



HAL
open science

Modèles d'interfaces imparfaites pour les composites viscoplastiques

Vincent Monchiet, Guy Bonnet

► **To cite this version:**

Vincent Monchiet, Guy Bonnet. Modèles d'interfaces imparfaites pour les composites viscoplastiques. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03422534

HAL Id: hal-03422534

<https://hal.science/hal-03422534>

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèles d'interfaces imparfaites pour les composites viscoplastiques

V. Monchiet^a, G. Bonnet^a

a. Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, LMSME UMR8208 CNRS, 5 boulevard Descartes, 77454 Marne la Vallée Cedex, France

Résumé :

Dans cet article nous présentons une extension du concept d'interphase et d'interface imparfaite équivalente dans le contexte de la viscoplasticité. L'interphase est décrite par une fine couche d'épaisseur constante, constituée d'un matériau rigide viscoplastique et localisée entre deux milieux environnants. Il s'avère que, en fonction du degré de rigidité ou de souplesse de la couche par rapport aux milieux environnants, on peut, par un processus d'idéalisation, remplacer cette interphase par une interface imparfaite impliquant un saut du champ de vitesse ou du vecteur contrainte. Dans le cas d'une interphase très souple, l'interface imparfaite équivalente induit un saut du champ des vitesses. Lorsque l'interphase est très rigide, l'interphase imparfaite obtenue implique une discontinuité du vecteur contrainte donnée par une loi de type Young-Laplace, généralisée ici au contexte de la viscoplasticité.

Abstract :

In the present paper we present an extension of the concept of interphase and equivalent imperfect interface in the context of viscoplasticity. The interphase takes the form of a thin curved layer of constant thickness, made up of a rigid viscoplastic material located between two other surrounding materials. It turns out that, depending of the degree of stiffness of the layer with respect to the neighboring media, this interphase can be replaced by an idealized imperfect interface involving the jump the velocity field or the traction vector. In the case of a soft interphase a non linear "spring interface" model is obtained. In the particular of a stiff interphase, it is shown that the jump condition of the traction vector across the interface is given by the well-known Young-Laplace equation generalized here to viscoplasticity.

Mots clefs : Interphase, interface imparfaite, viscoplasticité

1 Introduction

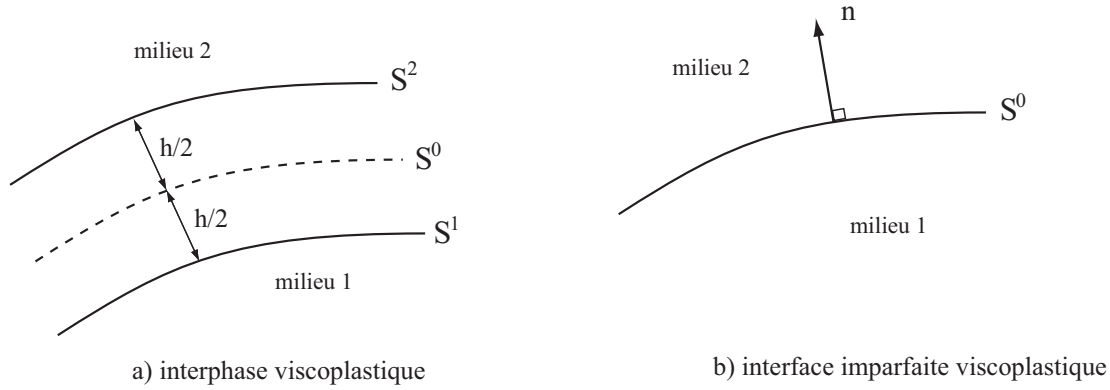
Durant cette dernière décennie, un certain nombre de travaux (notamment ceux d'Hashin [8], Chen et al. [4], Duan et al. [6]) ont porté sur la détermination des propriétés effectives des matériaux composites en présence d'interfaces imparfaites. Dans ces études, deux types d'interfaces sont généralement considérées. Le premier type assure la continuité du vecteur contrainte tandis qu'un saut du champ de déplacement est induit à la traversée de la surface. Une loi linéaire donnant le saut du champ de déplacement en fonction du vecteur contrainte est alors utilisée. L'interface dite "cohérente" implique une discontinuité du vecteur contrainte tandis que le champ de déplacement reste continu à la traversée de la surface. Le saut du vecteur contrainte est alors donné par une loi de type Young-Laplace introduite par Gurtin and Murdoch [7] pour le cas des milieux élastiques.

Une méthode rigoureuse permettant d'établir des lois de comportement d'interfaces imparfaites a été introduite par Sanchez-Palencia [14] puis Pham Huy and Sanchez-Palencia [13] dans le contexte de la conductivité thermique puis généralisée par Karlbring and Mochvan [10, 11], Bövik [3], Hashin [9] et Benveniste et al. [1, 2] pour le cas de l'élasticité. L'approche consiste à remplacer une interphase, c'est à dire une fine couche d'épaisseur constante, localisée entre deux autres matériaux, par une interface

imparfaite équivalente. Il a été montré que les modèles d'interfaces généralement utilisés dans la littérature et cités en début de notre introduction, apparaissent comme des limites de cette approche par interphase équivalente. Dans ce travail, nous proposons une extension de l'approche par interphase équivalente au contexte de la viscoplasticité.

2 Position du problème

On considère un solide tridimensionnel constitué de deux milieux distincts séparés par une troisième phase, appelée interphase et ayant la forme d'une couche mince d'épaisseur constante h . Cette interphase est délimitée par deux surfaces parallèles assurant la continuité des grandeurs physiques (vitesse, vecteur contrainte). On désigne par S_1 et S_2 ces deux surfaces et on définit par S_0 la surface moyenne, à mi-distance de S_1 et S_2 . Chaque point de cette interphase est repéré par le système de coordonnées curvilignes (x_1, x_2, x_3) . Les iso- x_3 surfaces définissent des surfaces parallèles à S_0 . En outre, S_2 correspond à $x_3 = h/2$ tandis que la surface S_1 est associée à $x_3 = -h/2$. Le comportement



de l'interphase est décrit par les équations :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \\ \mathbf{d} = \frac{1}{2} [\operatorname{grad}(\underline{v}) + \operatorname{grad}^T(\underline{v})], \quad \operatorname{tr}(\mathbf{d}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I} + \frac{2\sigma_0}{3\dot{\epsilon}_0} \left(\frac{d_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{m-1} \mathbf{d} \end{cases} \quad (1)$$

Dans les expressions données ci-dessus, \underline{v} désigne le champ de vitesse, \mathbf{d} et $\boldsymbol{\sigma}$ sont respectivement le taux des déformations et le champ des contraintes. La pression est notée $p = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$ et \mathbf{I} est l'identité du second ordre. σ_{eq} et d_{eq} sont respectivement la contrainte équivalente et le taux de la déformation équivalente au sens de von Mises. σ_0 et $\dot{\epsilon}_0$ sont des paramètres du matériau. Les exposants n et m sont liés par $n = 1/m$ et définis tel que $0 \leq m \leq 1$ et $1 \leq n \leq +\infty$.

On se propose d'établir les équations d'interfaces imparfaites en appliquant la méthode par développement en série de Taylor formalisée dans [2]. A cette fin, nous nous proposons tout d'abord d'établir quelques résultats préliminaires dans la section qui suit.

3 Résultats préliminaires

Notons par \underline{n} le vecteur normal aux iso-surfaces $x_3 = cste$ et introduisons par $\boldsymbol{\pi}$ et $\boldsymbol{\pi}^\perp$ les deux projecteurs définis par :

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{i} - \underline{n} \otimes \underline{n}, \quad \boldsymbol{\pi}^\perp = \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (2)$$

Le taux des déformations peut être décomposé sous la forme :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_s + \underline{g}_s \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{g}_s + g_n \boldsymbol{\pi}^\perp \quad (3)$$

où : $\mathbf{d}_s = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\pi}$, $\underline{g}_s = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{d} \cdot \underline{n}$, $g_n = \mathbf{d} : \boldsymbol{\pi}^\perp$

Compte tenu de l'incompressibilité du matériau $g_n = -\text{tr}(\mathbf{d}_s)$, on a :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_s - \text{tr}(\mathbf{d}_s)\boldsymbol{\pi}^\perp + \underline{g}_s \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{g}_s \quad (4)$$

Le taux de la déformation équivalente peut donc s'écrire :

$$d_{eq} = (D_s^2 + G_s^2)^{1/2} \quad (5)$$

avec :

$$D_s = \left[\frac{2}{3} \left(\mathbf{d}_s : \mathbf{d}_s + \text{tr}(\mathbf{d}_s)^2 \right) \right]^{1/2}, \quad G_s = \left[\frac{4}{3} \underline{g}_s : \underline{g}_s \right]^{1/2} \quad (6)$$

De manière similaire, on décompose le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_s + \underline{t}_s \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{t}_s + t_n \boldsymbol{\pi}^\perp \quad (7)$$

avec : $\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}$, $\underline{t}_s = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}$, $t_n = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\pi}^\perp$

Dans les expressions (4) et (7), il existe deux types de quantités, celles qui restent continues à la traversée d'une interface parfaite, ce sont \mathbf{d}_s , \underline{t}_s , t_n et les quantités qui sont discontinues : $\boldsymbol{\sigma}_s$ et \underline{g}_s . On se propose d'exprimer les quantités $\boldsymbol{\sigma}_s$ and \underline{g}_s en fonction \mathbf{d}_s , \underline{t}_s et t_n à l'aide de la loi de comportement. Partant de (1), on observe que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_s = \frac{2\sigma_0}{3\dot{\varepsilon}_0} \left(\frac{d_{eq}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{m-1} \mathbf{d}_s + p\boldsymbol{\pi} \\ \underline{t}_s = \frac{2\sigma_0}{3\dot{\varepsilon}_0} \left(\frac{d_{eq}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{m-1} \underline{g}_s \\ t_n = -\frac{2\sigma_0}{3\dot{\varepsilon}_0} \left(\frac{d_{eq}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{m-1} \text{tr}(\mathbf{d}_s) + p \end{cases} \quad (8)$$

De la seconde relation dans (8), on a :

$$\underline{t}_s \cdot \underline{t}_s = \frac{\sigma_0^2}{3\dot{\varepsilon}_0^2} \left(\frac{d_{eq}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{2m-2} G_s^2 \quad (9)$$

Introduisant la quantité :

$$T_s = \sqrt{3\underline{t}_s \cdot \underline{t}_s} \quad (10)$$

On observe que G_s est la solution d'une équation non linéaire en z :

$$(z^2 + D_s^2)^{m-1} - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0^m}{\sigma_0} \right)^2 \frac{T_s^2}{z^2} = 0 \quad (11)$$

Il n'existe pas de solution analytique de cette équation, hormis pour quelques valeurs particulières de l'exposant m (correspondant à $m = 1, 1/2, 1/3, 0$). On note, de manière formelle, par $z = \mathcal{Z}$ la solution réelle, positive de cette équation (les solutions négatives et complexes de l'équation (11) sont bien sûr écartées). Il s'en suit donc que le taux de la déformation équivalente s'écrit $d_{eq} = (D_s^2 + \mathcal{Z}^2)^{1/2}$ et, de la seconde relation dans (8), on obtient :

$$\underline{g}_s = \frac{3\dot{\varepsilon}_0}{2\sigma_0} \left(\frac{(D_s^2 + \mathcal{Z}^2)^{1/2}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{1-m} \underline{t}_s \quad (12)$$

L'élimination de la pression, p , conduit finalement à :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \frac{2\sigma_0}{3\dot{\varepsilon}_0} \left(\frac{(D_s^2 + \mathcal{Z}^2)^{1/2}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{m-1} (\mathbf{d}_s + \text{tr}(\mathbf{d}_s)\boldsymbol{\pi}) + t_n \boldsymbol{\pi} \quad (13)$$

4 L'approche par développement en série de Taylor

On se propose maintenant d'appliquer la méthode fondée sur les développements en série de Taylor décrite dans [2] pour le cas de l'élasticité. La démarche comprend trois étapes.

- En tout premier lieu on développe le champ des vitesses, \underline{v} , et le vecteur contrainte \underline{t} en $x_3 = 0$ par rapport au paramètre $h/2$ désignant la distance de S_0 à S_1 et S_2 . Ainsi pour le champ de vitesse on a :

$$\begin{aligned} \underline{v}|_{S_0} &= \underline{v}|_{S_1} + \frac{h}{2} \text{grad}_n(\underline{v})|_{S_1} + o(h^2) \\ \underline{v}|_{S_0} &= \underline{v}|_{S_2} - \frac{h}{2} \text{grad}_n(\underline{v})|_{S_2} + o(h^2) \end{aligned} \quad (14)$$

Où $\text{grad}_n(\underline{v}) = \text{grad}(\underline{v}) \cdot \underline{n}$ est le gradient de \underline{v} pris dans la direction x_3 . Les expressions données dans (14) sont tronquées au premier ordre, les termes d'ordre supérieur sont donc négligés dans cette étude.

- Par soustraction des deux équations (14), on obtient l'expression du saut du champ des vitesses à la traversée de l'interphase. :

$$\underline{v}|_{S_2} - \underline{v}|_{S_1} = \frac{h}{2} \left[\text{grad}_n(\underline{v})|_{S_1} + \text{grad}_n(\underline{v})|_{S_2} \right] + o(h^2) \quad (15)$$

De la même manière on obtient pour $[\underline{t}]$:

$$\underline{t}|_{S_2} - \underline{t}|_{S_1} = \frac{h}{2} \left[\text{grad}_n(\underline{t})|_{S_1} + \text{grad}_n(\underline{t})|_{S_2} \right] + o(h^2) \quad (16)$$

- Enfin, on exprime $\text{grad}_n(\underline{v})$ et $\text{grad}_n(\underline{t})$ dans (15) à partir de dérivées de surface. Pour cela notons que :

$$\begin{aligned} \text{grad}_n(\underline{u}) \cdot \underline{n} &= g_n = -\text{tr}(\underline{d}_s) \\ \text{grad}_n(\underline{u}) \cdot \underline{\pi} &= 2\underline{g}_s - \underline{n} \cdot \text{grad}_s(\underline{u}) \end{aligned} \quad (17)$$

Où \underline{g}_s est donné par (12). On a donc :

$$\text{grad}_n(\underline{v}) = \frac{3\dot{\epsilon}_0^m}{\sigma_0} (D_s^2 + \mathcal{Z}^2)^{(1-m)/2} \underline{t}_s - \underline{n} \cdot \text{grad}_s(\underline{v}) - \text{tr}(\underline{d}_s) \underline{n} \quad (18)$$

Utilisant maintenant l'équilibre, on a :

$$\text{grad}_n(\underline{t}) = \text{grad}(\underline{\sigma}) : \underline{\pi}^\perp = -\text{grad}(\underline{\sigma}) : \underline{\pi} \quad (19)$$

Dans l'expression ci-dessus, la décomposition (7) est utilisée et pour laquelle $\underline{\sigma}_s$ est remplacé par (13). Il s'en suit donc que :

$$\begin{aligned} \text{grad}_n(\underline{t}) &= -\text{grad} \left\{ \frac{2\sigma_0}{3\dot{\epsilon}_0^m} (D_s^2 + \mathcal{Z}^2)^{(m-1)/2} (\underline{d}_s + \text{tr}(\underline{d}_s) \underline{\pi}) \right. \\ &\quad \left. + \underline{t}_s \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{t}_s + t_n \underline{i} \right\} : \underline{\pi} \end{aligned} \quad (20)$$

Les expressions (18) et (20) s'expriment uniquement au moyen des quantités \underline{v} et \underline{t} et de leur dérivées de surface qui sont des grandeurs continues à la traversée de S_1 et S_2 . L'interphase peut donc être remplacée au profit d'une interface équivalente générant des sauts des champs mécaniques données par les relations (15), (18) et (20). Dans la section qui suit on se propose d'examiner le cas d'une interphase infiniment souple ou rigide, pour lesquels des expressions analytiques simples peuvent être obtenues.

5 Cas particuliers d'une interphase infiniment souple ou rigide

5.1 L'interphase infiniment souple

On suppose que $\dot{\varepsilon}_0$ est proportionnel à $1/h$ et on pose $\dot{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_0/h$. On suppose que les paramètres σ_0 et $\bar{\varepsilon}_0$ restent finis lorsque h tend vers zero. L'équation non linéaire (11) devient alors :

$$(z^2 + D_s^2)^{m-1} - \frac{1}{h^{2m-2}} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0^m}{\sigma_0} \right)^2 \frac{T_s^2}{z^2} = 0 \quad (21)$$

Lorsque h est petit, la solution z peut être obtenue en utilisant un développement asymptotique. La solution z est prise sous la forme : $z = z_{-1}/h + z_0 + z_1 h + \dots$. Le calcul des coefficients z_{-1}, z_0, \dots donne :

$$z_{-1} = \bar{\varepsilon}_0 \left(\frac{T_s}{\sigma_0} \right)^n, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = \frac{1}{2}(1-n) \frac{D_s^2}{\bar{\varepsilon}_0} \left(\frac{T_s}{\sigma_0} \right)^{-n}, \quad \text{etc.} \quad (22)$$

Seul le terme de plus grand ordre, c'est à dire z_{-1} , est conservé dans le développement de z . En conséquence :

$$\mathcal{Z} = \frac{\bar{\varepsilon}_0}{h} \left(\frac{T_s}{\sigma_0^s} \right)^n + o(h) \quad (23)$$

En remplaçant finalement cette dernière expression dans (18) et (20), et prenant la limite $h \rightarrow 0$ dans (15) on obtient :

$$[\underline{v}]_{S_0} = \frac{3\bar{\varepsilon}_0}{\sigma_0^s} \left(\frac{T_s}{\sigma_0^s} \right)^{n-1} \underline{t}_s, \quad [\underline{t}]_{S_0} = 0 \quad (24)$$

On observe donc que le vecteur contrainte reste continu à la traversée de l'interface imparfaite équivalente, S_0 . C'est le champ de vitesse qui subit une discontinuité à la traversée de S_0 . Le saut de \underline{v} dépend alors du vecteur contrainte via une relation en puissance mettant en jeu l'exposant n du matériau viscoplastique constituant l'interphase. Dans le cas où l'interphase est régie par un comportement linéaire, correspondant à $n = m = 1$, les résultats obtenus sont conformes avec ceux déjà établis dans [2] (on considérant un milieu incompressible). D'autre part, dans le cas où $n = +\infty$, c'est à dire celui d'un milieu rigide parfaitement plastique, le saut de \underline{v} devient nul (puisque le rapport T_s/σ_0^s est toujours inférieur à 1). L'interface est alors parfaite puisqu'elle assure la continuité à la fois de \underline{v} et de \underline{t} .

5.2 Le modèle d'interface cohérente

De manière duale, on suppose maintenant que σ_0 est proportionnel à $1/h$ et on pose $\sigma_0 = \bar{\sigma}_0/h$ (on supposera que $\bar{\sigma}_0$ et $\dot{\varepsilon}_0$ restent finis lorsque $h \rightarrow 0$). Lorsque la valeur h est petite, on peut obtenir la solution de l'équation non linéaire en choisissant z sous la forme $z = z_1 h + z_2 h^2 + \dots$. Seul le terme z_1 est conservé et \mathcal{Z} est alors donné par :

$$\mathcal{Z} = h \bar{\varepsilon}_0^m D_s^{1-m} \frac{T_s}{\sigma_0^s} + o(1) \quad (25)$$

Prenant la limite $h \rightarrow 0$ dans (15) on aboutit finalement à :

$$[\underline{v}]_{S_0} = 0, \quad [\underline{t}]_{S_0} = -\text{grad}(\boldsymbol{\tau}) : \boldsymbol{\pi} \quad (26)$$

with : $\boldsymbol{\tau} = \frac{2\sigma_0^s}{3\bar{\varepsilon}_0^s} \left(\frac{D_s}{\dot{\varepsilon}_0^s} \right)^{m-1} (\mathbf{d}_s + \text{tr}(\mathbf{d}_s)\boldsymbol{\pi})$

On observe que le modèle d'interface imparfaite obtenu implique un saut du vecteur contrainte tandis que le champ de vitesse reste continu à la traversée de S_0 . La relation donnant le saut de \underline{t} prend la forme d'une équation de type Young-Laplace dans laquelle la contrainte interfaciale $\boldsymbol{\tau}$ est liée à la déformation surfacique via une loi de viscoplasticité. Encore une fois les résultats obtenus sont tout à fait conforme avec ceux établis par Benveniste [2] dans un contexte linéaire. D'autre part, on notera que dans le cas de la plasticité parfaite ($n = +\infty$ ou encore $m = 0$) le modèle obtenu coïncide avec celui postulé dans un travail récent portant sur les milieux nanoporeux plastiques [5].

6 Conclusion

Dans ce travail nous avons proposé de nouveaux modèles d'interface imparfaite pour les composites viscoplastiques. L'approche repose sur le concept d'interphase et d'interface équivalente et utilise des développements en série de Taylor. Le cas général d'une interface générant à la fois une discontinuité du champ de vitesse et du vecteur contrainte a été obtenu. Le cas particulier d'une interphase infiniment souple ou rigide a été examiné et des expressions analytiques simples ont été obtenues. Ces travaux ont permis ainsi d'étendre les modèles d'interfaces classiquement utilisés dans le contexte de l'élasticité. L'implémentation de ce type de modèles dans une formulation par la méthode des éléments finis classique ou étendue (X-FEM) constitue une des perspectives de notre étude.

Références

- [1] **Benveniste, Y. Miloh, T.** 2001 Imperfect soft and stiff interphases in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.* **33** 309-323.
- [2] **Benveniste, Y.** 2006 A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. *J. Mech. Phys. Solids.* **54** 708-734.
- [3] **Bövik, P.** 1994 On the modelling of thin interface layers in elastic and acoustic scattering problems. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **47** 17-42.
- [4] **Chen, T. Dvorak, G.J.** 2006 Fibrous nanocomposites with interface stress : Hill's and Levin's connections for effective moduli. *Appl. Phys. Lett.* **88** 211912-1-3.
- [5] **Dormieux, L. Kondo, D.** 2010 An extension of Gurson model incorporating stresses effects. *Int. J. Eng. Science.* **48** 575-581, 2010.
- [6] **Duan, L. Wang, J. Huang, Z.P. Karihaloo, B.L.** 2005 Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress. *J. Mech. Phys. Solids.* **53** 1574-1596.
- [7] **Gurtin, M.E. Murdoch, A.I.** 1975 A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **57** 291-323.
- [8] **Hashin, Z.** 1992 Extremum principles for elastic heterogeneous media with imperfect interfaces and their application to bounding of effective moduli. *J. Mech. Phys. Solids.* **40** 767-781.
- [9] **Hashin, Z.** 2002 hin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids.* **50** 2509-2537.
- [10] **Klarbring, A.** 1991 Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method. *Int. J. Eng. Sci.* **29** (4) 493-512.
- [11] **Klarbring, A. Movchan, A.B.** 1998 Asymptotic modelling of adhesive joints. *Mech. Mater.* **28** 137-145.
- [12] **Monchiet, V. Bonnet, G.** 2010 Interfacial models in viscoplastic composites materials. *International Journal of Engineering Science.* **48**(12) 1762-1768.
- [13] **Pham Huy, H. Sanchez-Palencia, E.** 1974 Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée. *J. Math. Anal. Appl.* **47** 284-309.
- [14] **Sanchez-Palencia, E.** 1970 Comportement limite d'un problème de transmission à travers une plaque faiblement conductrice. *C. R. Acad. Sci. Paris Serie A.* **270** 1026-1028.