



**HAL**  
open science

# Homogénéisation et prise en compte des effets de bords : Application à la thermique

Abdelghani Matine, Nicolas Boyard, Patrice Cartraud, Grégory Legrain, Yvon  
Jarny

► **To cite this version:**

Abdelghani Matine, Nicolas Boyard, Patrice Cartraud, Grégory Legrain, Yvon Jarny. Homogénéisation et prise en compte des effets de bords : Application à la thermique. CFM 2011 - 20e Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03422500

**HAL Id: hal-03422500**

**<https://hal.science/hal-03422500>**

Submitted on 9 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Homogénéisation et prise en compte des effets de bords : Application à la thermique

A. MATINE<sup>a</sup>, N. BOYARD<sup>a</sup>, P. CARTRAUD<sup>b</sup>, G. LEGRAIN<sup>b</sup>, Y. JARNY<sup>a</sup>

*a. Laboratoire de Thermocinétique de NANTES, UMR 6607, CNRS-Université de Nantes, France*

*b. GeM de Nantes, UMR 6183, CNRS-Ecole centrale de Nantes, France*

## Résumé :

Ce travail concerne la modélisation multi-échelle des transferts de chaleur par conduction dans les matériaux composites à microstructure périodique. La méthode des développements asymptotiques est utilisée pour déterminer la conductivité homogénéisée d'un composite multicouches et formuler, sur la base des travaux d'H. Dumontet en élasticité, les problèmes de couche limite permettant de corriger la solution au voisinage des bords. Des exemples numériques avec la méthode des éléments finis sont présentés et les champs de température et de flux de chaleur calculés par cette approche sont comparés à ceux issus du problème hétérogène.

## Abstract :

This work deals with the multi-scale modeling of heat transfer by conduction in composites with periodic microstructure. The method of asymptotic expansions is used to determine the homogenized conductivity of a multilayer composite and to formulate, from the work of H. Dumontet in elasticity, the problems of boundary layer for correcting the solution close to the edges. Numerical examples with the finite element method are presented and the temperature field and heat flux calculated by this approach are compared with those from the heterogeneous problem.

## Introduction :

La recherche menée dans la caractérisation des propriétés thermiques de matériaux composites découle de problématiques industrielles réelles comme la prédiction du comportement thermo-mécanique de pièces structurales d'avions, anciennement à structure métallique et maintenant principalement formées de matériaux composites cent fois plus isolants thermiquement. Toute incertitude sur la connaissance de ces propriétés impacte directement la précision sur les températures maximales atteintes par la structure composite et donc le dimensionnement de celles-ci. La connaissance des propriétés thermiques de ces structures composites est donc cruciale. Il faut donc disposer de méthodes fiables et optimales du point de vue coût de mise en œuvre, pour les caractériser thermiquement. Deux approches complémentaires peuvent être employées à cet effet. La première est expérimentale et consiste à estimer les propriétés anisotropes d'échantillons à partir de mesures d'échauffements contrôlés. On peut citer par exemple la méthode flash qui consiste à soumettre une face d'un échantillon (quelques millimètres d'épaisseur) à un pulse d'énergie de courte durée (comparativement aux phénomènes observés) et d'enregistrer la réponse thermique sur sa face arrière. La seconde est numérique et peut s'appuyer, par exemple, sur la théorie de l'homogénéisation de milieux périodiques [1]. Cette dernière est intéressante du point de vue de la thermique sur deux aspects : l'estimation des propriétés thermiques effectives du composite [2] et la détermination des champs

macroscopiques de température et de flux de chaleur dans la pièce. En effet, la prise en compte de la nature hétérogène et multi-échelles des composites pour le calcul de ces champs macroscopiques va favoriser la compréhension et l'interprétation des résultats obtenus par différents dispositifs expérimentaux. Plus précisément, les effets de bords dans le domaine de la thermique sont particulièrement importants pour toutes ces méthodes expérimentales (et notamment la méthode flash) et peuvent être pris en compte dans la théorie, comme le montrent de nombreux travaux en mécanique [3],[4],[5],[6]. Or, ces effets sont très peu discutés, à notre connaissance, en thermique. C'est pourquoi nous nous intéressons dans cet article à l'étude des problèmes de couche limite dans ce domaine sur la base des travaux d'H. Dumontet [3] en élasticité. Dans un premier temps, nous rappelons brièvement les principaux résultats de l'homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques et la méthode de correction des effets de bords. Puis nous comparons les champs de température et de flux de chaleur issus des résolutions des problèmes hétérogènes et homogénéisés pour un matériau composite stratifié soumis à une densité de flux de chaleur sur un de ses bords. La détermination de la taille de la couche limite est également discutée.

## Mots clefs :

Homogénéisation périodique, effets de bords, thermique.

## 1 Homogénéisation périodique :

On considère un matériau stratifié défini par un domaine  $\Omega$  de  $R^2$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ . On note  $z = (z_1, z_2)$  les coordonnées cartésiennes d'un point de  $\Omega$  dans le repère  $\mathfrak{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

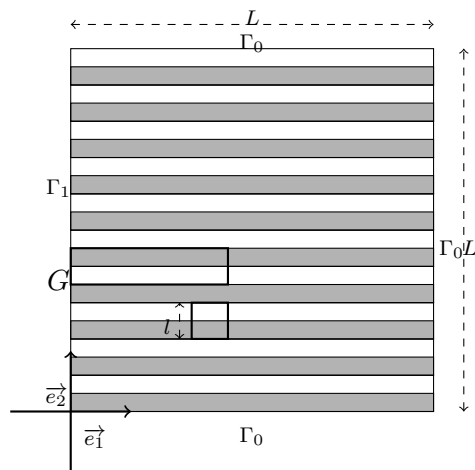


FIGURE 1: Domaine  $\Omega$  du composite stratifié.

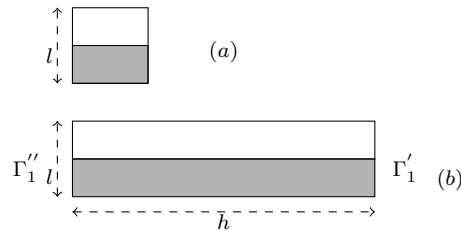


FIGURE 2: (a) :Définition de la cellule périodique  $Y$ .  
(b) :Définition de la bande  $G$ .

Nous introduisons une variable macroscopique  $x = z/L$  et une variable microscopique  $y = z/l$  avec  $y = \frac{x}{\epsilon}$ , on suppose que le tenseur de conductivité  $K = (k_{ij})$  du matériau est borné, symétrique, coercif et périodique selon la direction  $\vec{e}_2$

On désignera par  $f$  la source volumique dans  $\Omega$ ,  $F$  la densité du flux sur  $\Gamma_1$ ,  $T^\epsilon(x)$  et  $\phi^\epsilon(x)$  les champs résultants régnant dans le milieu hétérogène, Ces champs satisfont le problème de transfert de chaleur par conduction à l'état stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \text{div}_x(-\phi^\epsilon(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega & (1) \\ \phi^\epsilon(x) = K \cdot \nabla_x T^\epsilon(x) & \text{dans } \Omega & (2) \\ T^\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0 & (3) \\ \phi^\epsilon(x) \cdot \vec{n} = F(x) & \text{sur } \Gamma_1 & (4) \end{cases}$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale extérieure unitaire au bord  $\Gamma_1$ .

La technique des développements asymptotiques à deux échelles consiste à rechercher la solution  $(T^\epsilon, \phi^\epsilon)$  sous la forme du développement en puissances de  $\epsilon$  suivant :

$$T^\epsilon(x) = T^0(x, y) + T^1(x, y) \cdot \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (5)$$

tel que les fonctions  $T^i(x, y)$  sont définies sur  $\Omega$  et périodiques selon  $\vec{e}_2$ .

On peut montrer que le problème homogène équivalent au problème hétérogène (1)-(4) peut s'écrire sous la forme suivante (voir [1]) :

$$\begin{cases} \text{div}_x(-\langle \phi^0 \rangle) = f(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \langle \phi^0 \rangle = K^* \cdot \nabla_x T^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} T^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \langle \phi^0 \rangle \cdot \vec{n} = F(x) & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (9)$$

avec  $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \cdot dx$

$$K_{i,j}^* = \frac{1}{|Y|} \int_Y K(e_i - \nabla_y \chi_i) \cdot e_j \quad (10)$$

où  $\chi_i$  est solution du problème de la cellule périodique :

$$\begin{cases} \text{div}_y(K \cdot (e_i - \nabla_y \chi_i)) = 0 & \text{sur } Y \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \chi_i \text{ est périodique} & \text{sur } \partial Y \end{cases} \quad (12)$$

Finalement la résolution du problème homogène (6)-(9) nous permet de trouver  $(T^0, \langle \phi^0 \rangle)$ . On peut résumer les développements asymptotiques obtenus par les expressions :

$$\begin{cases} T^\epsilon(x) = T^0(x) + \epsilon \underbrace{((\chi(y)) \nabla_x T^0(x))}_{T^1(x,y)} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \phi^\epsilon(x) = \underbrace{((K \cdot (e_i - \nabla_y \chi_i) e_j) \nabla_x T^0(x))}_{\phi^0} + \mathcal{O}(1) \end{cases} \quad (14)$$

## 2 Effets de bords :

### 2.1 Le problème de couche limite

Le flux  $\phi^0$  et la température  $T^0$  obtenus par l'homogénéisation constituent une approximation satisfaisante des  $(T^\epsilon, \phi^\epsilon)$  dans des régions suffisamment éloignées de la frontière de  $\partial\Omega$ , mais cette approximation n'est plus satisfaisante dans le voisinage des frontières. Ceci résulte d'une part de la perte de périodicité quand les frontières sont atteintes. D'autre part le flux  $\phi^0$ , qui est une fonction de la solution des problèmes à l'échelle microscopique, n'est en général pas compatible avec une condition de Neumann arbitraire (9). Celle-ci sera donc seulement satisfaite au sens faible.

De ce point de vue, on peut dire que la théorie classique de l'homogénéisation des milieux périodiques décrit mal certains effets locaux comme les effets de bords (voir [3]).

### 2.2 Méthode de correction

Afin de corriger ces défauts, on se propose d'introduire, dans les développements asymptotiques (13)-(14) des termes de couche limite qui tendent vers 0 lorsque l'on s'éloigne de la frontière  $\Gamma_1$ . On désigne par  $G$  la bande telle que :  $G = ]0, h[ \times ]-l/2, l/2[$  et sur laquelle des correcteurs de couche limite seront appliqués comme le montre la figure 2(b).

Nous recherchons la température  $T^\epsilon$  et le flux  $\phi^\epsilon$  régnant dans le milieu hétérogène sous la forme suivante :

$$\begin{cases} T^\epsilon(x) = T^0(x) + (T^1(x, y) + T_{BL}^1(x, y)) \cdot \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon) & (15) \\ \phi^\epsilon(x) = (\phi^0(x, y) + \phi_{BL}^0(x, y)) + \mathcal{O}(\epsilon^0) & (16) \end{cases}$$

où les termes de couche limite désignés par un indice inférieur  $BL$  vérifient (19)-(21) et sont définis pour  $x \in \Gamma_1$ , c'est-à-dire  $x = (0, x_2)$  et pour  $y = (y_1, y_2) \in G$ .

De manière classique, nous substituons les développements asymptotiques (15)-(16) dans les équations du problème hétérogène (1)-(4). En identifiant les puissances de  $\epsilon$ , nous obtenons le problème de couche limite d'ordre  $\epsilon^0$  qui s'écrit :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{div}_y(\phi_{BL}^0) = 0 \\ \phi_{BL}^0 = K \cdot \nabla_y T_{BL}^1 \end{array} \right. & \text{dans } G \times \Gamma_1 & (17) \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi_{BL}^0 \cdot \vec{n} = -\phi^0 \cdot \vec{n} + \langle \phi^0 \rangle \cdot \vec{n} \\ \phi_{BL}^0(x, y + \vec{e}_2) = \phi_{BL}^0(x, y) \text{ et } T_{BL}^1(x, y + \vec{e}_2) = T_{BL}^1(x, y) \end{array} \right. & \text{sur } \Gamma_1 & (18) \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi_{BL}^0 \text{ et } T_{BL}^1 \text{ décroissent exponentiellement lorsque } y_1 \text{ tend vers } +\infty \end{array} \right. & & (19) \\ & & (20) \\ & & (21) \end{cases}$$

En utilisant la linéarité de (18)-(20), il vient que  $T_{BL}^1$  s'exprime en fonction de  $T^0$  par :

$$T_{BL}^1(x, y) = w(y) \nabla_x T^0(x) \quad (22)$$

où  $w = (w_1, w_2)$  est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{div}_y(K \cdot \nabla_y w_i) = 0 \\ (K \cdot \nabla_y w_i) \cdot \vec{n} = -K \cdot (e_i - \nabla_y \chi_i) e_j \cdot \vec{n} + \frac{1}{|Y|} \int_Y K \cdot (e_i - \nabla_y \chi_i) e_j \cdot \vec{n} \end{array} \right. & \text{dans } G & (23) \\ & \text{sur } \Gamma_1'' & (24) \\ \left\{ \begin{array}{l} w_i \text{ est périodique} \\ w_i \text{ et } \nabla_y w_i \text{ décroissent exponentiellement lorsque } y_1 \text{ tend vers } +\infty \end{array} \right. & & (25) \\ & & (26) \end{cases}$$

En résumé, nous obtenons en tenant compte des effets de bords les nouveaux développements de la température et du flux dans la structure :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} T^\epsilon(x) = T^0(x) + \epsilon \underbrace{((w(y) + \chi(y)) \nabla_x T^0(x))}_{T^1(x, y) + T_{BL}^1(x, y)} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \phi^\epsilon(x) = \underbrace{((K \cdot (e_i - \nabla_y \chi_i + \nabla_y w_i) e_j) \nabla_x T^0(x))}_{\phi^0 + \phi_{BL}^0} + \mathcal{O}(1) \end{array} \right. & (27) \\ & (28) \end{cases}$$

### 3 Résultats numériques et commentaires :

Nous présentons dans cette section des résultats de calculs de flux et de la température obtenus au voisinage du bord  $\Gamma_1$  pour un multicouche isotrope dont les propriétés sont les suivantes :

- $k_1 = 0.2W.m^{-1}.K^{-1}$  et  $k_2 = 5W.m^{-1}.K^{-1}$
- $l = 1mm, L = 10mm, \epsilon = 0.1, F = 2.10^3W.m^{-2}, f = 0$

Tous les calculs que nous allons présenter ont été faits par la méthode des éléments finis de type  $P1 - Lagrange$  et qui sont obtenus à l'aide du logiciel *COMSOL Multiphysics*®. Nous allons procéder de la manière suivante :

1. Résoudre le problème hétérogène (1)-(4) ( $T^\epsilon(x), \phi^\epsilon(x)$ ). Cette solution va être utilisée comme référence pour la comparaison avec les différents flux  $\phi^0, \phi^0 + \phi_{BL}^0$  et les différentes températures  $T^0, T^0 + \epsilon.T^1, T^0 + \epsilon(T^1 + T_{BL}^1)$ .

2. Résoudre le problème homogénéisé (6)-(9)  $(T^0, \langle \phi^0 \rangle)$ . Pour calculer le flux  $\phi^0$  on utilise (14).

3. Résoudre le problème de couche limite (23)-(26) qui permet de calculer les termes de couche limite  $\phi_{BL}^0, T_{BL}^1$ , en tenant compte du fait que  $w_i = 0$  sur  $\Gamma'_1$ .

En pratique la taille  $h$  de la bande  $G$  est obtenue par une étude de convergence. On fait croître cette taille jusqu'à ce que l'écart entre deux solutions successives sur leur domaine géométrique commun soit inférieur à une précision donnée.

Sur la figure 3, on présente les variations de la température  $T_{BL}^1$  et du flux  $\phi_{BL}^0$  de couche limite pour plusieurs valeurs de  $h$ . On retrouve la décroissance exponentielle des termes de couche limite lorsque on s'éloigne du bord et l'écart diminue entre les différentes solutions lorsque  $h$  augmente. Dans tous les calculs qui suivent on prend alors  $h = 2l$ .

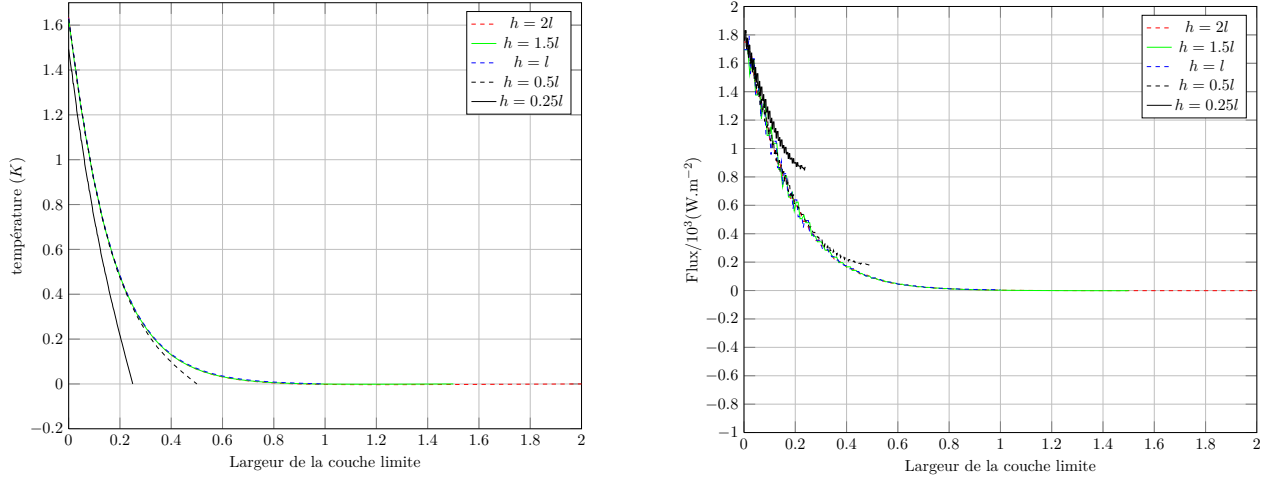


FIGURE 3: Température  $T_{BL}^1$  (à gauche) et flux  $\phi_{BL}^0$  (à droite) pour plusieurs valeurs de  $h$ .

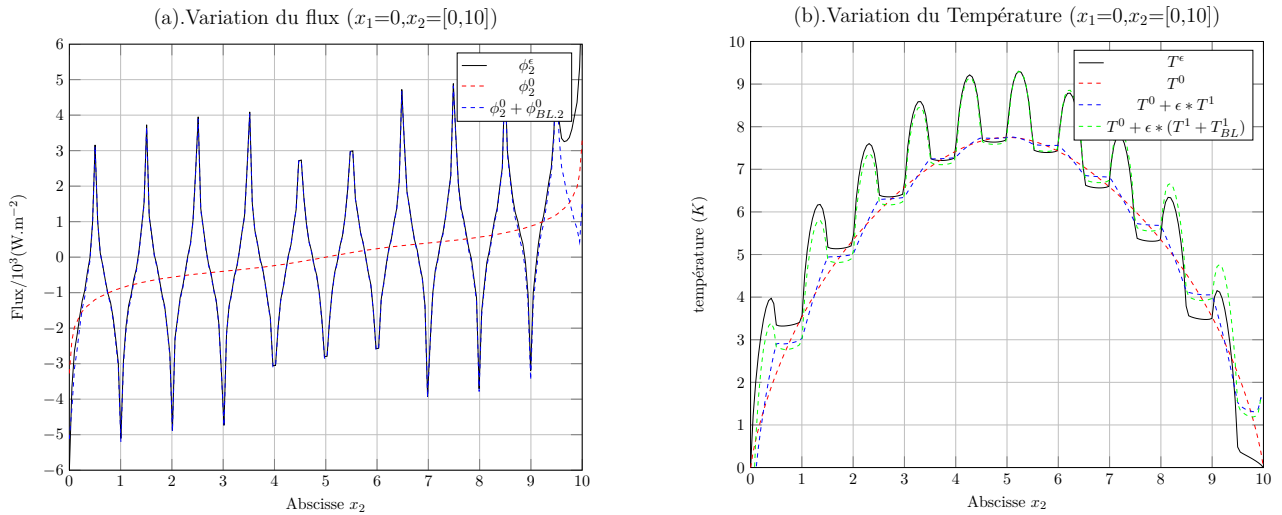


FIGURE 4: Flux de chaleur (a) et température (b) pour  $x_1 = 0$ .

L'importance de la correction de couche limite est illustrée en traçant les flux  $\phi_2^\epsilon, \phi_2^0, \phi_2^0 + \phi_{BL,2}^0$  et les températures  $T^\epsilon, T^0, T^0 + \epsilon * (T^1), T^0 + \epsilon * (T^1 + T_{BL}^1)$  en  $x_1 = 0$  (figures 4a et 4b) et en fonction de la distance au bord  $\Gamma_1$  (figures 5a et 5b). Ainsi, on met clairement en évidence que le flux  $\phi_2^0$  et  $T^0$  ne sont pas de bonnes approximations des champs macroscopiques sur la frontière  $\Gamma_1$  alors que l'ajout des termes correctifs calculés permettent d'approcher beaucoup plus correctement la solution du problème hétérogène. L'intérêt de cette correction est confirmé sur les figures 5a et 5b puisque si  $\phi^0$  et  $T^0$  sont de

bonnes approximations loin de  $\Gamma_1$ , ce n'est pas le cas à son voisinage. On remarque que les écarts entre les deux solutions s'accroissent près des frontières  $\Gamma_0$  supérieure et inférieure où on impose une condition de Dirichlet.

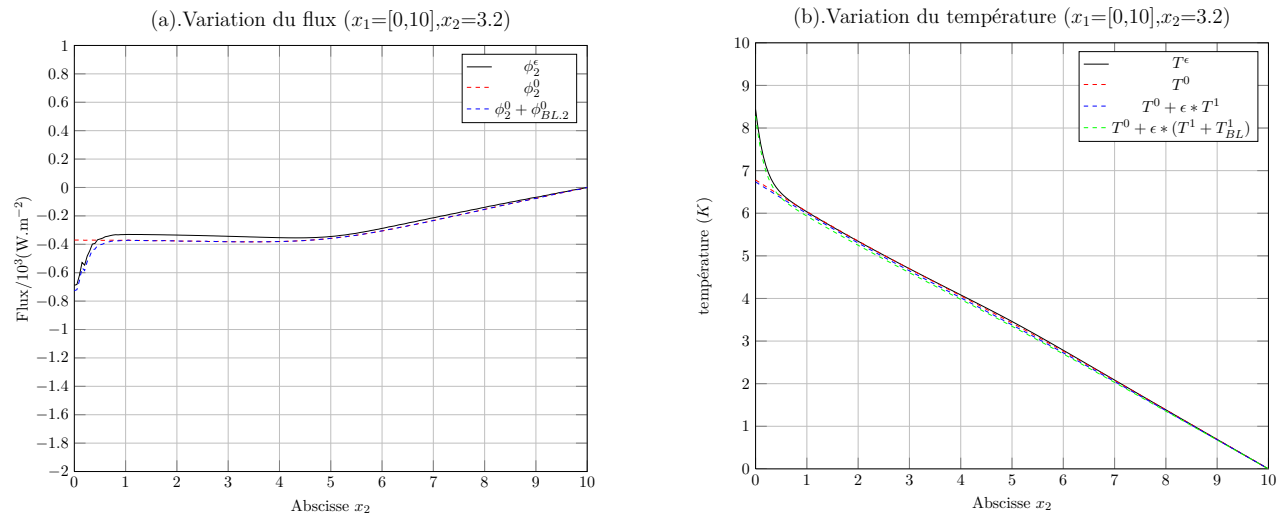


FIGURE 5: Flux de chaleur (a) et température (b) pour  $x_2 = 3.2\text{mm}$ .

## Conclusion :

Nous avons développé, dans le domaine de la thermique, le problème de couche limite permettant de prendre en compte les effets de bords dans le cadre de l'homogénéisation périodique. A titre de premier exemple, nous avons présenté des résultats obtenus pour un composite stratifié dans une configuration donnée. Ces résultats sont encourageants et démontrent l'intérêt de cette correction afin d'obtenir une meilleure approximation des champs de température et de flux de chaleur au voisinage des bords. Une étude est en cours afin d'analyser l'influence de paramètres expérimentaux tels que le contraste thermique, le facteur d'échelle  $\epsilon$  et les conditions aux limites sur les champs thermiques homogénéisés. Enfin nous allons, à moyen terme, appliquer cette méthodologie sur des volumes élémentaires représentatifs de matériaux composites à renfort fibreux pour lesquels la connaissance des propriétés thermiques est indispensable.

## Références

- [1] SANCHEZ-HUBERT J., SANCHEZ-PALENCIA E., Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation. MASSON Paris Milan Bonn 1992.
- [2] THOMAS M., BOYARD N., PEREZ L., JARNY Y., DELAUNAY D., Representative volume element of anisotropic unidirectional carbon-epoxy composite with high-fibre volume fraction, Compos.Sci.Technol., 68, 3184-3192, 2008.
- [3] DUMONTET H., Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites, thèses d'état de l'université Pierre et Marie Curie Paris 6 1990.
- [4] BUANNIC N., CARTRAUD P., Higher-order effective modelling of periodic heterogeneous beams -Part 2 :Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution, Int.J. of Solids and structures, 38, 7163-7180, 2001.
- [5] LEGUILLON D., MARION G., HARRY R., LÉCUYER F., The onset of delamination at stress-free edges in angle-ply laminates-analysis of two criteria, Compos.Sci.Technol., 61, 377-382, 2001.
- [6] PANASENKO, G., Asymptotic partial decomposition of variational problems, C. R. Acad. Sci. Ser.2B, 327, 1185-1190, 1999.