



**HAL**  
open science

## Stabilité globale 3D d'un écoulement sténosé

Jean-Christophe Loiseau, Jean-Christophe Robinet, Emmanuel Leriche

► **To cite this version:**

Jean-Christophe Loiseau, Jean-Christophe Robinet, Emmanuel Leriche. Stabilité globale 3D d'un écoulement sténosé. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. <hal-03422658>

**HAL Id: hal-03422658**

**<https://hal.science/hal-03422658v1>**

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Stabilité globale 3D d'un écoulement sténosé

J.-Ch. Loiseau<sup>a,b</sup>, J.-Ch. Robinet<sup>a</sup>, E. Leriche<sup>b</sup>

a. Laboratoire DynFluid, Arts et Métiers ParisTech, 151 Boulevard de l'Hôpital, 75013 PARIS

b. LMFA@UJM St-Etienne, CNRS UMR 5509, Université de St-Etienne, 23 rue du Docteur Paul Micelon, F-42034 Saint-Etienne Cedex 2

## Résumé :

*La stabilité globale d'un écoulement sténosé est étudié à l'aide d'un code de simulation numérique et d'une méthode d'extraction de modes. L'approche utilisée peut traiter des cas aussi bien 2D que 3D. L'écoulement considéré est celui d'un fluide au travers d'une sténose axisymétrique étudié par Blackburn et Sherwin [10]. Un très bon accord tant sur le Reynolds critique que sur les caractéristiques du mode instable est trouvé.*

## Abstract :

*The global stability of a stenotic flow is investigated using a DNS code and a modes extraction tool. The approach can be applied to both 2D and 3D flows with no loss of generality. The case considered is an axisymmetric stenotic flow studied by Blackburn and Sherwin [10]. Excellent agreements on the critical Reynolds number and the unstable mode's characteristics is found.*

**Mots clefs :** écoulement sténosé ; stabilité globale ; time-stepping

## 1 Introduction

L'athérosclérose est une maladie cardiovasculaire très répandue. Elle se caractérise par la croissance de blocages artériels (sténoses) pouvant être reliés à certaines caractéristiques de l'écoulement sanguin qui en découle. Ce constat a poussé de nombreux chercheurs à tenter de comprendre la dynamique de l'écoulement au sein d'un modèle simple d'artère sténosée aussi bien expérimentalement qu'à l'aide de simulations numériques (DNS). Les travaux expérimentaux de Cassanova et Giddens [5], et par la suite Ahmed et Giddens [1], sur un tuyau présentant une sténose réduisant localement l'aire de la section (sévérité) de 75% ont mis en avant l'apparition d'instationnarités pour un nombre de Reynolds  $Re = 500$  et de transitions locales vers la turbulence pour  $Re = 1000$  et  $2000$ .

Récemment ces constations expérimentales ont trouvé un écho numérique notamment au travers des analyses de stabilité globale faites par Sherwin et Blackburn [4, 10], mais aussi dans le cadre de celles de Griffith *et al.* [8] sur une sténose légèrement différente. Ces premiers travaux, datant de 2005, ont mis en avant le fait qu'une bifurcation a

lieu pour un nombre de Reynolds critique  $Re_c = 722$  avec l'apparition d'un mode global instable provoquant une brisure de l'axisymétrie par déflexion du jet de son axe. Les différentes simulations numériques confirment l'existence de ce mode instable et donne un scénario plausible de transition vers la turbulence. Néanmoins cette DNS a également mis en exergue l'existence d'un phénomène d'hystérésis et donc de sous-criticité de la bifurcation laissant sous-entendre que les instabilités convectives et la croissance transitoire qui y est attachée peuvent également jouer un rôle prépondérant dans cette transition. La possibilité de ce second scénario de transition a été confirmée quelques années plus tard (voir [4,9]) puisqu'une importante croissance transitoire a été observée pour des nombres de Reynolds sous-critiques.

Dans ce contexte, le but de la présente étude est la validation d'un ensemble d'outils permettant de calculer la stabilité globale d'un écoulement. Ces outils, à savoir un code Navier-Stokes linéarisé couplé à une méthode d'extraction de modes,

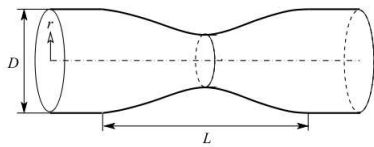


FIGURE 1.1 – Géométrie étudiée.

ne présupposent rien concernant les caractéristiques spatiales du champ de base ou de la perturbation et peuvent donc à priori être utilisés dans un cas pleinement 3D. Seule une configuration de sténose axisymétrique a pour le moment été testée mais en terme de méthode et de coût de calcul, l'approche reste parfaitement générale. La géométrie étudiée est présentée sur la figure 1 où  $D$  est la diamètre du tuyau. La longueur  $L$  de la sténose est égale à  $2D$  tandis que sa forme est donnée par :

$$r(z) = 0.5D_{min} + 0.5(D - D_{min})\sin^2(\pi z/L) \quad \forall \|z/L\| < 0.5$$

où  $D_{min}$  est le diamètre au niveau du col de la sténose. On peut alors définir le degré de sténose  $b = 1 - (D/D_{min})^2$  qui est imposé à 0.75 dans la présente étude. Le domaine de calcul s'étend est de  $-5D$  à  $45D$ .

## 2 Méthodes numériques

### 2.1 Champ de base.

Le champ de base  $\mathbf{Q} = (\mathbf{U}, P)^T$  est une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes :

$$\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.1)$$

avec  $Re = \bar{U}D/\nu$ , où  $\bar{U}$  est la vitesse moyenne du profil de Hagen-Poiseuille imposé en entrée et  $\nu$  la viscosité cinématique. Le champ de base est obtenu en ne simulant qu'un quart de la sténose et en utilisant des conditions de symétrie appropriées à l'aide d'un code instationnaire. Cette approche n'est possible que lorsque le mode  $k = 0$  est stable ( $k$  étant le nombre d'onde azimutal). Dans la suite de cet article le nombre de Reynolds est imposé à 750. Le code de calcul Nek 5000 [7] a été utilisé aussi bien pour l'obtention du champ de base que pour l'extraction des clichés de la perturbation utilisés par la suite. La discrétisation spatiale se fait à l'aide de 500 éléments spectraux et de polynômes de

Legendre de degré  $N = N_x = N_y = N_z = 8$ . L'avancement temporel est quant à lui obtenu grâce un schéma semi-implicite : les termes visqueux sont discrétisés à l'aide d'un Euler retardé d'ordre 3 (BDF3) tandis que le terme convectif est obtenu par une extrapolation elle aussi d'ordre 3 (EXT3). La figure 2.1 représente les isocontours de la vitesse  $u_z$  du champ de base pour  $Re = 750$ . Ce dernier consiste en un jet axisymétrique émanant de la constriction sténosée et d'une bulle de recirculation annulaire. La longueur de recirculation est  $L_R = 16.2$ , ce qui est en excellent accord avec [10] et s'avère être indépendante du maillage considéré.

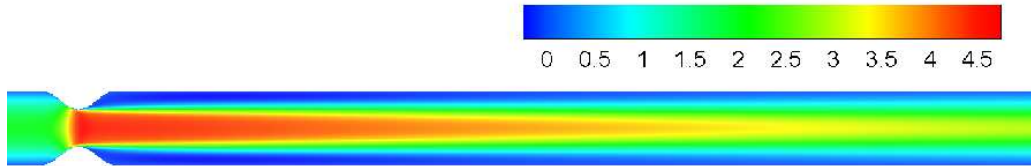


FIGURE 2.1 – Isocontours de  $u_z$  pour  $Re = 750$ .

Il est important de noter que ce champ de base est le même que celui que l'on obtient à partir des équations de Navier-Stokes axisymétriques<sup>1</sup>. Afin de montrer la généralité des outils présentés, ce champ de base est par la suite considéré comme pleinement 3D.

## 2.2 Perturbation.

Les équations gouvernant l'évolution d'une perturbation infinitésimale  $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, p)^T$  sont obtenues par linéarisation des équations de Navier-Stokes (2.1) autour du champ de base  $\mathbf{Q}$ . Il est important de noter qu'en considérant les équations perturbatives sous la forme qui suit, aucune hypothèse n'est faite quant à la structure spatiale des perturbations :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

Contrairement au calcul du champ de base, on considère ici le tuyau sténosé dans son ensemble. La perturbation  $\mathbf{q}$  est alors sujette aux conditions aux limites usuelles au niveau des parois et de la sortie. En entrée, en revanche les conditions aux limites suivantes sont imposées :  $(u_x = u_y = u_z = 0, \partial_n p = 0)$ . La discrétisation spatiale se fait à l'aide de 2000 éléments et de polynômes de degré  $N$  allant de 4 à 8 dans les trois directions, soit un total de points allant de 128000 à plus d'un million. La discrétisation temporelle est faite par un schéma BDF2/EXT2, le schéma BDF3/EXT3 s'avérant instable numériquement dans ce mode de fonctionnement du code.

1. La bifurcation ayant lieu à  $Re_c = 721$  étant stationnaire, le champ de base à  $Re = 750$  donné par un filtrage temporel aurait alors été celui permettant d'étudier la seconde bifurcation.

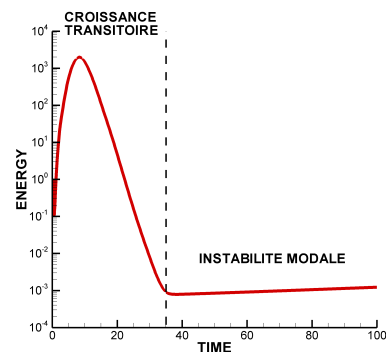


FIGURE 2.2 –  $E(t)$

La figure 2.2 ci-contre présente l'évolution d'une perturbation consistant en un bruit blanc impulsionnel réparti sur tout le domaine de calcul. Deux régimes très différents peuvent y être observés : tout d'abord une phase de croissance transitoire, et en second lieu l'émergence d'un mode instable. Ces deux phénomènes sont pilotés par des mécanismes très différents faisant indépendamment le sujet de nombreuses recherches. Concernant la croissance transitoire il est important de noter que, la perturbation initiale n'étant pas celle optimale, le gain maximal obtenu ici est inférieur à celui pouvant être trouvé notamment dans [4, 9]. Dans la suite, on ne s'intéresse qu'à l'instabilité modale.

### 3 Time-stepping et modes globaux

Le système (2.2) peut être réécrit sous la forme :

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice jacobienne des équations de Navier-Stokes linéarisées (2.2). Cette matrice étant de bien trop grande dimension pour être explicitement formée, toute approche classique est à exclure. Une méthode d'extraction de modes basée sur un algorithme d'Arnoldi couplé à une base de clichés est alors utilisée. Seules les grandes lignes d'une telle méthode sont présentées ici, pour de plus amples détails le lecteur peut se référer à Edwards *et al.* [6] ou Bagheri *et al.* [3]. L'algorithme d'Arnoldi employé dans cette étude est décrit dans Alizard *et al.* [2].

**Obtention de la base de clichés :** La solution du système (3.1) peut être écrite comme  $\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}_0$ . Un sous-espace de Krylov  $\mathcal{K}_m$  de dimension  $m$  peut alors être défini tel que :

$$\mathcal{K}_m = \text{span}\{\mathbf{q}_0, e^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{q}_0, e^{2\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{q}_0, \dots, e^{(m-1)\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{q}_0\}$$

où les vecteurs formant cette base sont des clichés issus d'un code DNS linéarisé. La période d'échantillonnage  $\Delta t$  doit être choisie de façon à respecter le critère de Nyquist<sup>2</sup> tout en garantissant une séparation temporelle suffisante des vecteurs de Krylov afin d'assurer la convergence de cette méthode.

**Algorithme d'Arnoldi :** Une base orthonormale  $\mathbf{V}$  est obtenue à partir de  $\mathcal{K}_m$  via une méthode de Gram-Schmidt modifiée. L'opérateur  $e^{\mathbf{A}\Delta t}$  peut alors être projeté sur cette base orthonormale tel que :

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} \simeq \mathbf{V}\mathbf{H}\mathbf{V}^*$$

où  $\mathbf{H}$  est une matrice de Hessenberg de dimension  $m \times m$ . Le système aux valeurs propres à résoudre s'écrit alors  $\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}$  avec  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  et  $\mathbf{X}$  respectivement les matrices des valeurs et vecteurs propres de Ritz. Les valeurs propres  $s = \sigma + i\omega$  et vecteurs propres  $\mathbf{v}$  de  $\mathbf{A}$  peuvent être retrouvés en faisant les transformations suivantes :

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}\mathbf{X}, \quad \sigma = \frac{\ln(\|\lambda_j\|)}{\Delta t}, \quad \omega = \frac{\arg(\lambda_j)}{\Delta t}$$

---

2. Le critère de Nyquist impose d'avoir un minimum de deux clichés par période que l'on veut converger. Dans la pratique de 4 à 6 clichés s'avèrent être beaucoup plus favorables pour une convergence rapide.

Le nombre de valeurs propres  $s$  convergées dépend grandement de la taille du sous-espace  $\mathcal{K}_m$  considéré et ne peut être déterminé qu'à posteriori. Dans la pratique, l'obtention des clichés est faite à l'aide du code Nek 5000 tandis que la recherche des valeurs propres de  $\mathbf{H}$  est faite à l'aide la librairie LAPACK.

## 4 Résultats

À  $Re = 750$  l'analyse de stabilité met en évidence l'émergence d'un mode global non-oscillant ayant un taux de croissance  $\sigma = 0.0038$ . Le tableau 4.1 montre la convergence de cette valeur propre en fonction du degré des polynômes de Legendre et du nombre de clichés utilisés. Une seconde analyse de stabilité montre qu'à  $Re = 700$  l'écoulement est stable et permet alors de définir par interpolation un nombre de Reynolds critique  $Re_c = 721$ . Ce nombre de Reynolds critique est en parfait accord avec la valeur de 722 trouvée par Sherwin et Blackburn [10].

Nbre clichés	degré pol.		
	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$
250	0.0038489	0.0038451	0.0038453
300	0.0038467	0.0038465	0.0038468
400	0.0038482	0.0038481	0.0038481

TABLE 4.1 – Taux de croissance du mode le plus instable en fonction du nombre de clichés et du degré des polynômes utilisés.

La figure 4.1 présente diverses caractéristiques spatiales du mode global instable à  $Re = 750$ . Le mode émerge au niveau du col de la sténose et possède une structure spatiale particulièrement allongée dans le sens de l'écoulement. En azimut, la figure 4(a) montre que, bien qu'aucun présupposé sur la forme de la perturbation n'ait été fait, le mode possède une structure de type  $k = 1$ . Cette structure du mode est en parfait accord avec [8, 10].

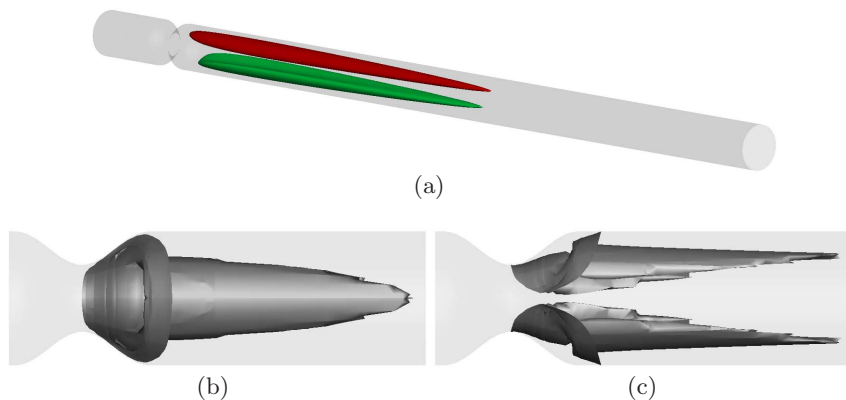


FIGURE 4.1 – (a) Isocontours de la composante  $u_z = \pm 2.10^{-7}$  du mode global instable à  $Re = 750$ . (b) et (c) Isocontours de la composante  $\omega_z = \pm 3.10^{-3}$  de la vorticité.

## 5 Conclusion

La dynamique d'un écoulement au travers d'un tube présentant une sténose axisymétrique de degré  $b = 0.75$  a été étudiée à l'aide d'une méthode d'extraction de modes communément appelée *time-stepping* qui dans le cas présent ne présuppose rien sur les symétries éventuelles du champ de base ou des perturbations. Le champ de base et les perturbations sont alors considérés comme pleinement 3D. Cet écoulement s'avère être instable au delà du Reynolds critique  $Re_c = 721$ . Les caractéristiques spatiales du mode global instable et son taux de croissance à  $Re = 750$  ainsi que le Reynolds critique donné précédemment s'avèrent être en parfait accord avec des résultats obtenus précédemment entre autres par Sherwin et Blackburn en utilisant les équations de Navier-Stokes sous leur forme cylindrique. Ceci nous conforte dans l'idée d'utiliser ces outils en l'état pour étudier la dynamique de sténoses non-axisymétriques, pour lesquelles le champ de base est nécessairement 3D, s'approchant ainsi encore un peu plus des écoulements particulièrement complexes pouvant avoir lieu au sein d'artères athérosclérosées.

## Remerciements

Ce travail a reçu le soutien de l'Agence Nationale pour la Recherche via le projet ANR-09-SYSCOMM-011-SICOGIF.

## Références

- [1] Ahmed S.A. and Giddens D.P. 1983. Flow disturbance measurements through a constricted tube at moderate Reynolds numbers. *J. Biomech.* **16** 955-963
- [2] Alizard F., Robinet J.-Ch. and Gloerfelt X. 2011. A domain decomposition matrix-free method for global linear stability. *Computers and Fluids*. **submitted**
- [3] Bagheri S., Akervik E., Brandt L. and Henningson D.S. 2009. Matrix-free methods for the stability and control of boundary layers. *AIAA Journal* **47** n°5
- [4] Blackburn H.M., Sherwin S.J. and Barkley D. 2008. Convective instability and transient growth in steady and pulsatile stenotic flows. *J. Fluid Mech.* **607** 267-277
- [5] Cassanova R.A. and Giddens D.P. 1978. Disorder distal to modified stenoses in steady and pulsatile flow. *J. Biomech.* **17** 695-705
- [6] Edwards W.S., Tuckerman L.S., Friesner R.A. and Sorensen D.C. 1994. Krylov methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **110** 82-102
- [7] Fischer P.F., Lottes J.W. and Kerkemeier S.G. 2011. Spectral h/p elements code Nek 5000. <http://nek5000.mcs.anl.gov/>
- [8] Griffith M.D., Leweke T., Thompson M.C. and Hourigan K. 2008. Steady inlet flow in stenotic geometries : convective and absolute instabilities. *J. Fluid Mech.* **616** 111-133
- [9] Griffith M.D., Thompson M.C., Leweke T. and Hourigan K. 2010. Convective instabilities in steady stenotic flows : transient growth and experimental observation. *J. Fluid. Mech.* **655** 504-514
- [10] Sherwin S.J., Blackburn H.M. 2005. Three-dimensional instabilities and transition in steady and pulsatile axisymmetric stenotic flows. *J. Fluid Mech.* **533** 297-327