscosité diminue avec le taux de cisaillement (cf. par exemple la loi de Carreau 6), l'écoulement laminaire est aussi stable, et il semble donc intéressant d'appliquer la même approche. Alors qu'en fluides viscoélastiques plusieurs études de ce type ont déjà vu le jour, en géométrie plane toutefois, [6, 7, 8], à notre connaissance cette approche n'a pas été appliquée à des fluides rhéofluidifiants sans élasticité, dans quelque géométrie que ce soit. Nous avons présenté une première communication en 2009, [9], se focalisant sur le cas où le nombre d'onde azimuthal fondamental des ondes,  $m_0$ , est égal à 1. De fait un écoulement moyen possédant ce nombre d'onde a été observé expérimentalement dans un régime « faiblement turbulent » [10]. Cependant la méthode de forçage monomode (i.e., avec des termes de forçage monomodes en azimuth), dans ce cas, semble ne conduire qu'à des bifurcations sur-critiques. Nous présentons ici, plutôt, une étude des cas  $m_0 = 2$  et 3. Par continuation à partir du cas newtonien, où la méthode de forçage monomode fonctionne [3], nous avons pu calculer des solutions ondes non forcées en fluide rhéofluidifiant. Le nombre de Reynolds d'apparition de ces solutions augmente quand les effets de rhéofluidification augmentent, indiquant un effet stabilisant de cette rhéofluidification. L'objet de cette communication est de présenter ces résultats, en allant plus loin que [11], qui s'est focalisé seulement sur le cas  $m_0 = 3$ , pour une seule valeur du nombre d'onde axial  $q$ . Une interprétation physique de ces résultats sera proposée dans la section de conclusion.

## 2 Modèle utilisé : adimensionnement, rhéologie, géométrie. Code numérique

Nous utilisons le modèle de Carreau de fluide rhéofluidifiant incompressible [12]. L'écoulement a lieu dans un tuyau cylindrique de rayon  $\hat{a}$ , et est décrit en coordonnées cylindriques  $(\hat{r}, \theta, \hat{z})$ . Les calculs se font à gradient de pression moyen fixé, cf. les équations (9) et (14) infra. Les paramètres de contrôle sont la vitesse axiale  $\widehat{W}_0$  en  $\hat{r} = 0$  de l'écoulement laminaire entretenu par ce gradient de pression moyen, la viscosité dynamique à cisaillement nul  $\widehat{\mu}_0$ , la viscosité dynamique à cisaillement infini  $\widehat{\mu}_\infty$ , le temps caractéristique du fluide  $\widehat{\lambda}$  et l'indice de rhéofluidification  $n$ . Après adimensionnements utilisant la longueur  $\hat{a}$ , la vitesse  $\widehat{W}_0$ , la viscosité  $\widehat{\mu}_0$ , on fait apparaître un nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\hat{a}\widehat{\rho}\widehat{W}_0}{\widehat{\mu}_0} \quad (1)$$

avec  $\widehat{\rho}$  la masse volumique du fluide. En notant sans chapeau les quantités adimensionnées, l'équation de la quantité de mouvement prend la forme

$$\partial_t \mathbf{v} + \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + Re^{-1} \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} \quad (2)$$

avec  $\mathbf{v}$  (resp.  $p$ ) le champ de vitesse (resp. pression totale, i.e. contenant la contribution de la pesanteur),  $\underline{\underline{\tau}}$  le tenseur des contraintes visqueuses

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{\mathbf{D}}} . \quad (3)$$

Dans cette équation

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} + (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v})^T \quad (4)$$

est le tenseur des taux de déformations, dont le second invariant

$$\dot{\gamma} = (D_{ij}D_{ij}/2)^{1/2} . \quad (5)$$

La viscosité dynamique

$$\mu = \mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + (1 - \mu_\infty)(1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2)^{(n-1)/2} . \quad (6)$$

Dans tous nos calculs nous avons utilisé  $\mu_\infty = \widehat{\mu}_\infty/\widehat{\mu}_0 = 0$ , puisque pour la plupart des fluides  $\widehat{\mu}_\infty \ll \widehat{\mu}_0$ . Nous avons choisi de travailler avec  $n = 1/2$ , et d'utiliser

$$\lambda = \widehat{\lambda}\widehat{W}_0/\hat{a} = (\widehat{\lambda}\widehat{\mu}_0/\widehat{\rho}\hat{a}^2) Re \quad (7)$$

comme le paramètre non newtonien principal. S'il est nul, la loi de comportement (3), (6) redonne celle d'un fluide newtonien. Lorsqu'il augmente, les effets de rhéofluidification augmentent. Afin de calculer des solutions ondes de l'équation de la quantité de mouvement (2), qui est fortement non linéaire du fait de la loi de comportement (6), un code pseudo spectral de Petrov-Galerkin reposant sur une méthode de continuation a été écrit, en s'inspirant des travaux de [13]. Ce code, et sa validation, sont présentés en détail dans [11]. Pour des raisons de place, nous nous concentrons ici sur les résultats obtenus avec ce code, présentés dans leur contexte.

## 3 Écoulements laminaires de base

Ces écoulements de la forme

$$\mathbf{v}_b = W_b(r)\mathbf{e}_z \quad (8)$$

sont engendrés par un champ de pression totale

$$p = p_b = -Gz . \quad (9)$$

Le nombre de Reynolds  $Re$  (1) doit donc être vu comme un « Reynolds gradient de pression », puisqu'il définit le gradient de pression physique

$$\hat{G} = \frac{\widehat{\rho}\widehat{W}_0^2}{\hat{a}} G = \frac{\widehat{\rho}\widehat{W}_0^2}{\hat{a}} \frac{\alpha}{Re} = \frac{\widehat{\mu}_0^2}{\widehat{\rho}\hat{a}^3} \alpha Re , \quad (10)$$

où  $\alpha$  est un nombre réel positif donné par l'équation (2),

$$\alpha := Re G = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\mu_b W_b') \quad (11)$$

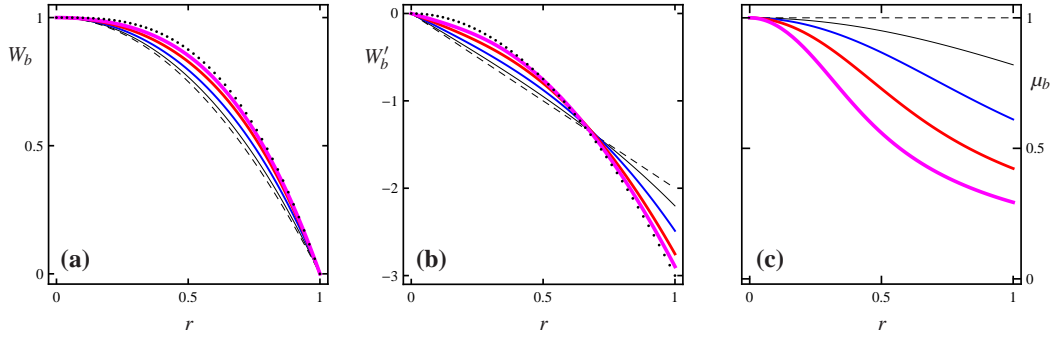


FIG. 1 – Profils caractéristiques des écoulements de base : **(a)** vitesse, **(b)** taux de cisaillement, **(c)** viscosité. Courbes noires pointillées :  $\lambda = 0$ , noires continues :  $\lambda = 0,5$ , bleues :  $\lambda = 1$ , rouges :  $\lambda = 2$ , magentas :  $\lambda = 4$ . Les disques indiquent les profils pour une loi de puissance  $\mu = (\lambda\dot{\gamma})^{n-1}$ , qui sont approchés lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

$\lambda$	$\overline{W}_b$	$\mu_p$	$1/\mu_p$	$\alpha$
0	0,500	1	1	4
0,5	0,517	0,8199	1,220	3,611
1	0,541	0,6107	1,637	3,038
2	0,567	0,4228	2,365	2,327

TAB. 1 – Propriétés des écoulements de base pour diverses valeurs de  $\lambda$ .

avec

$$\mu_b = \left[ 1 + \lambda^2 (W'_b)^2 \right]^{-1/4} \quad (12)$$

la viscosité de base. L'équation différentielle ordinaire (11), munie des conditions limites  $W_b(0) = 1$  et  $W_b(1) = 0$ , est résolue par méthode spectrale. Comme le montre la Fig. 1, lorsque le fluide devient plus fortement rhéofluidifiant, i.e.  $\lambda$  augmente, l'écoulement tend à devenir uniforme au centre du tuyau, tandis que le cisaillement tend à se concentrer près des parois, où la viscosité diminue. Ceci est quantifié dans la Tab. 1, qui donne la valeur de la vitesse débitante  $\overline{W}_b$ , la viscosité pariétale  $\mu_p = \mu_b(r = 1)$ , son inverse, ainsi que les valeurs de  $\alpha$ . Grâce à des prises de pression, on peut déterminer expérimentalement la contrainte tangentielle  $\widehat{\tau}_{rz}$  pariétale moyenne, quelque soit le régime d'écoulement, et en déduire à partir de la loi rhéologique, appliquée comme si l'écoulement était laminaire, la viscosité pariétale. On utilise donc souvent, à la fois expérimentalement et théoriquement, le nombre de Reynolds basé sur le diamètre, la vitesse débitante et la viscosité pariétale  $\widehat{\mu}_p$ , ou « Reynolds paroi »,

$$\overline{Re}_p = \frac{2\hat{\alpha}\hat{\rho}\overline{W}}{\widehat{\mu}_p} = \frac{2\overline{W}}{\mu_p} Re. \quad (13)$$

## 4 Ondes non linéaires

Les solutions ondes non linéaires recherchées sont de la forme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_b + \mathbf{u}, \quad p = p_b + \tilde{p} = -Gz + \tilde{p}, \quad (14)$$

avec  $\mathbf{u}$  et  $\tilde{p}$  périodiques sous  $\theta \mapsto \theta + 2\pi/m_0$ ,  $m_0$  étant le nombre d'onde azimutal fondamental,  $z \mapsto z + 2\pi/q$ ,  $q$  étant le nombre d'onde axial fondamental,  $t \mapsto t + 2\pi/\omega$ ,  $\omega$  étant la fréquence angulaire de l'onde. Celle-ci est reliée à la vitesse de phase  $c$  de l'onde par la relation  $\omega = cq$ . Pratiquement la pression fluctuante  $\tilde{p}$  est éliminée par projection sur les champs tests, parce que ceux-ci sont solénoïdaux, tandis que la vitesse fluctuante est recherchée sous la forme spectrale

$$\mathbf{u} = \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-M}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 a_{l m n k} \mathbf{v}_{lq_0, mm_0, n, k}(r) \exp\{i[mm_0\theta + lq_0(z - ct)]\}, \quad (15)$$

avec  $(L, M, N)$  les paramètres de troncature, et des fonctions de base  $\mathbf{v}_{q, m, n, k}$  bien choisies [11]. En fluide newtonien, nous avons reprogrammé la méthode de forçage de l'équation de Navier-Stokes évoquée en introduction, en utilisant comme [3] des termes de forçage monomodes en azimut, de la forme  $f(r) \cos(m_0\theta)$  pour la composante radiale de l'équation de Navier-Stokes,  $g(r) \sin(m_0\theta)$  pour la composante azimutale. Il importe de mentionner qu'en utilisant des forçages plus complexes, [14] ont calculé des ondes « asymétriques » pour

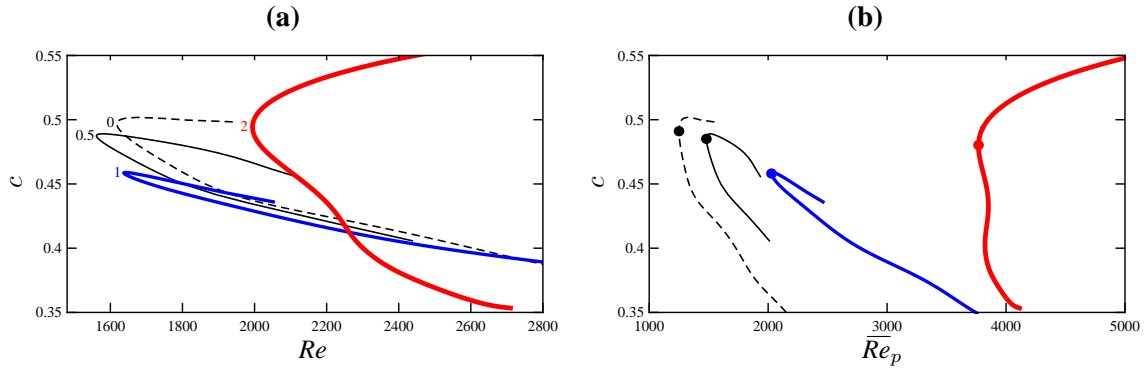


FIG. 2 – Vitesse de phase des ondes  $m_0 = 3$ ,  $q = 2,44$  en fonction (a) du Reynolds gradient de pression (1), (b) du Reynolds paroi (13). Courbes noires pointillées :  $\lambda = 0$ , noires continues :  $\lambda = 0,5$ , bleues :  $\lambda = 1$ , rouges :  $\lambda = 2$ . Les disques sur la figure (b) repèrent les « ondes critiques ».

$m_0 = 1$ , qui apparaissent très tôt en nombre de Reynolds. Cependant, ces ondes joueraient un rôle différent de celles obtenues par forçage monomodes, puisqu'elle supporteraient la frontière entre l'attracteur laminaire et l'attracteur turbulent [4], et non l'attracteur turbulent lui-même. Dans tout ce qui suit on se focalise sur la « famille » des ondes obtenues par forçage monomodes. Une fois des ondes forcées obtenues, on suit la bifurcation sous-critique correspondante pour obtenir des ondes non forcées, le paramètre de continuation étant l'amplitude  $F$  du forçage. Ensuite on suit les ondes en diminuant le  $Re$ , jusqu'à atteindre les valeurs les plus basses de celui-ci puis remonter en  $Re$  [voir par exemple la courbe newtonienne en pointillés de la Fig. 2a]. Le nombre de Reynolds le plus naturel pour évaluer le seuil d'apparition de ces ondes est celui construit sur la vitesse débitante,

$$\overline{Re}_p = \frac{2a\rho\overline{W}}{\widehat{\mu}_p} = \overline{Re} = \frac{2a\rho\overline{W}}{\widehat{\mu}} \text{ en fluide newtonien.} \quad (16)$$

[1, 3] ont montré que dans cette famille d'ondes, ce sont les ondes de nombre d'onde azimutaux  $m_0 = 3$  et 2 qui présentent les seuils les plus bas,

$$\overline{Re} = 1251 \text{ pour } m_0 = 3, \quad \overline{Re} = 1359 \text{ pour } m_0 = 2, \text{ en fluide newtonien.} \quad (17)$$

Les nombres d'ondes axiaux optimaux correspondants sont

$$q = 2,44 \text{ pour } m_0 = 3, \quad q = 1,55 \text{ pour } m_0 = 2, \text{ en fluide newtonien.} \quad (18)$$

L'étude paramétrique de l'influence du nombre d'onde axial étant lourde et à peine commencée, nous présentons seulement des résultats pour ces valeurs du nombre d'onde axial.

#### 4.1 Ondes non linéaires $m_0 = 3$

En partant de solutions newtoniennes  $\lambda = 0$  et en augmentant progressivement les valeurs de  $\lambda$ , nous avons obtenus les solutions pour  $\lambda = 0,5, 1$  et 2 dont certaines caractéristiques sont montrées sur la Fig. 2. Quand on utilise le Reynolds gradient de pression  $Re$ , l'évolution du Reynolds d'apparition des ondes avec  $\lambda$  n'est pas monotone [Fig. 2a]. Par contre, quand on utilise le Reynolds paroi  $\overline{Re}_p$ , le Reynolds d'apparition des ondes augmente quand  $\lambda$  augmente, pour atteindre des valeurs élevées lorsque  $\lambda = 2$  [Fig. 2b]. La Tab. 2 donne les valeurs précises des Reynolds calculés. Les barres d'erreur sont estimées en faisant des comparaisons entre les résultats obtenus avec des paramètres de troncature  $(L, M, N)$  et des paramètres de troncature supérieurs  $(L + 2, M + 2, N + 2)$ . Il est intéressant d'observer la diminution de la vitesse débitante dans les ondes, en comparant les colonnes  $\overline{W}_b$  et  $\overline{W}$  des Tab. 1 et 2. De façon plus fine, les champs de vitesse transverse moyens des Fig. 3a,c montrent bien les 3 paires de rouleaux contrarotatifs typiques des ondes  $m_0 = 3$ . Les 6 jets rapides au bord [Fig. 3a] coalescent dans le cas non newtonien pour former 3 jets rapides plus étendus [Fig. 3c]. Lorsque l'on considère la vitesse axiale totale moyenne [Fig. 3b,d] on observe aussi une homogénéisation au centre du tuyau, qui est liée aux effets rhéofluidifiants. Finalement la Fig. 4 montre que les ondes en fluide non newtonien ( $\lambda = 2$ ) sont moins « tridimensionnelles » que les ondes en fluide newtonien ( $\lambda = 0$ ).

#### 4.2 Ondes non linéaires $m_0 = 2$

Dans le cas newtonien, ces ondes sont les deuxièmes à apparaître, après les ondes  $m_0 = 3$ . Cette hiérarchie est conservée en fluides non newtoniens, comme le montre la comparaison entre les Fig. 2 et 5, ou celle entre les colonnes  $m_0 = 3$  et  $m_0 = 2$  de la Tab. 2. La considération des champs moyens des ondes montre que l'on a 4 jets rapides dans tous les cas [Fig. 6a,c] et une homogénéisation au centre [Fig. 6b,d] comme dans le cas  $m_0 = 3$ .

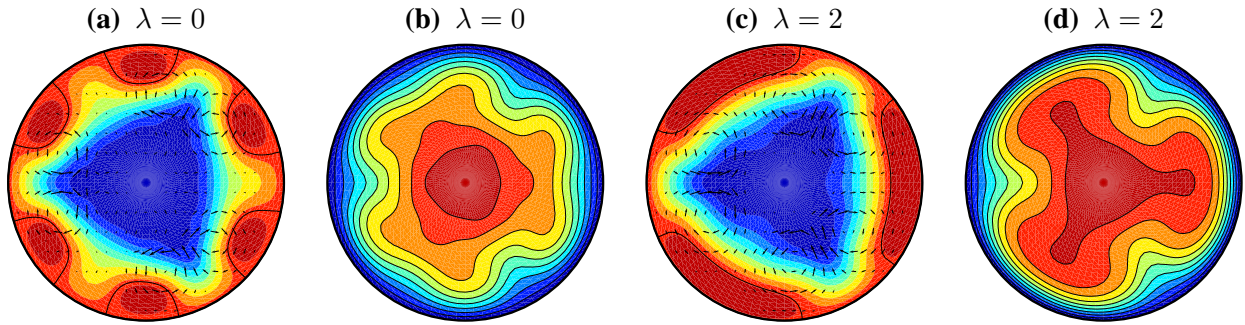


FIG. 3 – Champs moyennés en  $z$  des ondes critiques  $m_0 = 3, q = 2,44, \lambda = 0$  et  $2$ . **(a)** et **(c)** : vitesse axiale corrigée de l'écoulement laminaire (couleurs ; la ligne noire est le niveau  $u_z = v_z - W_b = 0$ ) et vitesse transverse (vecteurs). **(b)** et **(d)** : vitesse axiale totale  $v_z$ .

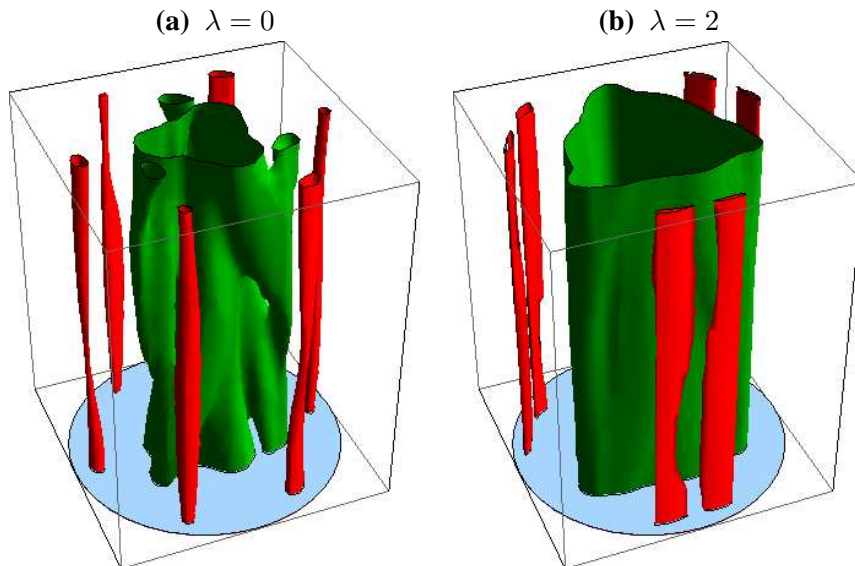


FIG. 4 – Visualisation sur une période axiale des niveaux  $u_z = -0,28$  (vert) et  $u_z = +0,05$  (rouge) des ondes critiques  $m_0 = 3, q = 2,44$  pour **(a)**  $\lambda = 0$ , **(b)**  $\lambda = 2$ .

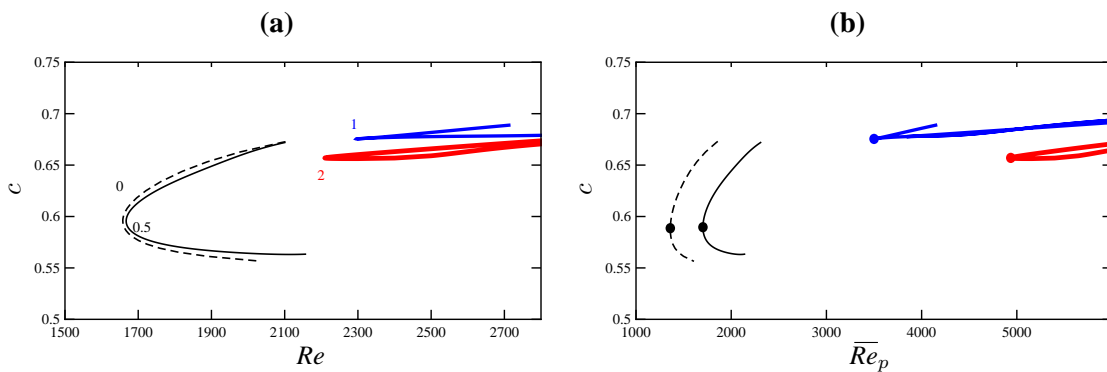
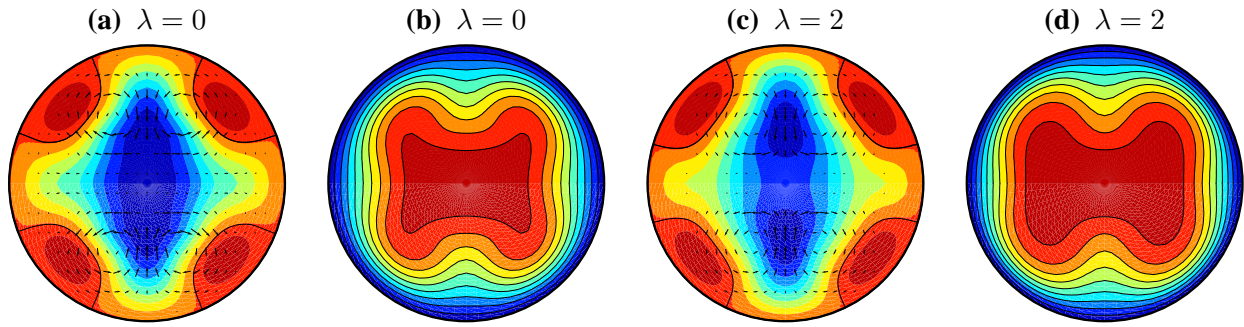


FIG. 5 – Comme Fig. 2, mais pour  $m_0 = 2, q = 1,55$ .

FIG. 6 – Comme Fig. 3 mais pour  $m_0 = 2$ ,  $q = 1,55$ .

	$m_0 = 3$ $q = 2,44$			$m_0 = 2$ $q = 1,55$		
$\lambda$	$\overline{Re}_p$	$Re$	$\overline{W}$	$\overline{Re}_p$	$Re$	$\overline{W}$
0	$1251 \pm 1$	$1629 \pm 3$	0,384	$1359 \pm 2$	$1664 \pm 2$	0,408
0,5	$1481 \pm 1$	$1567 \pm 1$	0,387	$1703 \pm 1$	$1672 \pm 2$	0,417
1	$2028 \pm 3$	$1638 \pm 3$	0,378	$3500 \pm 2$	$2295 \pm 1$	0,450
2	$3769 \pm 9$	$2016 \pm 5$	0,395	$4936 \pm 4$	$2210 \pm 2$	0,472

TAB. 2 – Positions des bifurcations nœud-col repérées par les disques des Fig. 2b et 5b. On donne aussi les valeurs de la vitesse débitante de ces ondes critiques.

## 5 Remarques de conclusion

Le Tab. 2 montre les valeurs critiques du Reynolds paroi  $\overline{Re}_p$  obtenues en fonction de  $\lambda$ , et la valeur correspondante du Reynolds gradient de pression  $Re$ . On observe une augmentation modérée mais significative des  $Re$  en fonction de  $\lambda$ , de l'ordre de 24% pour  $m_0 = 3$ , 33% pour  $m_0 = 2$ , entre  $\lambda = 0$  et 2. Il existe donc un effet intrinsèque stabilisant de la rhéofluidification. Lorsque le Reynolds basé sur la viscosité pariétale est utilisé, cet effet devient encore plus fort, du fait que la viscosité moyenne dans le tuyau devient « grande » par rapport à cette viscosité pariétale. Nous pensons que ce retard à l'apparition des ondes est lié au retard à l'apparition des bouffées turbulentes observé dans diverses expériences, par exemple [15]. Il importe cependant pour confirmer l'effet stabilisant de faire une étude de l'influence du nombre d'onde axial. Cette étude est en cours. Ses premiers résultats montrent que l'effet stabilisant fort subsisterait même lorsque le nombre d'onde axial est ajusté.

## Références

- [1] Faisst H. and Eckhardt B. Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 91, 224502, 1–4, 2003.
- [2] Hof B., van Doorne C. W. H., Westerweel J., Nieuwstadt F. T. M., Faisst H., Eckhardt B., Wedin H., Kerswell R. R., and Waleffe F. Experimental observation of nonlinear traveling waves in turbulent pipe flow. *Science*, 305, 1594–1598, 2004.
- [3] Wedin H. and Kerswell R. R. Exact coherent structures in pipe flow : travelling wave solutions. *J. Fluid Mech.*, 508, 333–371, 2004.
- [4] Duguet Y., Willis A. P., and Kerswell R. R. Transition in pipe flow : the saddle structure on the boundary of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 613, 255–274, 2008.
- [5] Waleffe F. Three-dimensional coherent states in plane shear-flows. *Phys. Rev. Lett.*, 81, 4140–4143, 1998.
- [6] Stone P. A., Waleffe F., and Graham M. D. Toward a structural understanding of turbulent drag reduction : nonlinear coherent states in viscoelastic shear flows. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 208301, 1–4, 2002.
- [7] Stone P. A., Roy A., Larson R., Waleffe F., and Graham M. D. Polymer drag reduction in exact coherent structures of plane shear flow. *Phys. Fluids*, 16, 3470–3482, 2004.
- [8] Li W., Xi L., and Graham M. D. Nonlinear travelling waves as a framework for understanding turbulent drag reduction. *J. Fluid Mech.*, 565, 353–362, 2006.
- [9] Roland N., Plaut E., and Nouar C. Modélisation de la transition vers la turbulence dans des écoulements en conduite de fluide rhéofluidifiant : approche par calcul d'ondes non linéaires. 19<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique - Com., 870, 2009.
- [10] Esmael A. and Nouar C. Transitional flow of a yield-stress fluid in a pipe : Evidence of a robust coherent structure. *Phys. Rev. E*, 77, 057302, 1–4, 2008.
- [11] Roland N., Plaut E., and Nouar C. Petrov-Galerkin computation of nonlinear waves in pipe flow of shear-thinning fluids : first theoretical evidences for a delayed transition. *Computers & Fluids*, 39, 1733–1743, 2010.
- [12] Bird B., Armstrong R., and Hassager O. Dynamics of polymeric liquids. Wiley-Interscience, 1987.
- [13] Meseguer A. and Mellibosky F. On a solenoidal Fourier-Chebyshev spectral method for stability analysis of the Hagen-Poiseuille flow. *App. Num. Math.*, 57, 920–938, 2007.
- [14] Pringle C. C. T. and Kerswell R. R. Asymmetric, helical, and mirror-symmetric traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 99, 074502, 1–4, 2007.
- [15] Escudier M. P., Presti F., and Smith S. Drag reduction in the turbulent pipe flow of polymers. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 81, 197–213, 1999.