



HAL
open science

Analyse multi-échelle des vibrations des matériaux hétérogènes : application à l'amortissement passif

Kodjo Attipou, Saeid Nezamabadi, El Mostafa Daya, Hamid Zahrouni

► **To cite this version:**

Kodjo Attipou, Saeid Nezamabadi, El Mostafa Daya, Hamid Zahrouni. Analyse multi-échelle des vibrations des matériaux hétérogènes : application à l'amortissement passif. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. <hal-03422482>

HAL Id: hal-03422482

<https://hal.science/hal-03422482v1>

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Analyse multi-échelle des vibrations des matériaux hétérogènes: application à l'amortissement passif

K. ATTIPOU^a, S. NEZAMABADI^b, E.M. DAYA^{a,c}, H. ZAHROUNI^a

- a. Université Paul Verlaine de Metz, Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3), UMR CNRS 7239 ISGMP, Ile de Saulcy, 57045 Metz Cedex 01 France
- b. Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM), Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, 2 rue Conté, 75003 Paris, France
- c. Unité Mixte Internationale UMI GT-CNRS 2958, 2-3 rue Marconi, 57070 Metz, France

Résumé :

Dans cette étude, nous proposons une approche multi-échelle pour l'analyse des vibrations des matériaux hétérogènes. Cette technique, basée sur la méthode des éléments finis multi-échelle (EF^2), est développée pour l'étude des vibrations libres des matériaux hétérogènes viscoélastiques. Des exemples numériques sur des sandwichs viscoélastiques ont permis de valider cette approche et d'étudier l'influence de différents paramètres sur les propriétés amortissantes. Ces paramètres sont le rapport de rigidité, la fraction volumique et la morphologie de l'inclusion.

Abstract :

In this study, we propose a multiscale approach for the vibration analysis of heterogeneous materials. This technique, based on the multiscale finite element method (FE^2), has been developed for the study of free vibrations of heterogeneous viscoelastic materials. This approach has been validated in the case of viscoelastic sandwich structures. Numerical results yield to study the influence of different parameters on the damping properties. Those parameters are stiffness ratio, the volume fraction and the morphology of the inclusion.

Mots clés : Méthode des éléments finis multi-échelle, Vibration libre, Amortissement passif.

1 Introduction

Les vibrations sont à l'origine de l'endommagement et la fatigue des structures industrielles. Le contrôle des vibrations permet d'augmenter la durée de vie des structures. L'analyse des vibrations est devenue une étape importante dans la conception des systèmes mécaniques industriels. Elle permet, entre autres, de déterminer des techniques passives de réduction du bruit et des vibrations.

Dans ce travail, nous développons une approche numérique pour l'analyse des vibrations des matériaux hétérogènes viscoélastiques. Cette approche est basée sur une technique multi-échelle dite *méthode des éléments finis multi-échelle* (EF^2). Le principe de la méthode EF^2 est de considérer au niveau de la microstructure du matériau, un volume élémentaire représentatif (VER) représentant toutes les hétérogénéités du matériau. Ensuite, on extrait, à partir d'un problème microscopique lié au VER, les contraintes macroscopiques à chaque point d'intégration de la macrostructure.

La technique de l'homogénéisation permet de déterminer la relation de comportement au niveau macroscopique à l'aide des contraintes microscopiques calculées au niveau de la microstructure. Les contraintes et les déformations macroscopiques sont égales aux moyennes des contraintes et déformations microscopiques, respectivement. Pour plus de simplicité, dans notre travail, nous avons considéré une répartition homogène et périodique des hétérogénéités dans le matériau; ce qui nous permet de réduire la construction du VER à une inclusion dans une matrice [5].

2 Formulation multi-échelle du problème de vibration

La formulation faible du problème macroscopique dans un domaine Ω avec un bord extérieur $\partial\Omega$ peut s'écrire comme suit :

$$\int_{\Omega} {}^t\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega + \int_{\Omega} {}^t\delta\bar{\mathbf{u}}\bar{\rho}\frac{\partial^2\bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad \forall \delta\bar{\mathbf{u}} C.A. * , \quad (1)$$

avec comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) & \text{sur } \partial\Omega_u , \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{f} & \text{sur } \partial\Omega_t , \end{cases} \quad (2)$$

où $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes macroscopiques de Cauchy, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ le tenseur des déformations macroscopiques, $\bar{\rho}$ désigne la densité de la structure, $\bar{\mathbf{u}}$ le champ de déplacement macroscopique, $\hat{\mathbf{u}}$ le champ de déplacement imposé sur une partie du bord notée $\partial\Omega_u$, $\bar{\mathbf{X}}$ les coordonnées d'un point donné de la structure, \mathbf{N} le vecteur normal unitaire sortant de la surface $\partial\Omega$ et \mathbf{f} l'effort imposé sur une partie $\partial\Omega_t$. La notation $(\bar{\cdot})$ indique les quantités macroscopiques. La relation de comportement au niveau macroscopique n'est pas connue explicitement. Elle sera déterminée à partir d'un modèle microscopique pour lequel on connaît les lois de comportement des constituants.

Le problème microscopique est formulé comme un problème standard quasi-statique en mécanique des solides [6] et [7]. Dans ce cas, la formulation faible du problème microscopique s'écrit comme suit :

$$\int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} d\omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} C.A., \quad (3)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes microscopiques de Cauchy, $\boldsymbol{\epsilon}$ le tenseur des déformations microscopiques, \mathbf{u} le champ de déplacement microscopique et ω le domaine du VER.

Les lois de comportement microscopique sont connues pour chaque phase r du VER et s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^{(r)} : \boldsymbol{\epsilon} \\ \mathbb{C}^{(r)} = 2\mu^{(r)}\mathcal{I} + \lambda^{(r)}\mathbf{II} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (4)$$

où \mathbb{C} est la matrice du comportement microscopique, r la phase du VER, E le module d'Young, \mathcal{I} le tenseur identité d'ordre 4 et ν le coefficient de Poisson supposé constant. μ et λ représentent les coefficients de Lamé. Dans le cadre de la loi viscoélastique, pour simplifier la formulation, on suppose également que le module d'Young est complexe et constant et s'écrit comme suit :

$$E = E_0(1 + i\eta_c) , \quad (5)$$

où E_0 est le module réel élastique et η_c le facteur de perte du matériau viscoélastique.

Les deux problèmes aux niveaux microscopique et macroscopique sont couplés via les relations suivantes, qui permettent de déterminer les contraintes et les déformations macroscopiques, respectivement [3] :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} d\omega \quad (6)$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \boldsymbol{\epsilon} d\omega \quad (7)$$

Il existe différentes types de conditions aux limites sur les bords du VER, $\partial\Omega$, qui peuvent être choisies : les déformations homogènes, les contraintes homogènes et la condition de périodicité. Pour plus de détails sur ces conditions aux limites, on peut se référer à [4] et [5]. Dans notre travail, on prendra comme conditions aux limites sur les bords du VER la condition de périodicité qui s'écrit comme suit :

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \quad \text{sur } \partial\omega , \quad (8)$$

où les exposants + et - sont associés aux indices des noeuds sur les bords opposés du VER [5].

*. Cinématiquement Admissible

3 Stratégie de résolution

Dans cette section, nous présentons la stratégie de résolution du problème multi-échelle. À cause des conditions de couplage, on commence d'abord par résoudre le problème microscopique. On peut écrire le déplacement microscopique sous la forme d'un vecteur complexe :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^R + i\mathbf{u}^I \quad \text{dans } \omega, \quad (9)$$

où \mathbf{u}^R et \mathbf{u}^I sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du champ de déplacement microscopique. Pour cela, dans le cas $2D$, à l'aide du principe de superposition, on peut écrire \mathbf{u} sous la forme :

$$\mathbf{u} = \bar{\epsilon}_{11}(\tilde{\mathbf{u}}_{(11)}^R + i\tilde{\mathbf{u}}_{(11)}^I) + \bar{\epsilon}_{22}(\tilde{\mathbf{u}}_{(22)}^R + i\tilde{\mathbf{u}}_{(22)}^I) + 2\bar{\epsilon}_{12}(\tilde{\mathbf{u}}_{(12)}^R + i\tilde{\mathbf{u}}_{(12)}^I) \quad \text{dans } \omega, \quad (10)$$

La résolution du problème microscopique nous permet d'écrire \mathbf{u} sous la forme :

$$\mathbf{u} = (\mathbb{A}^R + i\mathbb{A}^I) : \bar{\epsilon}, \quad (11)$$

où \mathbb{A}^R et \mathbb{A}^I sont des tenseurs d'ordre trois définis par $A_{ijk}^R = \tilde{u}_{(jk)}^{R(i)}$ et $A_{ijk}^I = \tilde{u}_{(jk)}^{I(i)}$ (i étant le nombre d'équations à résoudre), respectivement. Ensuite on construit les tenseurs de localisation définis dans la relation de couplage :

$$\epsilon = (\mathbb{A}_{,X}^R + i\mathbb{A}_{,X}^I) : \bar{\epsilon}, \quad (12)$$

où $\mathbb{A}_{,X}^R = \frac{1}{2}(\nabla \mathbb{A}^R + {}^t\nabla \mathbb{A}^R)$ et $\mathbb{A}_{,X}^I = \frac{1}{2}(\nabla \mathbb{A}^I + {}^t\nabla \mathbb{A}^I)$ sont des tenseurs d'ordre quatre identifiés comme les tenseurs de localisation réelle et imaginaire, respectivement.

À l'aide de la relation de couplage (12), on exprime la contrainte microscopique σ puis on déduit la contrainte macroscopique $\bar{\sigma}$ grâce à la relation de couplage (6). On obtient ainsi la relation de comportement macroscopique :

$$\bar{\sigma} = \bar{\mathbb{C}}^{(r)} : \bar{\epsilon}, \quad (13)$$

avec

$$\bar{\mathbb{C}}^{(r)} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbb{C}^{(r)} : (\mathbb{A}_{,X}^R + i\mathbb{A}_{,X}^I) d\omega,$$

où $\bar{\mathbb{C}}^{(r)}$ est un tenseur d'ordre quatre de comportement macroscopique dit *tenseur d'homogénéisation*.

Finalement, en mettant $f = 0$ (cas des vibrations libres), le problème macroscopique à résoudre s'écrit sous la forme :

$$\int_{\Omega} {}^t\delta \bar{\epsilon} : \bar{\mathbb{C}}^{(r)} : \bar{\epsilon} d\Omega + \int_{\Omega} {}^t\delta \bar{\mathbf{u}} \bar{\rho} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{t}^2} d\Omega = 0. \quad (14)$$

Après discrétisation par éléments finis de l'équation (14), on obtient un problème de vibration aux valeurs propres complexes :

$$(\bar{\mathbf{K}} - \bar{\omega}^2 \bar{\mathbf{M}}) \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (15)$$

où $\bar{\mathbf{K}}$ est la matrice de rigidité complexe de la structure et $\bar{\mathbf{M}}$ désigne la matrice de masse de la structure. $\bar{\omega}$ représente la fréquence propre de vibration de la structure et est déterminée sous la forme classique :

$$\bar{\omega}^2 = \bar{\Omega}^2 (1 + i\eta), \quad (16)$$

où $\bar{\Omega}$ est la fréquence amortie et η le facteur de perte de chaque mode de vibration de la structure.

4 Exemples numériques

Des exemples de validation de cette approche ont été faits dans [1]. Nous présentons ici des tests numériques montrant l'influence de certains paramètres sur l'amortissement des structures sandwichs viscoélastiques. Ces paramètres sont le rapport de rigidité, la fraction volumique et la morphologie de l'inclusion.

Nous considérons une poutre sandwich cantilever trois couches (élastique/viscoélastique/élastique). La même structure a été étudiée dans [2]. Nous avons repris les mêmes caractéristiques de la structure mais en changeant le coeur viscoélastique. Dans nos exemples, la viscoélasticité de la couche centrale est représentée par des inclusions viscoélastiques. Les couches élastiques ont une épaisseur de $1,524 \text{ mm}$ et la couche viscoélastique a une épaisseur de $0,127 \text{ mm}$. La longueur de la poutre est $L = 177,8 \text{ mm}$. La macrostructure a été discrétisée à l'aide d'éléments de référence quadrilatérale à 9 noeuds alors que la microstructure (VER) est discrétisée à l'aide d'éléments de référence triangulaire à 3 noeuds. On désigne par V , le volume du VER, E_i , ν_i et V_i sont le module d'Young, le coefficient de Poisson et le volume de la matrice pour $i = 1$ et de l'inclusion pour $i = 2$, respectivement. Le module d'Young de la matrice est $E_1 = 1794 \text{ KPa}$. La matrice et l'inclusion ont la même densité qui est $\rho = 968,1 \text{ kg/m}^3$. Les couches élastiques ont un module d'Young de 69 GPa et une densité $\rho_0 = 2766 \text{ kg/m}^3$. Le coefficient de poisson est le même pour toutes les couches de la structure, soit $\nu = 0,3$.

Pour étudier l'influence du rapport de rigidité, nous avons considéré 3 valeurs du facteur de perte de l'inclusion circulaire : 0,1, 0,6 et 1,5. L'inclusion représente dans ce cas-ci, en fraction volumique, 20% du VER. Le rapport de rigidité est défini par $r = E_1/E_2$. Nous avons présenté les résultats obtenus pour le premier mode de vibration (figure 1). En étudiant les courbes, on remarque, dans les deux cas, que l'amortissement modal et la fréquence propre varient significativement lorsque le rapport de rigidité est entre 0,1 et 10. Par ailleurs la fréquence propre augmente et l'amortissement diminue lorsque le facteur de perte de l'inclusion augmente.

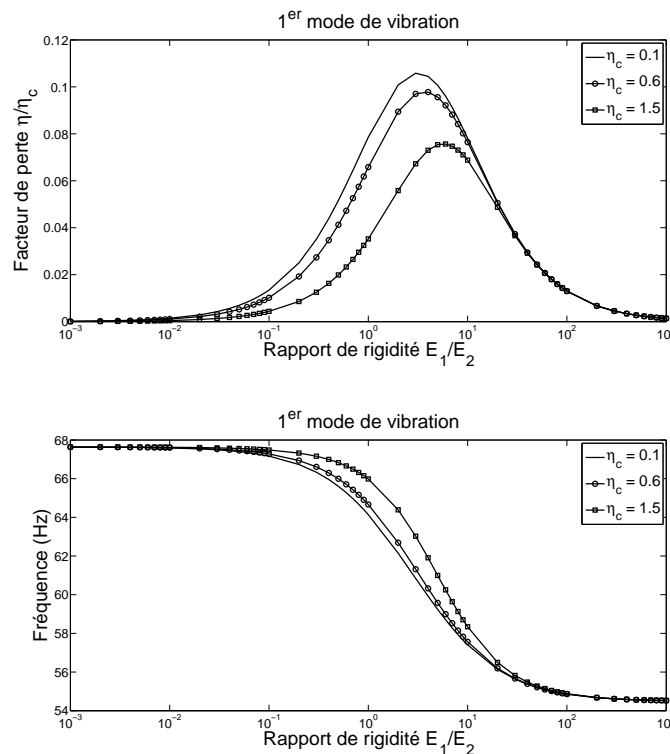


FIGURE 1 – Variation de l'amortissement modal et de la fréquence propre du premier mode en fonction du rapport de rigidité. Fraction volumique $v = 20\%$.

Dans l'étude de l'influence de la fraction volumique, nous avons pris en compte 3 valeurs de la fraction volumique : 20, 40 et 60%. Notons que la fraction volumique v est déterminée par le rapport entre le

volume de l'inclusion V_2 et celui du VER V : $v = V_2/V$. Le facteur de perte de l'inclusion pris dans ce cas est 0,6. La figure 2 montre les courbes de variation de l'amortissement modale et de la fréquence propre pour le premier mode de vibration. L'amortissement modale croît avec la fraction volumique quelque soit la valeur du rapport de rigidité ; quoique la variation est très significative lorsque le rapport de rigidité est entre 0,1 et 100. La fréquence propre quant à elle augmente avec la fraction volumique lorsque l'inclusion est plus rigide que la matrice mais elle décroît lorsque la matrice est plus rigide que l'inclusion.

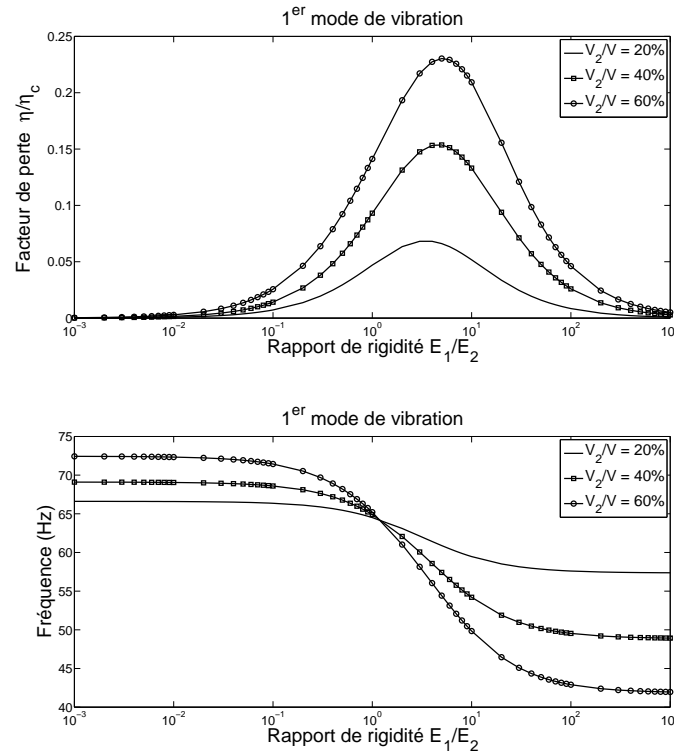


FIGURE 2 – Variation de l'amortissement modal et de la fréquence propre du premier mode de vibration. Le facteur de perte de l'inclusion est $\eta_c = 0,6$. Trois valeurs de la fraction volumique ont été considérées : 20%, 40% et 60%.

Pour l'étude de l'influence du type de morphologie, 3 types d'inclusion ont été considérés : inclusion circulaire, inclusion elliptique horizontale et inclusion elliptique verticale. La fraction volumique est de 20% et le facteur de perte est $\eta_c = 0,6$. La figure 3 montre les courbes de variation de l'amortissement modale et de la fréquence propre pour les 3 types de morphologie. Les courbes pour l'inclusion elliptique horizontale et verticale coïncident. La poutre avec inclusion circulaire présente un amortissement modale plus importante que celui de la poutre avec inclusion elliptique. Quant à la fréquence propre, celle de la poutre avec inclusion circulaire est plus grande lorsque l'inclusion est plus rigide que la matrice alors que celle de la poutre avec inclusion elliptique est plus grande lorsque la matrice est plus rigide que l'inclusion.

5 Conclusion

Dans cette étude, une approche multi-échelle a été développée pour l'analyse des vibrations des matériaux hétérogènes viscoélastiques. Cette approche est basée sur la méthode des éléments finis multi-échelles et consiste à déterminer les contraintes et déformations macroscopiques à partir des contraintes et déformations calculées sur la microstructure. Elle permet d'éviter de prendre en compte toutes les hétérogénéités du matériau lors des calculs. Des exemples numériques sur l'amortissement passif ont été étudiés en considérant le module complexe constant pour plus de simplicité. L'avantage de cette technique multi-échelle par rapport aux méthodes classiques d'étude des vibrations (par exemple la

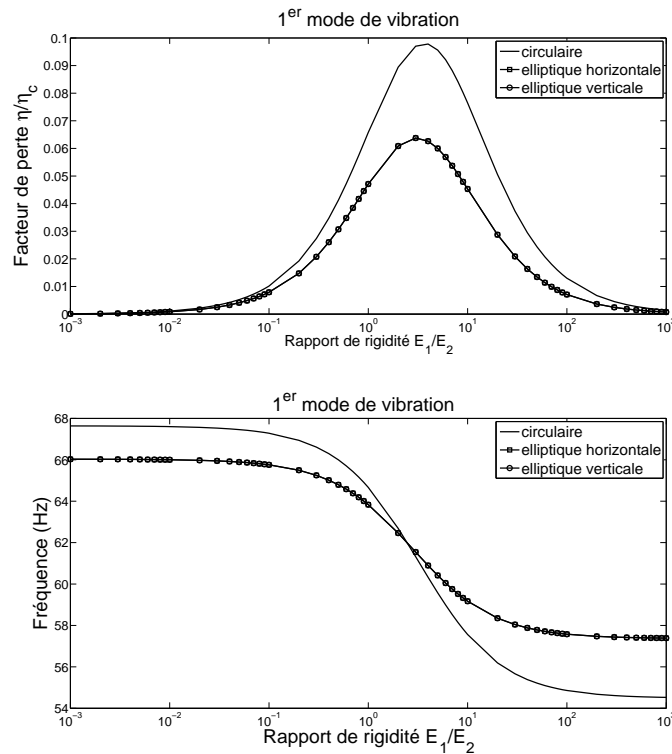


FIGURE 3 – Variation de l'ammortissement modal et de la fréquence propre du premier mode de vibration pour les 3 types d'inclusion avec un facteur de perte $\eta = 0,6$. La fraction volumique est $v = 20\%$.

méthode de transition d'échelle) est qu'on peut introduire facilement des non linéarités matérielles pour une meilleure prise en compte de la viscoélasticité.

Références

- [1] Attipou, K., Nezamabadi, S., Daya, E.M., Zahrouni, H. 2011 A multiscale approach for the vibration analysis of heterogeneous materials : application to passive damping. *Soumis*.
- [2] Daya, E.M., Potier-Ferry, M. 2001 A numerical method for nonlinear eigenvalue problems : application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures* **79** 533-541.
- [3] Hill, R. 1963 Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **11** 357-372.
- [4] Miehe, C. 2003 Computational micro-to-macro transitions for discretized micro-structures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **192** 559-591.
- [5] Nezamabadi, S., Yvonnet, J., Zahrouni, H., Potier-Ferry, M. 2009 A multilevel computational strategy for microscopic and macroscopic instabilities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **198** 2099-2110.
- [6] Patel, R. K., Bhattacharya, B., Basu, S. 2007 A finite element based investigation on obtaining high material damping over a large frequency range in viscoelastic composites. *Journal of Sound and Vibration* **303** 753-766.
- [7] Yi, Y.-M., Park, S.-H., Youn, S.-K. 1998 Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures. *Int. J. Solids Structures* **17** 2039-2055.