



HAL
open science

Modèle simplifié de câble pesant élastique : Application aux robots parallèles à câbles

Nicolas Riehl, Cédric Baradat, Marc Gouttefarde, François Pierrot

► To cite this version:

Nicolas Riehl, Cédric Baradat, Marc Gouttefarde, François Pierrot. Modèle simplifié de câble pesant élastique : Application aux robots parallèles à câbles. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03422498

HAL Id: hal-03422498

<https://hal.science/hal-03422498>

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèle simplifié de câble pesant élastique : application aux robots parallèles à câbles

N. Riehl^a, C. Baradat^b, M. Gouttefarde^c, F. Pierrot^d

a, b. Tecnalìa, Cap Omega, Rd-Pt B. Franklin, 34960 Montpellier

c, d. Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier, 161 rue Ada,
34095 Montpellier

Résumé :

Dans cet article, un modèle simplifié de câble pesant est présenté. Ce modèle est basé sur le modèle de caténaire élastique présenté par Irvine [5]. En supposant que la déflexion du câble sous la corde (segment de droite entre les deux extrémités du câble) est faible, certaines simplifications sont possibles. Le profil du câble sous l'effet de son propre poids et d'une force appliquée à une de ses extrémités peut alors être exprimé explicitement. De plus, une relation linéaire entre les composantes verticale et horizontale de la force appliquée par la plate-forme au câble peut être obtenue géométriquement. Le nombre d'inconnues de l'équilibre statique de la plate-forme d'un robot à m câbles peut alors être réduit à m . Pour un robot à m câbles et m DDL, ce système devient ainsi carré. Un découplage partiel du problème géométrique inverse est également possible.

Abstract :

In this paper, a simplified cable model taking cable mass into account is presented. This model is based on the well-known model of elastic catenary presented by Irvine [5]. Under the condition of low sagging below the cord (line segment between the two extremities of the cable), some simplifications can be made. Under the combined action of its own weight and a given force on an extremity, the cable profile can be expressed explicitly. Furthermore, a linear relation between the vertical and horizontal components of the force applied by the platform on the cable, can be obtained geometrically. The number of unknowns of the static equilibrium of a robot with m cable is then reduced to m . Considering an m cable / m DOF robot, this system becomes square. This simplified hefty cable model also permit to decouple partially the inverse kinematic problem.

Mots clefs : Câble pesant ; Robots parallèles à câbles ; Problème géométrique inverse

1 Introduction

Les robots parallèles à câbles sont une variante originale des robots parallèles. Contrairement aux robots parallèles conventionnels, les chaînes cinématiques disposées en parallèles ne sont pas composées de segments rigides mais de câbles. Ces câbles parcourent, depuis l'actionneur, généralement fixe, un chemin de câbles à travers différentes poulies jusqu'à s'attacher à une plate-forme mobile. L'actionneur est généralement composé d'un tambour actionné, sur lequel le câble s'enroule. L'actionneur permet de contrôler la longueur de câble déroulé. Chaque câble étant ainsi actionné, il est possible de contrôler les différents degrés de liberté (DDL) de la plate-forme mobile.

Un des avantages majeurs des robots parallèles à câbles provient de la flexibilité des câbles. Le fait que le câble peut être enroulé sur un tambour et stocké en grande quantité permet l'utilisation de longueurs de câbles très importantes. L'espace de travail de ces robots peut ainsi potentiellement atteindre plusieurs dizaines voire plusieurs centaines de mètres. Cette caractéristique a d'ailleurs été étudiée ou mise à profit dans des applications nécessitant de grandes dimensions [2, 7]. D'un autre

coté, le principal inconvénient des robots parallèles à câbles est que les câbles ne peuvent agir qu'en traction. Ainsi, deux solutions existent afin de pouvoir garder tous les câbles tendus. Soit plus de câbles que de DDL sont utilisés [4] afin de contraindre pleinement la plate-forme, soit autant (ou plus) de câbles que de DDL sont utilisés de manière à suspendre la plate-forme (robots suspendus) [1]. Dans ce dernier cas, la gravité agit comme un câble vertical supplémentaire permettant de maintenir tous les câbles sous tension.

Si dans la plupart des études sur les robots à câbles, les câbles sont assimilés à des corps rigides indéformables et sans masse, cette simplification peut ne plus être réaliste dans le cas des robots à câbles de grandes dimensions dont les câbles sont de grands diamètres. Ainsi, certaines travaux ont utilisés des modèles prenant en compte la masse des câbles. Le modèle de caténaire élastique présenté par Irvine [5] est généralement utilisé. L'application de ce modèle aux robots parallèles à câbles a été discutée dans de nombreux travaux [3, 6], et l'influence non-négligeable de ce type de modèle de câble sur la modélisation des robots parallèles à câbles a été montrée dans [6, 8]. Le modèle de caténaire élastique, présenté par Irvine [5] permet de reproduire fidèlement le comportement statique du câble sous l'effet de sa masse propre et d'une force appliquée à son extrémité libre. Ce modèle possède néanmoins l'inconvénient majeur de nécessiter une résolution numérique du problème géométrique inverse due à la non-linéarité des équations régissant le comportement des câbles. Cette résolution numérique d'un système d'équations non-linéaires couplées peut notamment poser des problèmes pour son utilisation dans une boucle de commande car elle n'est certainement pas, en l'état, compatible avec les conditions du temps réel.

Basé sur une simplification du modèle de caténaire élastique présentée par Irvine [5], cet article présente un modèle simplifié de câble pesant. En supposant que la déflexion du câble par rapport à la corde (segment de droite reliant les deux extrémités du câble) sous l'effet de son propre poids est faible en comparaison de la distance horizontale séparant les extrémités du câble, le modèle de caténaire élastique peut être simplifié. Cette simplification permet d'exprimer l'équilibre statique de la plate-forme sous la forme d'un système carré (pour un robot ayant autant de câbles que de DDL) et de découpler partiellement le problème géométrique inverse.

2 Modèle d'un câble suspendu entre deux points

Afin de d'étudier le modèle de câble présenté dans cet article et de décrire le profil d'un câble, nous situons dans le plan \mathcal{P}_i dans lequel évolue le câble i . Ce plan vertical passe par les points A_i et B_i , respectivement point de sortie et point d'attache sur la plate-forme du câble i . Un repère \mathcal{R}_i ($A_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i$) est attaché à ce plan, tel que \mathbf{x}_i et \mathbf{z}_i soient contenus dans \mathcal{P}_i , \mathbf{z}_i étant vertical de sens opposé à la gravité. L'axe \mathbf{x}_i , orthogonal à \mathbf{z}_i est orienté de manière à ce que la coordonnée B_{i_x} du point B_i dans le repère \mathcal{R}_i soit positive. Ces différentes notations sont présentées à la Fig. 1.

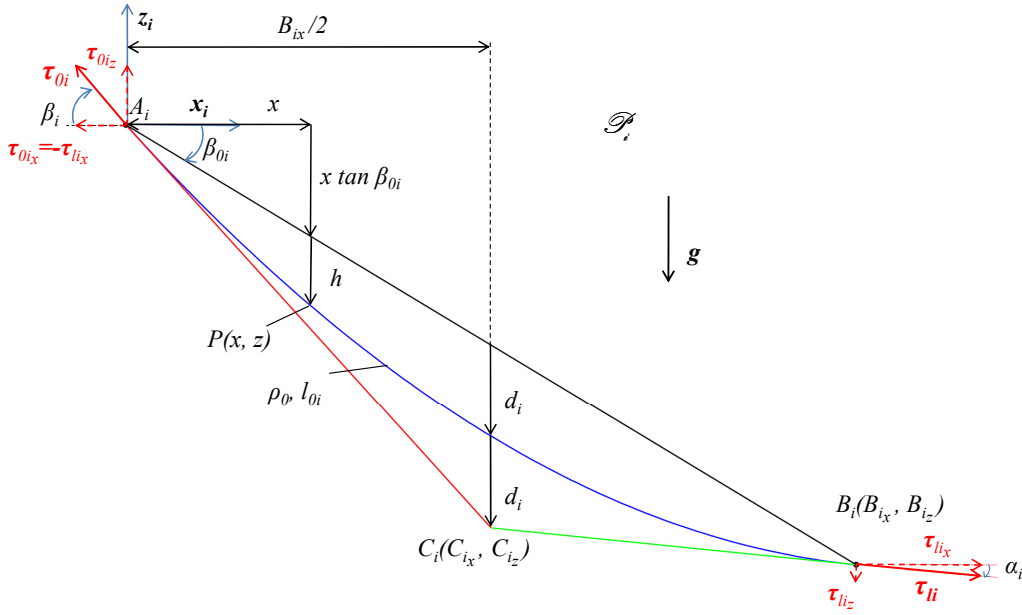
En négligeant l'élasticité ($E = \infty$), Irvine [5] présente l'équation différentielle régissant le profil d'un câble de masse linéique ρ_0 et de longueur l_{0i} :

$$\tau_{i_x} \frac{d^2 z}{dx^2} = \rho_0 g \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} \quad (1)$$

En posant $z = x \tan \beta_{0i} + h$, où β_{0i} correspond à la pente de la corde ($\tan^{-1}(B_{i_z}/B_{i_x})$) tel qu'illustré à la Fig. 1, l'Eq. (1) devient :

$$\tau_{i_x} \frac{d^2 h}{dx^2} = \rho_0 g \sqrt{1 + \left(\tan \beta_{0i} + \frac{dh}{dx} \right)^2} \quad (2)$$

En supposant que le profil du câble ne s'éloigne pas trop de la corde, le terme dh/dx est suffisamment faible pour pouvoir négliger son carré. Cette simplification ainsi que le changement de variable suivant :

FIGURE 1: Profil du câble i dans le plan \mathcal{P}_i et notations associées au modèle simplifié de câble pesant.

$$x' = \frac{x}{B_{ix}}, \quad h' = \frac{h\tau_{lix}}{\rho_0 g L_i B_{ix}}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_0 g L_i \sin \beta_{0i}}{\tau_{lix}} = \frac{\rho_0 g B_{ix} B_{iz}}{\tau_{lix} L_i}$$

où L_i est la longueur de la corde, B_{ix} et B_{iz} les coordonnées du point B_i dans le repère lié au plan \mathcal{P}_i du câble, permettent à Irvine [5] d'écrire l'équation différentielle (2) sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 h'}{dx'^2} + \varepsilon \frac{dh'}{dx'} = 1 \quad (3)$$

L'intégration de cette équation donne :

$$h' = \frac{x'}{2}(x' - 1) \left(1 + \frac{\varepsilon(1 - 2x')}{6} \right) \quad (4)$$

Sous l'hypothèse de faible déflexion du câble, le terme ε peut être négligé car $\rho_0 g L_i$ est faible par rapport τ_{lix} . On obtient alors une solution de la forme :

$$h = \frac{-\rho_0 g L_i}{2\tau_{lix} B_{ix}} x(B_{ix} - x) \quad (5)$$

soit avec les coordonnées x et z (voir Fig. 1) :

$$z = \frac{-\rho_0 g L_i}{2\tau_{lix} B_{ix}} x(B_{ix} - x) + x \tan \beta_{0i} \quad (6)$$

La déflexion maximale d_i , présentée à la Fig. 1, est obtenue lorsque la dérivée dh/dx s'annule :

$$\frac{dh}{dx} = 0 = \frac{-\rho_0 g L_i}{2\tau_{lix}} (B_{ix} - 2x) \quad (7)$$

c'est-à-dire en $x = B_{i_x}/2$. L'expression de la déflexion maximale d_i est alors :

$$d_i = \frac{-\rho_0 g B_{i_x} L_i}{8\tau_{i_x}} \quad (8)$$

Le critère de validité d'une faible déflexion du câble, présentée par Irvine dans [5], implique le rapport de la déflexion maximale d_i à l'envergure B_{i_x} . Il s'écrit :

$$\frac{|d_i|}{B_{i_x}} \leq \frac{1}{8} \quad (9)$$

Il peut également être écrit en fonction de la composante horizontale τ_{i_x} de la tension au point B_i :

$$\tau_{i_x} \geq \rho_0 g L_i \quad (10)$$

Ainsi, l'hypothèse faite ici signifie que la composante horizontale de la tension dans le câble au point B_i doit être supérieure au poids du câble considéré comme étant droit et de longueur L_i (distance entre les deux points A_i et B_i). Notons que d'après [5], ce modèle est toujours valable pour un rapport de 1/5 voire 1/4 dans l'Eq. (9).

3 Transmission des efforts à la plate-forme

D'après la Fig. 1, une équation reliant les composantes τ_{i_x} et τ_{i_z} de la force τ_i appliquée à l'extrémité B_i du câble i peut être obtenue géométriquement. A partir de l'équation du profil du câble (Eq. (6)), on obtient l'équation de la tangente au profil du câble en $x = 0$:

$$z = \left(\frac{-\rho_0 g L_i}{2\tau_{i_x}} + \tan \beta_{0i} \right) x \quad (11)$$

et l'équation de la tangente en $x = B_{i_x}$:

$$z = \left(\frac{\rho_0 g L_i}{2\tau_{i_x}} + \tan \beta_{0i} \right) x - \frac{\rho_0 g L_i B_{i_x}}{2\tau_{i_x}} \quad (12)$$

L'expression de l'intersection de ces deux tangentes et l'expression de la tangente au profil du câble en $x = B_{i_x}$ (Eq. (12)), nous permettent d'obtenir une relation entre les composantes τ_{i_x} et τ_{i_z} de la tension du câble au point B_i :

$$\frac{\tau_{i_z}}{\tau_{i_x}} = \tan \alpha_i = \frac{B_{i_x}/2 - 2d_i}{B_{i_x}/2} = \frac{\rho_0 g L_i}{2\tau_{i_x}} + \tan \beta_{0i} \quad (13)$$

où α_i est l'angle entre l'horizontal et la direction de la tension τ_i , tel que présenté à la Fig. 1.

La relation entre τ_{i_z} et τ_{i_x} peut donc s'écrire sous une forme linéaire :

$$\tau_{i_z} = \frac{\rho_0 g L_i}{2} + \tau_{i_x} \tan \beta_{0i} \quad (14)$$

La force appliquée par le câble i sur la plate-forme, exprimée dans le repère global \mathcal{R}_A , peut donc être écrite en fonction de la seule composante horizontale τ_{i_x} de la tension τ_i au point B_i :

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T = -(\mathbf{q}_i \tau_{i_x} + \mathbf{f}_i) \quad (15)$$

où $\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \cos \gamma_i & \sin \gamma_i & \tan \beta_{0i} \end{bmatrix}^T$, et $\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_0 g L_i / 2 \end{bmatrix}^T$

Notons que γ_i est l'angle de la rotation d'axe vertical permettant de passer de \mathcal{R}_i à \mathcal{R}_A . Notons également que le signe négatif dans l'Eq. (15) vient du fait que la tension τ_{li} correspond à la force appliquée par la plate-forme sur l'extrémité B_i du câble. F_x , F_y et F_z sont quant à elles les composantes de la force appliquée par le câble i sur la plate-forme.

D'après l'Eq. (15), le torseur d'efforts appliqué par le câble i sur la plate-forme au point O_B s'écrit :

$$-(\mathbf{w}_{x_i} \tau_{li_x} + \mathbf{f}_{cab_i}) \quad (16)$$

où :

$$\mathbf{w}_{x_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ Q\mathbf{b}_i \times \mathbf{q}_i \end{bmatrix} \quad (17)$$

et :

$$\mathbf{f}_{cab_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ Q\mathbf{b}_i \times \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

4 Équilibre statique de la plate-forme

A partir de l'expression du torseur d'efforts exercé par le câble i sur la plate-forme, on peut écrire l'équilibre statique de la plate-forme d'un robot à m câbles pour un torseur d'efforts extérieur \mathbf{f}_e :

$$-(\mathbf{W}_x \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{f}_{cab}) + \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (19)$$

où $\boldsymbol{\tau}_x$ contient les composantes horizontales τ_{li_x} des forces $\boldsymbol{\tau}_{li}$: $\boldsymbol{\tau}_x = [\tau_{l1_x} \quad \tau_{l2_x} \quad \cdots \quad \tau_{lm_x}]^T$, où \mathbf{W}_x s'écrit $\mathbf{W}_x = [\mathbf{w}_{x_1} \quad \mathbf{w}_{x_2} \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{x_m}]_{6 \times m}$ et où :

$$\mathbf{f}_{cab} = \sum_{i=1}^m \mathbf{f}_{cab_i} \quad (20)$$

Dans le cas des robots possédant autant de câbles que de degrés de liberté (c'est-à-dire $m = 6$), le système présenté à l'Eq. (19) est carré, ce qui permet, pour un torseur d'effort extérieur \mathbf{f}_e donné et hors singularité de \mathbf{W}_x , d'obtenir une solution unique :

$$\boldsymbol{\tau}_x = \mathbf{W}_x^{-1} \mathbf{f}_{Tot} \quad (21)$$

où : $\mathbf{f}_{Tot} = \mathbf{f}_e - \mathbf{f}_{cab}$

Dans le cas où le câble est supposé indéformable et sans masse, pour une pose donnée, si l'une des tensions est négative, l'équilibre statique de la plate-forme n'est pas réalisable avec tous les câbles tendus. Toutefois, avec le modèle de câble considéré dans cet article, le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ de l'Eq. (19) ne contient pas directement les tensions dans les câbles τ_i , mais la composante τ_{li_x} de la force $\boldsymbol{\tau}_{li}$.

Pour que le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ donné par l'Eq. (21) représente une solution réalisable physiquement, il faut que ses composantes horizontales τ_{li_x} soient positives. En effet, si une de ces composantes est négative, le câble correspondant travaille en compression ce qui est incompatible avec ses capacités physiques. Ainsi, si la solution unique de l'Eq. (21) possède une composante négative, l'équilibre de la plate-forme n'est pas réalisable pour le torseur \mathbf{f}_e .

Dans le cas où un ou plusieurs câbles supplémentaires sont utilisés pour contrôler les 6 DDL de la plate-forme ($m > 6$), l'Eq. (21) n'est plus valide. En effet, le système de l'Eq. (19) est rectangulaire (sous déterminé) et possède une infinité de solutions.

5 Problème géométrique inverse

Résoudre le problème géométrique inverse consiste à déterminer la longueur déroulée de chacun des câbles du robot. Une fois l'équilibre statique de la plate-forme résolu et les composantes horizontales $\tau_{l_{i_x}}$ déterminées pour tous les câbles, il est possible de calculer les longueurs des câbles. Remarquons en effet que le modèle simplifié de câble pesant, présenté dans cet article, ne permet pas de découpler complètement le problème. Il est toujours nécessaire de calculer les forces appliquées à l'extrémité B_i de câble i afin de pouvoir déterminer la longueur du câble. Étant donnée la description du profil du câble de l'Eq. (6), l'expression de sa longueur l_i peut être obtenue en intégrant un élément de longueur sur l'intervalle $[0, B_{i_x}]$ de x . D'après [5], cette intégrale peut être approximée de la façon suivante :

$$l_i = \int_0^{B_{i_x}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = L_i \left(1 + \frac{1}{24} \left(\frac{\rho_0 g L_i}{\tau_{l_{i_x}}}\right)^2 - \frac{1}{640} \left(\frac{\rho_0 g L_i}{\tau_{l_{i_x}}}\right)^4 + \dots \right) \quad (22)$$

6 Conclusions

Basé sur l'hypothèse que le profil du câble ne s'éloigne pas trop de la corde $A_i B_i$, certaines simplifications dans les équations du modèle de caténaire élastique peuvent être réalisées. Quand le critère de validité (Eq. (10)) de ces simplifications est vérifié, elles permettent :

- d'obtenir une expression explicite du profil du câble (Eq. (6)) ;
- de découpler partiellement le problème géométrique inverse. Les tensions et les longueurs des câbles peuvent être déterminées séparément. Les tensions doivent cependant être déterminées préalablement au calcul des longueurs des câbles ;
- d'obtenir une relation linéaire entre les composantes $\tau_{l_{i_x}}$ et $\tau_{l_{i_z}}$ de la force appliquée par la plate-forme sur le câble i , ce qui entraîne :
 - une diminution par 2 du nombre d'inconnues de l'équilibre statique ;
 - l'expression de l'équilibre statique de la plate-forme sous la forme d'un système carré pour $m = n$.

Ce modèle simplifié de câble pesant, et sa formulation proche de celle du modèle de câble sans masse va permettre de transposer nombres d'études sur les robots à câbles aux robots dont la masse des câbles n'est pas négligeable. Il pourra notamment être utilisé dans une commande quasi-statique d'un robot à câbles de grande dimension.

Références

- [1] ALBUS, J., BOSTELMAN, R., AND DAGALAKIS, N. The NIST Robocrane. *Journal of Robotic Systems* 10, 2 (1993), 709–724.
- [2] BOSTELMAN, R., ALBUS, J., DAGALAKIS, N., JACOFF, A., AND CROSS, J. Applications of The NIST Robocrane. In *5th international Symposium on Robotics and Manufacturing* (Maui, HI, USA, 1994).
- [3] DUAN, B. Y., QIU, Y. Y., ZHANG, F. S., AND ZI, B. On design and experiment of the feed cable-suspended structure for super antenna. *Mechatronics* 19 (2009), 503–509.
- [4] FERRARESI, C. A new methodology for the determination of the workspace of six-DOF redundant parallel structures actuated by nine wires. *Robotica* 25 (2007), 113–120.
- [5] IRVINE, H. *Cable Structures*. 1981.
- [6] KOZAK, K., AND WANG, Q. Z. E. J. Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass \hat{A} . *IEEE Transactions on Robotics* 22 (2006), 425–433.
- [7] NAN, R., AND PENG, B. A chinese concept for $1 \sim km^2$ radio telescope. *Acta Astronautica* 46 (2000), 667–675.
- [8] RIEHL, N., GOUTTEFARDE, M., KRUT, S., BARADAT, C., AND PIERROT, F. Effects of Non-Negligible Cable Mass on the Static Behavior of Large Workspace Cable-Driven Parallel Mechanisms. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2009), pp. 2193–2198.