



HAL
open science

Un modèle d'endommagement basé sur les tenseurs propres de Kelvin et le principe de Curie

Marc François

► **To cite this version:**

Marc François. Un modèle d'endommagement basé sur les tenseurs propres de Kelvin et le principe de Curie. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03422575

HAL Id: hal-03422575

<https://hal.science/hal-03422575>

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle d'endommagement basé sur les tenseurs propres de Kelvin et le principe de Curie

M. L. M. François^a

a. Laboratoire FAST, Univ. Paris-Sud 11, Bâtiment 502, Campus Universitaire d'Orsay

Résumé :

Outre la thermodynamique des processus irréversibles, le modèle d'endommagement proposé utilise la décomposition de Kelvin et vérifie le principe de symétrie de Curie. Ceci permet de décrire l'évolution du groupe de symétrie du tenseur d'élasticité effectif et autorise la description de l'endommagement à la fois par des scalaires, des tenseurs du second et du quatrième ordre dont le sens mécanique est clair.

Abstract :

Beyond the thermodynamics of irreversible processes framework, the presented model uses the Kelvin decomposition and verifies the Curie principle of symmetries. This allows the description of the effective stiffness tensor symmetry group and the damage description by both scalars, second and fourth order tensors of strong mechanical significance.

Mots clefs : endommagement ; anisotropie

1 Introduction

La mécanique de l'endommagement possède dès son introduction deux sens physiques *a priori* distincts : la perte de rigidité [8] et l'apparition de vides ou micro-défauts [9]. Si le lien est aisé en unidimensionnel il n'en est pas de même en trois dimensions. On peut distinguer deux classes de modèles dont chacune a pour origine une de ces approches.

Les modèles micro-mécaniques sont les plus nombreux [1, 11, 5]. Ils consistent en une homogénéisation du comportement d'une cellule élémentaire dans laquelle on introduit les mécanismes physiques considérés (mécaniques, physico-chimiques, hydriques...). Toutefois la méthode d'homogénéisation n'est pas unique et le comportement homogénéisé, en particulier le groupe de symétrie obtenu, dépend de celui-ci.

L'autre classe de modèles est purement macroscopique et prend en compte des considérations issues de l'analyse tensorielle. Le travail de [10] se base sur la décomposition du tenseur d'élasticité de Boehler [2] en parties de groupe de symétrie différents. Cette approche utilise aussi des considérations micromécaniques.

La décomposition de Kelvin, dans sa forme moderne [12], est encore peu utilisée. Pourtant elle permet d'associer au tenseur d'élasticité six invariant, les modules de Kelvin (en GPa), et de quinze termes sans unités qui définissent la base orthogonale de tenseurs propres (au lieu des vingt et une composantes qui dépendent du repère). D'une manière synthétique la décomposition de Kelvin est une diagonalisation du tenseur d'élasticité : on obtient alors six contraintes propres qui sont linéairement proportionnelles (*via* les modules de Kelvin) à six déformations propres. Pour mémoire, en élasticité isotrope existe un mode propre hydrostatique de dimension un, de tenseur propre \mathbb{I} et de module $3K$ (le module de compressibilité hydrostatique) et un mode déviatorique de dimension cinq pour lequel tous les déviateurs sont tenseurs propres et le module associé est 2μ (le module de cisaillement). Dans le cadre de la mécanique de l'endommagement, la perte de rigidité est associée à la décroissance des modules de Kelvin et l'anisotropie aux rotations des tenseurs propres concernés.

Le principe de Curie [13] stipule que le groupe de symétrie des causes est contenu dans celui des effets. En d'autres termes les causes sont au moins aussi symétrique que les effets. Il est en général respecté dans les modèles existant toutefois, dans un cadre très général comme celui qui est présenté ici, il convenait de le vérifier.

L'ensemble du modèle est écrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles [7] dans sa forme la plus pure, sans mélange des forces et des flux.

2 Le modèle d'endommagement anisotrope

L'élasticité initiale est décrite par la décomposition de Kelvin :

$$\mathbb{C}^0 = \sum_{i=1}^I \lambda^i \sum_{n=1}^{N^i} \mathbf{E}^{in} \otimes \mathbf{E}^{in}, \quad (1)$$

dans laquelle les \mathbf{E}^{in} sont les tenseurs propres (de choix non unique pour les espaces de dimension > 1), I la dimension du sous espace propre et λ^i le module de Kelvin (valeur propre) associé. On nomme $\mathcal{T}^i \in \mathcal{T}$ l'espace propre associé à \mathbb{P}^i , de base $\{\mathbf{E}^{i1}, \dots, \mathbf{E}^{iN^i}\}$.

L'endommagement est décrit par les tenseurs du quatrième ordre \mathbb{D}^i , qui possèdent une structure de tenseur d'élasticité (symétries indicielles) et qui sont des projecteurs dans un sous-espace de \mathcal{T}^i . Ceci constitue l'hypothèse forte du présent modèle. La relation contrainte-déformation, de laquelle on déduit aisément le potentiel d'état $\rho\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbb{D}^i)$ et le tenseur d'élasticité effectif \mathbb{C} est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^I \lambda^i (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2)$$

Conformément aux matériaux standards généralisés [7], la force thermodynamique associée à \mathbb{D}^i est \mathbb{Y}^i :

$$2\mathbb{Y}^i = \lambda^i \boldsymbol{\varepsilon}^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (3)$$

dans laquelle $\boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbb{P}^i : \boldsymbol{\varepsilon}$ est la partie propre du tenseur des déformations (pour l'état initial). Pour ce modèle introductif, une surface seuil élémentaire a été retenue : elle borne la valeur de l'énergie libre par mode :

$$f^i(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbb{D}^i) = \frac{\lambda^i}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : \boldsymbol{\varepsilon} - W^i. \quad (4)$$

Il s'agit donc d'un critère par mode propre initial (deux surfaces dans le cas de l'isotropie initiale). L'endommagement relatif au mode i a lieu tandis que $f^i = 0$. Le formalisme des matériaux standard généralisés requiert que l'on réécrive ce critère en fonction de la force thermodynamique \mathbb{Y} :

$$f^i(\mathbb{Y}^i, \mathbb{D}^i) = \|\mathbb{Y}^i\| - \mathbb{Y}^i :: \mathbb{D}^i - W^i. \quad (5)$$

L'équation d'évolution s'écrit comme :

$$d\mathbb{D}^i = \frac{\partial f^i}{\partial \mathbb{Y}^i} d\lambda, \quad (6)$$

où $d\lambda$ est un multiplicateur de Lagrange positif. Depuis (3), on obtient :

$$d\mathbb{D}^i = (\mathbf{K}^i \otimes \mathbf{K}^i - \mathbb{D}^i) d\lambda, \quad (7)$$

où \mathbf{K}^i est le tenseur propre normé $\boldsymbol{\sigma}^i / \|\boldsymbol{\sigma}^i\|$ ou de manière équivalente $\boldsymbol{\varepsilon}^i / \|\boldsymbol{\varepsilon}^i\|$. La valeur de $d\lambda$ est donné par l'équation de consistance $df^i = 0$ et on obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : d\mathbb{D}^i : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8)$$

$$d'où d\lambda = 2 \frac{\boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : d\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (9)$$

Pour calculer la dissipation thermique modale $d\mathcal{D}^i = \mathbb{Y}^i :: d\mathbb{D}^i$ nous opérons les transformations suivantes :

$$\text{depuis (5)} \quad \frac{\partial f^i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda^i \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

$$\text{depuis (9)} \quad = \frac{d\lambda}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

$$\text{depuis (8)} \quad = \frac{\lambda^i}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : d\mathbb{D}^i : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

$$\text{depuis (3)} \quad = \mathbb{Y}^i :: d\mathbb{D}^i \quad (13)$$

qui montrent que tous les $d\mathcal{D}^i$ sont positifs car la positivité du premier membre de (10) est la condition d'écoulement. De plus, le second membre de (11) indique que cette positivité est associée au fait que chaque partie $\lambda^i(\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i)$ du tenseur d'élasticité est définie positive.

Le modèle présenté s'intègre simplement pour une évolution pilotée en déformation; après un test d'évolution anélastique, le calcul de $d\lambda$ se fait par (9) puis l'évolution de \mathbb{D}^i est donnée par (7), permettant le calcul de l'état au pas suivant.

L'exemple suivant est réalisé pour un matériau initialement isotrope, de constantes de Kelvin ($K = 1; \mu = 3/8$), correspondant à ($E = 1; \nu = 1/3$), et d'énergies critiques ($W^H = 1/4; W^D = 1/6$). Le test consiste en une traction $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{B}^1$ avec ε variant de 0 à 1 à 0 suivie d'un cisaillement $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{B}^4$ avec ε variant de même et :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^1 &= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1, \\ \mathbf{B}^4 &= (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (14)$$

Les résultats sont présentés dans cette même base de tenseurs dans ses composantes $\hat{A}_i = \mathbf{A} : \mathbf{B}^i$: Les figures de pôles [4] (avec \vec{e}_1 horizontal et \vec{e}_2 vertical) présentent l'évolution du groupe de symétrie

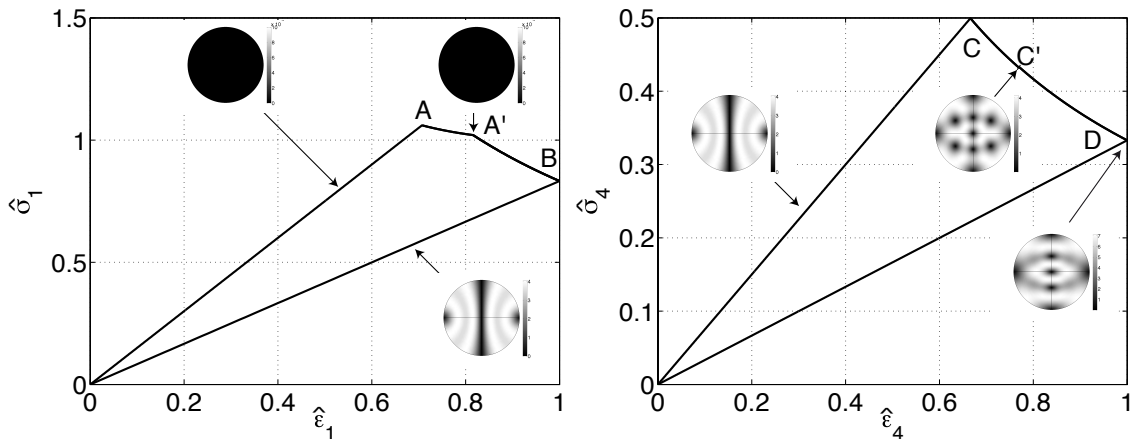


FIGURE 1 – Tension (à gauche) et cisaillement (à droite) et figures de pôle des symétries planes des tenseurs d'élasticité effectifs

du tenseur d'élasticité effectif : le premier endommagement actif étant relatif au mode hydrostatique, le matériau reste isotrope jusqu'au point A'. Ensuite l'endommagement déviatorique devient actif et le matériau devient isotrope transverse, ce qui correspond au groupe de symétrie de la traction. Le cisaillement suivant génère un endommagement déviatorique différent du précédent et le groupe de symétrie devient tétragonal, en passant (au point C') par un stade orthotrope fugitif. Les surfaces seuil sont données à la figure 2 suivante : elles apparaissent (toujours) elliptiques dans la base de tenseur (en vraie grandeur). Le tenseur de base $\mathbf{E}^{D1} = [2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 0, 0, 0]$ est le déviateur normé de \mathbf{B}^1 .

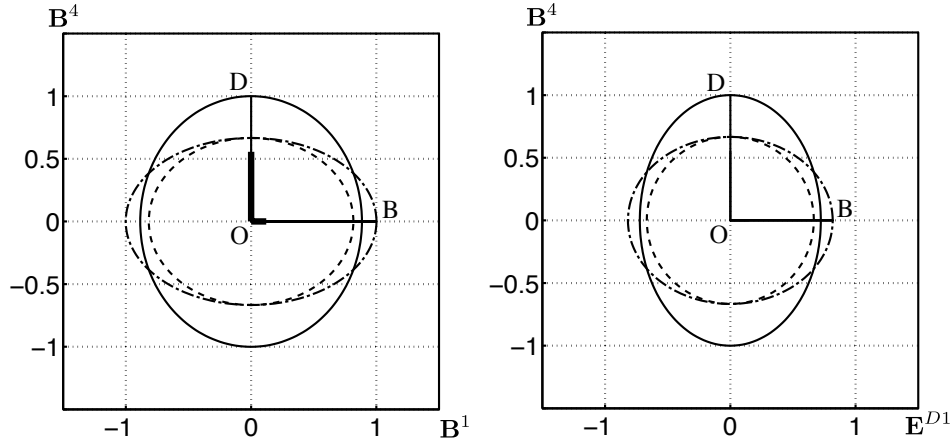


FIGURE 2 – Trajet de chargement et surfaces seuil à l'état initial (pointillés), en B (mixte) et en D (continu).

3 Analyse de Kelvin du modèle

Le tenseur \mathbb{D}^i possède une structure de tenseur d'élasticité. Sa décomposition de Kelvin est :

$$\mathbb{D}^i = \sum_{p=1}^{P^i} d^{ip} \mathbb{P}^{ip}, \quad (15)$$

$$\mathbb{P}^{ip} = \sum_{m=1}^{M^{ip}} \mathbf{E}^{ipm} \otimes \mathbf{E}^{ipm}, \quad (16)$$

où les d^{ip} sont ses modules de Kelvin, les \mathbb{P}^{ip} des projecteurs vers des sous-espaces \mathcal{T}^{ip} des \mathcal{T}^i correspondants (associés à \mathbb{C}^0) et les \mathbf{E}^{ipm} sont M^{ip} tenseurs de base des \mathcal{T}^{ip} . Ceci se résume en :

$$\mathcal{T}^i = \bigcup_{p=1}^{P^i} \mathcal{T}^{ip}, \quad \mathbb{P}^i = \sum_{p=1}^{P^i} \mathbb{P}^{ip}, \quad \sum_{p=1}^{P^i} M^{ip} = N^i, \quad (17)$$

où N^i est la dimension du sous-espace \mathcal{T}^i . Ceci permet de réécrire :

$$\mathbb{C} = \sum_{i=1}^I \lambda^i \sum_{p=1}^{P^i} (1 - d^{ip}) \mathbb{P}^{ip} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{ip} = \lambda^i (1 - d^{ip}) \boldsymbol{\varepsilon}^{ip}, \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{ip} = \mathbb{P}^{ip} : \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{ip} = \mathbb{P}^{ip} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (20)$$

$$\mathbf{K}^{ip} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{ip}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{ip}\|} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{ip}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{ip}\|}, \quad (21)$$

$$f^i = \frac{\lambda^i}{2} \sum_{p=1}^{P^i} (1 - d^{ip}) \boldsymbol{\varepsilon}^{ip} : \boldsymbol{\varepsilon}^{ip} - W^i. \quad (22)$$

Ces relations indiquent clairement que les (au plus six) d^{ip} représentent la perte de rigidité de manière cohérente avec l'approche de base de l'endommagement. Les projecteurs \mathbb{P}^{ip} représentent la direction d'influence de cet endommagement et les tenseurs \mathbf{E}^{ipm} en sont une base. Le calcul de ces termes requiert la diagonalisation de \mathbb{D}^i (qui n'est pas indispensable au fonctionnement du modèle, et qui ne représente qu'une matrice 6×6 symétrique). Un certain travail [6] permet de montrer que $0 \leq d^{ip} \leq 1$.

La figure 3 représente l'évolution de ces endommagements dans le cas de l'exemple précédent : Il apparaît que, dans ce modèle très simple, les endommagements non concernés par l'évolution en cours (dont les directions tensorielles sont orthogonales à celles en cours d'évolution) peuvent diminuer. Cela pourra être modifié dans les versions futures du modèle.

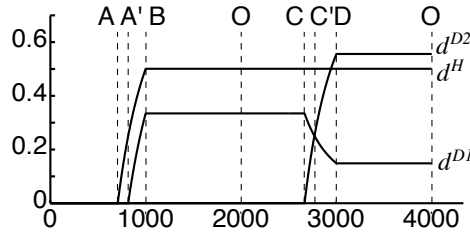


FIGURE 3 – endommagement scalaire

4 Analyse des groupes de symétrie et principe de Curie

Rychlewski [12] a montré que le groupe de symétrie du tenseur d'élasticité est l'intersection des groupes de symétrie de ses projecteurs. Ces groupes de symétrie sont parmi : isotrope, cubique, isotrope transverse, tétragonal, orthotrope, trigonal, monoclinique et triclinique [3]. Il est possible de démontrer [6] que le groupe de symétrie d'un projecteur correspond à l'ensemble des transformations orthogonales internes à \mathcal{T}^i pour le matériau vierge ou à \mathcal{T}^{ip} pour le matériau endommagé :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{C}) &= \bigcap_{i=1}^I \bigcap_{p=1}^{P^i} \mathcal{S}(\mathbb{P}^{ip}), \\ &= \bigcap_{i=1}^I \bigcap_{p=1}^{P^i} \{Q \in SO(3) / Q(\mathbf{E}^{ipm} \in \mathcal{T}^{ip}) \in \mathcal{T}^{ip}\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Afin de vérifier le principe de Curie nous identifions le groupe de symétrie des causes et celui des conséquences. Par causes on entend l'état actuel du matériau défini par \mathbb{C} (ce qui constitue une hypothèse, c.a.d. que toute l'information sur le matériau est contenue dans son tenseur d'élasticité) et la sollicitation, c'est à dire l'ensemble contrainte et déformation actuels. En général ces objets n'ont pas même groupe de symétrie mais grâce à la décomposition de Kelvin, les parties $\boldsymbol{\sigma}^{ip}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{ip}$, proportionnelles, ont même groupe de symétrie. On peut alors écrire :

$$\mathcal{S}(\text{causes}) = \mathcal{S}(\mathbb{C}) \bigcap_{i=1}^I \bigcap_{p=1}^{P^i} \mathcal{S}(\boldsymbol{\varepsilon}^{ip}). \quad (24)$$

À chaque incrément de temps les conséquences pour le matériau sont l'évolution du tenseur d'élasticité \mathbb{C} ou donc des des $d\mathbb{D}^i$. D'après (7,15) nous avons :

$$\mathcal{S}(d\mathbb{D}^i) = \bigcap_{p=1}^{P^i} \mathcal{S}(\mathbb{P}^{ip}) \bigcap \mathcal{S}(\mathbf{K}^i \otimes \mathbf{K}^i), \quad (25)$$

et, depuis (2,23) :

$$\mathcal{S}(d\mathbb{C}) = \bigcap_{i=1}^I \mathcal{S}(d\mathbb{D}^i), \quad (26)$$

$$\mathcal{S}(\text{consequences}) = \mathcal{S}(\mathbb{C} + d\mathbb{C}) = \mathcal{S}(\mathbb{C}) \bigcap_{i=1}^I \mathcal{S}(\mathbf{K}^i \otimes \mathbf{K}^i), \quad (27)$$

et quelques calculs [6] sont nécessaires pour montrer l'inclusion $\mathcal{S}(\text{conséquences}) \subset \mathcal{S}(\text{causes})$ qui correspond au principe de Curie : le groupe de symétrie des conséquences contient celui des causes (les conséquences sont au moins aussi symétriques que les causes). Dans l'exemple de la section 2 on retrouve cette inclusion. Dans le cas de l'endommagement du mode isotrope pendant AA', les groupes de symétrie de la conséquence $\mathcal{O}(3)$ contient donc le groupe de symétrie isotrope transverse de la sollicitation de traction. Dans le cas de l'endommagement anisotrope pendant A'B, le groupe de symétrie de la conséquence est isotrope transverse, comme la sollicitation de traction. Dans le cas de l'endommagement durant le cisaillement pur CD, le groupe de symétrie de la conséquence est tétraogonal ; ce groupe contient l'orthotropie de la sollicitation. On peut montrer que ce saut vient de l'expression quadratique $\mathbf{K}^i \otimes \mathbf{K}^i$ (ou $\boldsymbol{\varepsilon}^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^i$). Quand au saut fugitif au groupe de symétrie cubique, il vient simplement de l'égalité temporaire de deux dommages $d^{D1} = d^{D2}$ et ce point respecte lui aussi le principe de Curie.

5 Conclusions

Ce modèle représente une étape préliminaire vers d'autres, plus sophistiqués, écrit à la fois dans le cadre classique de la thermodynamique des processus irréversibles et celui de la décomposition de Kelvin. Une déclinaison plus micro-mécanique pourrait suivre, dans laquelle un tenseur de structure porte l'information de la microstructure (et plus seulement le tenseur d'élasticité). Elle devra inclure les effets unilatéraux bien connus pour les géomatériaux.

Références

- [1] Andrieux S. 1986 A model of micro-cracked material for concretes and rocks, *Journal de Mécanique* **5** 471-513
- [2] Boehler, J.P., Kirillov, A., Onat, E.T. 1986 On the polynomial invariants of elasticity tensors, *J. of Elast.* **34** 2 97-110
- [3] Forte, S., Vianello, M. 1996 Symmetry classes for elasticity tensors, *J. of Elast.* **43** 2 81-108
- [4] François, M. 1998 Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor ; application to acoustic measurements, *Int. J. Solids Struct.* **35** 31-32
- [5] François, M., Royer Carfagni, G. 2005 Structured deformation of damaged continua with cohesive-frictional sliding rough fractures, *Eur. J. Mech. A/Solids* **24** 644-660
- [6] François, M. A damage model based on Kelvin eigentensors and Curie principle, proposé dans *Mechanics of Materials*
- [7] Halphen, B., Nguyen Q.S. 1975 Sur les matériaux standards généralisés, *Journal de Mécanique* **14** 39-63
- [8] Kachanov, L.M. 1958 On the time to failure under creep conditions, *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk.* **8** 26-31
- [9] Lemaitre J. 1996 *A Course on Damage Mechanics*, Springer
- [10] Onat, E.T. 1984 Effective properties of elastic materials that contain penny shaped voids, *Int. J. Engng Sci.* **22** 1013-1021
- [11] Pensee, V., Kondo, D., Dormieux, L. 1986 Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials, *J. Eng. Mech. ASCE* **128** 889-897
- [12] Rychlewski, J.J. 1984 On Hooke's law *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, **48** 3 303-314
- [13] Wadhawan, V.K. 1987 The generalized Curie principle, the Hermann theorem, and the symmetry of macroscopic tensor properties of composites, *Materials research bulletin* **22** 5 651-660