



**HAL**  
open science

# Résolution d'un problème d'assimilation variationnelle 4D-VAR par des modèles réduits POD adaptatifs

Gilles Tissot, Laurent Cordier, R. Noack B.

► **To cite this version:**

Gilles Tissot, Laurent Cordier, R. Noack B.. Résolution d'un problème d'assimilation variationnelle 4D-VAR par des modèles réduits POD adaptatifs. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03421469

**HAL Id: hal-03421469**

**<https://hal.science/hal-03421469>**

Submitted on 9 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Résolution d'un problème d'assimilation variationnelle 4D-VAR par des modèles réduits POD adaptatifs

G. TISSOT, L. CORDIER, B. R. NOACK

*Institut PPRIME, Dpt. Fluides, Thermique et Combustion, 86036 Poitiers cedex*

## Résumé :

*L'assimilation variationnelle de données 4D-VAR consiste à combiner les informations issues de modèles numériques à celles provenant d'observations afin de reconstruire de manière optimale l'état du système. Cette approche, largement utilisée en météorologie, est limitée en pratique par le coût de la résolution du problème direct/adjoint qui lui est associé. Pour cela, nous évaluerons ici sur une équation de convection/diffusion modèle, différentes stratégies de résolution basées sur des modèles réduits POD adaptatifs. En particulier, nous montrerons l'intérêt de coupler modèles réduits et méthode d'optimisation à région de confiance.*

## Abstract :

*The 4D-VAR data assimilation method consists in combining information resulting from numerical models with those coming from observations in order to reconstruct optimally the state of the system. This approach, widely used in meteorology, is limited in practice by the cost of solving the associated direct/adjoint problem. For that, we will evaluate here on a model convection/diffusion equation, various strategies of resolution based on adaptive POD models. In particular, we will show the interest of coupling reduced-order models and trust-region optimisation methods.*

**Mots clefs :** assimilation de données ; modèle réduit POD ; méthodes adaptatives

## 1 Introduction

Dans de nombreuses disciplines scientifiques (océanographie, météorologie mais également en contrôle d'écoulement), nous ne disposons pas des informations complètes sur l'état du système. En effet, il n'est tout simplement pas possible de mesurer à tout instant et en tout point du domaine toutes les grandeurs caractéristiques du système. Or, obtenir une bonne estimation de l'état du système en tout point du domaine et cela, suffisamment en avance, est crucial pour adapter nos actions aux évolutions futures de la dynamique. Classiquement, en mathématique appliquée, ce problème est résolu par assimilation de données [1]. De manière générale, cette approche consiste à combiner les informations issues de modèles à celles provenant d'observations afin de reconstruire de manière optimale l'état du système. En effet, les équations actuellement utilisées en mécanique des fluides ne sont que des approximations plus ou moins réalistes des phénomènes physiques qui ont vraiment lieu. De l'autre côté, les observations peuvent être incomplètes et bruitées ne nous permettant pas non plus à elles seules de déterminer l'état du système. Il est donc important de combiner ces deux sources d'information et de pouvoir utiliser la partie la plus fiable de chacune d'entre elles afin d'obtenir une bonne prévision.

Dans cette communication, nous évaluerons sur une équation de convection/diffusion 1D modèle, différentes stratégies de résolution d'un problème d'assimilation variationnelle de données de type 4D-VAR. Cette méthode est présentée à la section 2 de manière générale puis appliquée à une équation monodimensionnelle de convection/diffusion à la section 3. Enfin, la section 4 est consacrée à la résolution du problème 4D-VAR par des modèles réduits POD adaptatifs.

## 2 Assimilation variationnelle de données 4D-VAR

L'assimilation variationnelle de données 4D-VAR consiste à rechercher la trajectoire du modèle qui passe "au plus près" des observations et d'un terme de régularisation dit d'ébauche, tout en satisfaisant au mieux la dynamique du système. Soient  $X(t)$ , la variable d'état, et  $\mathbb{M}(X(t))$ , un modèle différentiel *a priori* non linéaire d'évolution de  $X$ , on définit le problème direct suivant :

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} + \mathbb{M}(X(t)) = 0 \quad \text{et} \quad X(0) = X_0. \quad (1)$$

Dans notre cas, le modèle  $\mathbb{M}$  est supposé connu de manière parfaite. L'objectif est donc de déterminer  $X_0$ , paramètre de contrôle, tel que l'on minimise la fonctionnelle coût  $J$  donnée par :

$$J(X_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathcal{Y} - \mathbb{H}(X(t; X_0), t)\|_{\mathcal{R}^{-1}}^2 dt + \frac{1}{2} \|X_0 - X^b\|_{\mathcal{B}^{-1}}^2. \quad (2)$$

$\mathbb{H}$ , opérateur d'observation du système, permet de passer de l'espace des états dans celui des observations  $\mathcal{Y}$ . Cet opérateur traduit le caractère incomplet des observations, que ce soit en temps ou en espace.  $X^b$  est le terme d'ébauche, première estimation de l'état analysé  $X_0^a$  que l'on recherche. Enfin,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{B}$  sont les matrices de covariance d'observation et d'ébauche. Elles traduisent le degré de confiance accordé respectivement aux observations  $\mathcal{Y}$  et à l'ébauche  $X^b$ . Autrement dit, plus la variance des observations est importante, et moins le terme correspondant aura de poids dans la fonctionnelle coût. Il en est de même pour  $X^b$ .

Pour déterminer le minimum de la fonctionnelle coût, nous utiliserons un algorithme d'optimisation basé sur une méthode de descente. Ces méthodes requièrent le calcul du gradient de  $J$ . pour le déterminer de manière précise et peu coûteuse, nous utiliserons une méthode adjointe [2, par exemple]. Soit  $\xi(t)$ , la variable adjointe, on montre aisément que le modèle adjoint est donné par :

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t}(t) + \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial x}\right)^* \xi(t) = \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x}\right)^* \mathcal{R}^{-1} (\mathcal{Y} - \mathbb{H}(X(t), t)) \quad \text{et} \quad \xi(T) = 0, \quad (3)$$

où  $\mathcal{L}^*$  représente l'opérateur adjoint associé à  $\mathcal{L}$ . Par ailleurs, le gradient de la fonctionnelle coût est :

$$\frac{\partial J}{\partial X_0} = -\xi(0) + \mathcal{B}^{-1}(X(0) - X^b). \quad (4)$$

Il est donc nécessaire d'intégrer en temps rétrograde l'équation adjointe (3) pour obtenir le gradient. Pour des problèmes réalistes (état de dimension  $10^7$ ), cette dernière étape est généralement coûteuse, en temps de calcul et en occupation mémoire.

## 3 Application à une équation de convection/diffusion

A titre d'illustration, la procédure 4D-VAR est appliquée à une équation scalaire monodimensionnelle de convection/diffusion avec un terme source [3], soit

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = p_1 \frac{\partial c}{\partial x} + p_2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + f(x, t) & (x, t) \in \Omega \times [0, T] \\ c(x, 0) = x(1 - x), \end{cases} \quad (5)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont deux paramètres à valeurs réelles d'advection et de diffusion. Pour  $f(x, t) = (-x^2 + (1 + 2p_1)x + 2p_2 - p_1)e^t$ , on montre que la solution exacte est de la forme :

$$c_{\text{exact}}(x, t) = x(1 - x)e^t. \quad (6)$$

Connaissant certaines observations du système  $c_{\text{obs}}$  et une solution d'ébauche  $c^b$ , l'objectif est de déterminer la condition initiale  $c_0^a$ , où  $c_0(x) = c(x, t = 0)$ , qui minimise la fonctionnelle coût

$$J(c_0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_o^2} \int_0^T \int_{\Omega} [c_{\text{obs}}(x, t) - \mathbb{H}(c(x, t; c_0), t)]^2 dx dt \quad (7)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_b^2} \int_{\Omega} (c_0(x) - c^b(x))^2 dx.$$

Pour simplifier, nous avons considéré ici que  $\mathcal{B} = \text{diag}(\sigma_b^2)$  et  $\mathcal{R} = \text{diag}(\sigma_o^2)$  où  $\sigma_b^2$  et  $\sigma_o^2$  sont respectivement les variances d'erreur d'ébauche et d'observation.

Puisque la solution exacte est connue, les observations et la solution d'ébauche seront déterminées en perturbant par un bruit Gaussien  $c_{\text{exact}}$ , soit

$$c_{\text{obs}}(x, t) = c_{\text{exact}}(x, t) + \mathcal{N}(0, \sigma_o),$$

$$c^b(x) = c_{\text{exact}}(x, 0) + \mathcal{N}(0, \sigma_b). \quad (8)$$

Dans nos tests numériques, nous considérons  $p_1 = 1$  et  $p_2 = 0,0001$ . Par ailleurs,  $\Omega = [0, 1]$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma_b = 0,05$  et  $\sigma_o = 0,1$ . L'équation (5) est résolue via un schéma de MacCormack modifié. En effet, on alterne à chaque pas de temps, le décentrage à droite et à gauche des phases de prédiction et de correction afin de rendre ce schéma symétrique en moyenne dans l'espace. Pour l'intégration numérique, nous avons choisi pour nombre de pas de temps  $N_t = 72$  et pour nombre de pas d'espace  $N_x = 30$ . Enfin, nous avons fait le choix de définir l'opérateur d'observation  $\mathbb{H}$  tel qu'un point sur deux en temps et en espace est observé.

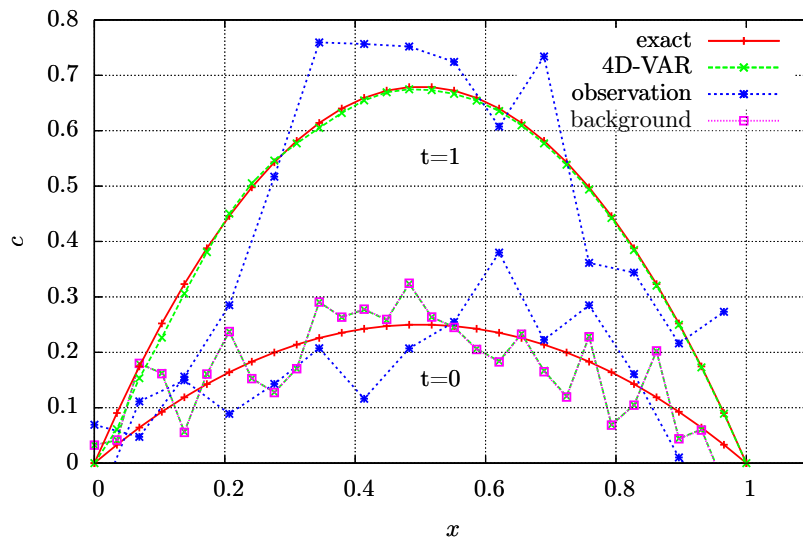


FIGURE 1 – Résultat de l'assimilation variationnelle de données (vert), solution exacte (rouge), ébauche (rose) et état observé (bleu).

La figure 1 montre la solution exacte, le résultat de la méthode 4D-VAR, les observations ainsi que le terme d'ébauche. Dans ce cas, la condition initiale optimale, encore appelé état analysé, est très proche de l'ébauche, et la solution finale correspond approximativement à la solution exacte. L'estimation est plutôt correcte. Cette méthode donne donc des résultats satisfaisants. Notons cependant que l'équation monodimensionnelle de convection/diffusion considérée est peu coûteuse à résoudre. Une même approche dans un cas où l'on considérerait l'équation de Navier-Stokes pour modèle serait beaucoup plus coûteuse en temps de calcul. Il est donc nécessaire de trouver une méthode de réduction de modèle pour résoudre ce type de problème 4D-VAR pour des configurations réalistes.

## 4 Utilisation d'un modèle réduit POD adaptatif

### 4.1 Modèle réduit POD

Pour diminuer les temps de calculs, une solution consiste à approximer la solution du modèle numérique initial dans un sous-espace de dimension réduite. Idéalement, ce sous-espace devrait contenir l'essentiel - dans un sens à définir - des informations contenues dans le modèle de départ. Un choix possible est de considérer le sous-espace engendré par les modes issus de la décomposition orthogonale aux valeurs propres ou POD [4]. Après résolution du modèle "haute fidélité" (5), pour une condition initiale donnée, on peut imaginer effectuer la décomposition suivante :

$$c(x, t) = \bar{c}(x) + \sum_{i=1}^{N_t} a_i(t) \Phi_i(x) \quad (9)$$

où  $\bar{c}$  est la moyenne d'ensemble de  $c$ ,  $\Phi_i$  sont les modes spatiaux POD et  $a_i$  les modes temporels correspondants. La réduction de modèle se fait alors en conservant parmi les  $N_t$  modes obtenus par snapshot POD uniquement les  $N$  premiers modes, avec si possible  $N \ll N_t$ . Pour justifier cette troncature, on utilise comme argument l'optimalité énergétique des modes POD [4].

Via une projection de Galerkin du modèle (5) sur les modes POD spatiaux  $\Phi_i$ , on obtient le système dynamique suivant :

$$\frac{da_k}{dt}(t) = C_k + \sum_{i=1}^N L_{ik} a_i(t) \quad (10)$$

avec

$$C_k = \langle p_2 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + f, \Phi_k \rangle_{\Omega} \quad \text{et} \quad L_{ik} = \langle p_2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}, \Phi_k \rangle_{\Omega} \quad (11)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$  représente le produit scalaire euclidien sur  $\Omega$ .

En effectuant l'assimilation variationnelle de données sur le modèle  $\mathbb{M}$  donné par (10), on obtient un état analysé légèrement plus proche de la solution exacte que précédemment mais les résultats de RMS totale (voir TAB. 1) sont plus mauvais en raison de la divergence du système dynamique. En effet, la décomposition POD a été effectuée à partir de la solution obtenue par le modèle "haute fidélité", pour une condition initiale donnée. La recherche de l'état analysé est ensuite effectuée dans ce sous-espace POD. Or, d'une part, la meilleure solution ne se trouve pas forcément dans ce sous-espace et d'autre part, du fait des non linéarités, la solution du système dynamique pour une autre condition initiale n'est pas le projeté sur le sous-espace POD de la solution du système "haute fidélité" partant de la même condition initiale. On néglige les effets des modes POD qui ne sont pas retenus dans la troncature.

### 4.2 Optimisations adaptatives et méthode à région de confiance

Pour remédier à la mauvaise fidélité du modèle réduit lorsque le paramètre de contrôle varie, on peut chercher à réactualiser la base POD de manière itérative. En effet, au cours de la résolution du problème d'optimisation, on est amené à connaître la solution du modèle "haute fidélité" pour des conditions initiales différentes de celle utilisée initialement pour déterminer le premier ensemble de modes POD. Il est alors possible à partir de cet ensemble de créer une nouvelle base POD. L'algorithme adaptatif est le suivant :

1. Résolution du modèle "haute fidélité" pour une condition initiale donnée
2. Décomposition POD
3. Trouver  $N$  tel que  $\sum_{i=1}^N \lambda_i / \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_i > I_{max}$
4. Création du système dynamique (10)
5. Application 4D-VAR à ce système dynamique
6. Si pas de convergence alors GOTO 1.

Dans cet algorithme,  $\lambda_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre POD et  $I_{max}$  un critère fixé à 0,995. Le risque de cet algorithme adaptatif est de déterminer une condition initiale trop éloignée de celle qui a été utilisée pour générer la base POD. Dans ce cas, il n'est alors plus assuré que le modèle réduit se comporte comme le modèle "haute fidélité".

Afin d'utiliser une méthode plus rigoureuse pour décider de l'adaptation de la base POD au cours de la résolution, on va maintenant adopter une méthode d'optimisation à région de confiance [5]. Il faut pour cela définir pour chaque itération  $i$  de l'algorithme, la distance  $\Delta^{(i)} = \|c_0^{\text{trouvé}} - c_0^{\text{initial}}\|$  telle que si  $\Delta^{(i)}$  dépasse une certaine valeur  $\Delta$ , dite de confiance, alors il faut rafraîchir la base POD. La valeur de  $\Delta$  est réactualisée au cours de la procédure adaptative en utilisant un critère qui mesure la fidélité du modèle réduit au modèle "haute fidélité" en termes de représentativité de la variation de la fonctionnelle coût. Ce critère est défini par :

$$\rho = \frac{J_{\text{hf}}(c_0^{\text{trouvé}}) - J_{\text{hf}}(c_0^{\text{initial}})}{J_{\text{pod}}(c_0^{\text{trouvé}}) - J_{\text{pod}}(c_0^{\text{initial}})}$$

où  $J_{\text{hf}}$  et  $J_{\text{pod}}$  sont les fonctionnelles coût  $J$  respectivement déterminées à partir du modèle "haute fidélité" (5) et du modèle réduit (10).

L'algorithme d'optimisation à région de confiance est le suivant :

1. Résolution du modèle "haute fidélité"
2. Si succès :
  - Décomposition POD
  - Trouver  $N$  tel que  $\sum_{i=1}^N \lambda_i / \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_i > I_{max}$
  - Création du système dynamique (10)
3. Application 4D-VAR à ce système dynamique + sortie si  $\Delta^{(i)} > \Delta$
4. Calcul de  $\rho$  :
  - Si  $\rho \geq 0,75$  : succès ;  $\Delta = 2\Delta$
  - Si  $0,25 \geq \rho < 0,75$  : succès ;  $\Delta = 0,75\Delta$
  - Si  $\rho < 0,25$  : échec ;  $\Delta = 0,25\Delta$
5. Si pas de convergence alors GOTO 1.

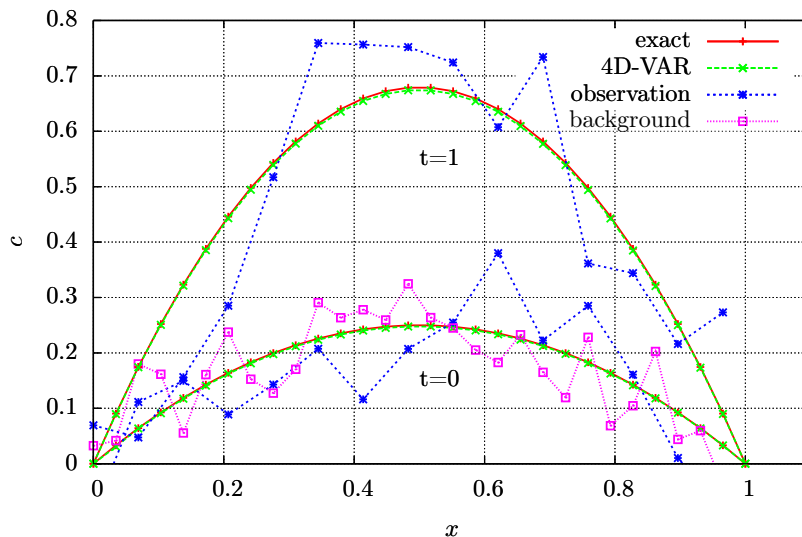


FIGURE 2 – Résultat de l'assimilation variationnelle de données (vert), solution exacte (rouge), ébauche (rose) et état observé (bleu). Algorithme POD adaptatif "classique".

La figure 2 montre le résultat de l'algorithme adaptatif "classique" d'assimilation variationnelle 4D-VAR. L'état analysé est très proche de la solution exacte. Cette méthode permet de trouver une

estimation de l'état du système de manière relativement précise malgré les données bruitées. L'algorithme à région de confiance donne des résultats similaires.

### 4.3 Bilan

Le tableau 1 compare les différentes méthodes en termes de temps de calcul, de nombre d'itérations, de racine carrée de la moyenne des écarts à la solution exacte (RMS) déterminée respectivement pour la condition initiale et pour l'ensemble de la solution qui en découle après intégration temporelle.

	Temps CPU	Nombre d'itérations	RMS initiale	RMS totale
4D-VAR	39,1	4	0,054	0,025
POD 4D-VAR	20,0	12	0,017	0,036
POD 4D-VAR adaptative	44,4	35	0,002	0,002
POD 4D-VAR région de confiance	31,3	20	0,011	0,005

TABLE 1 – Performances des différentes méthodes.

Comme expliqué précédemment, l'algorithme POD 4D-VAR a échoué à cause du manque de fidélité du modèle réduit. La procédure adaptative a de très bons résultats au prix d'un coût de calcul légèrement plus important. La méthode à région de confiance a une précision de l'ordre de grandeur de la POD 4D-VAR adaptative mais légèrement supérieure. La méthode a été un peu trop "prudente" lors de la résolution. Le coût de calcul est plus faible. La région de confiance évite de continuer la procédure d'optimisation si le modèle réduit ne représente plus la dynamique du système initial.

## 5 Conclusions

Une méthode d'assimilation variationnelle de données de type 4D-VAR a été utilisée, dans le cas d'une équation monodimensionnelle de convection/diffusion, pour estimer à partir d'observations bruitées et d'une ébauche, la condition initiale permettant de reconstruire de manière optimale la dynamique du système. Des procédures adaptatives POD ont été employées afin de résoudre de manière plus rapide ce problème 4D-VAR. Pour le premier algorithme adaptatif, la réactualisation de la base POD se fait de manière plutôt heuristique alors, que dans le second cas, une méthode d'optimisation à région de confiance a été utilisée. La comparaison de ces différentes méthodes nous a donné une idée du cadre d'utilisation de chacune selon le problème auquel on est confronté. La perspective directe est d'utiliser ce type d'approche pour identifier la dynamique du système dans des configurations de contrôle d'écoulement.

## Références

- [1] Navon I. M. Data assimilation for numerical weather prediction : a review. In Park, Seon K. ; Xu L., editor, *Data Assimilation for Atmospheric, Oceanic, and Hydrologic Applications*, pages 21–66. Springer, 2009.
- [2] Papadakis N. Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vecteurs. PhD thesis, Université de Rennes I, 2007.
- [3] Dimitriu G., Apreutesei N., and Ștefănescu R. Numerical Simulations with Data Assimilation Using an Adaptive POD Procedure. In *Large-Scale Scientific Computing*, volume 5910 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 165–172. Springer Berlin / Heidelberg, 2010.
- [4] Cordier L. and Bergmann M. Proper Orthogonal Decomposition : an overview. In *Lecture series 2002-04, 2003-03 and 2008-01 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [5] Bergmann M. and Cordier L. Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust-region methods and POD reduced-order models. *Journal of Computational Physics*, 227(16), 7813–7840, 2008.