



HAL
open science

Troncature modale des systèmes port-hamiltoniens linéaires par approche énergétique

Benjamin Mourllion, Abderazik Birouche

► **To cite this version:**

Benjamin Mourllion, Abderazik Birouche. Troncature modale des systèmes port-hamiltoniens linéaires par approche énergétique. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03421433

HAL Id: hal-03421433

<https://hal.science/hal-03421433>

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Troncature modale des systèmes port-hamiltoniens linéaires par approche énergétique

B. MOURLLION^a, A. BIROUCHE^a

a. MIPS EA 2332-MIAM/UHA, 12 rue des frères Lumière 68093 Mulhouse cedex, France
{benjamin.mourllion ; abderazik.birouche}@uha.fr

Résumé :

Cet article propose un nouveau critère pour la sélection des modes propres à supprimer lors d'une troncature modale d'un système hamiltonien linéaire. Ce critère prend en compte d'une part la dynamique du système et d'autre part les matrices d'entrée/sortie. Cette approche est donc satisfaisante d'un point de vue de la théorie des systèmes et de la théorie du contrôle. De plus, ce critère est directement lié à l'énergie fournie à chacun des modes propres.

Abstract :

This paper proposes a new criterion to select the eigenmodes to be left out in a modal truncation procedure of linear Hamiltonian systems. This criterion takes account of the dynamics of the system on the one hand and, on the other hand, the input/output matrices of the system. Therefore, this approach is satisfactory from a system and control theory point-of-view. Moreover, this criterion is physically meaningful because its computation is directly linked with the physical energy supplied to each eigenmode.

Mots clefs : Réduction d'ordre ; analyse modale ; système port-hamiltonien

Notations

- $M = M^T \succ 0$ (resp. $\succeq 0$) désigne une matrice M symétrique (resp. semi-)définie positive.
- $\operatorname{Re} z$, z^* , and $|z|$ désignent respectivement la partie réelle, le conjugué et le module du complexe z .
- $\mathcal{P}f(x)$ désigne la pseudo-fonction de $f(x)$. Lors de l'intégration de la pseudo-fonction, la valeur principale de Cauchy sera implicitement considérée. Par exemple, soit $c \in I = [a, b]$ une singularité de la fonction $f(x)$. L'intégrale sur I est indéfinie alors que l'intégrale de $\mathcal{P}f(x)$ est définie par $\int_I \mathcal{P}f(\tau) d\tau = \text{P.V.} \int_I f(\tau) d\tau \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(\tau) d\tau + \int_{c+\varepsilon}^b f(\tau) d\tau \right)$.

1 Motivation et position du problème

Le travail proposé dans cet article s'intègre dans le cadre de la réduction d'ordre des modèles. La réduction d'ordre cherche, à partir d'un système donné Σ dont (f, h) est une réalisation minimale, avec $u \in \mathbb{U}$, $x \in \mathbb{X}$ et $y \in \mathbb{Y}$, à trouver un nouveau système $\hat{\Sigma} : (\hat{f}, \hat{h})$ avec $u \in \mathbb{U}$, $\hat{x} \in \hat{\mathbb{X}}$ et $\hat{y} \in \mathbb{Y}$ où $\hat{\mathbb{X}} = \{\hat{x} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^r\}$ avec $r < n$, satisfaisant les conditions suivantes :

1. erreur d'approximation $\|y - \hat{y}\|$ faible (au sens d'une norme) et existence d'une borne d'erreur globale ;
2. propriétés du système (stabilité, passivité, structure, ...) préservées ;
3. procédure de réduction stable et efficace.

Dans le domaine de la théorie du contrôle, de nombreuses techniques de réduction d'ordre ont été élaborées (voir [2, 1, 7] par exemple pour un état-de-l'art). Ces techniques (sauf exception) ne conservent pas de significations physique des états réduits et la plus part d'entre elles se fondent sur la norme \mathcal{H}_∞ ou sur les valeurs singulières de Hankel et ne peuvent par conséquent pas être appliquées dans le cas de systèmes conservatifs (les quantités étant alors indéterminées).

Cet article se concentre sur la troncature modale de systèmes conservatifs pouvant se mettre sous la forme hamiltonienne et propose un nouveau critère de sélection des modes reposant sur des considérations énergétiques. Pour cela, nous considérons des systèmes physiques en forme du second-ordre du type :

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{q} + \mathcal{K}q = bu(t) \\ y = c\dot{q} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \dim(q) = n \quad (1)$$

où \mathcal{M} et \mathcal{K} sont respectivement les matrices de masse (ou d'inertie) et de raideur et respectent les conditions dites *structurelles* suivantes :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^\top \succ 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}^\top \succ 0 \quad (2)$$

Comme la matrice d'inertie est inversible, le système (1) présente n modes propres solutions de

$$(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}) \Phi = \Phi\Omega^2 \quad \text{avec} : \quad \begin{array}{ll} \Omega = \text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_n\} & \text{la matrice spectrale,} \\ \Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n] & \text{la matrice modale.} \end{array}$$

Les conditions structurelles (équation (2)) impliquent que les pulsations propres sont réelles et positives et que les modes propres sont réels et orthogonaux : $\phi_i^\top \mathcal{M} \phi_j = 0$ et $\phi_i^\top \mathcal{K} \phi_j = 0$ si $\omega_i \neq \omega_j$.

Par conséquent, la transformation modale permet d'obtenir les deux matrices diagonales suivantes

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}} &= \text{diag}\{\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n\} = \Phi^\top \mathcal{M} \Phi \\ \tilde{\mathcal{K}} &= \text{diag}\{\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n\} = \Phi^\top \mathcal{K} \Phi \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \omega_i^2 = \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{m}_i}.$$

Généralement, la sélection des modes propres repose uniquement sur une analyse des pulsations propres. La Section suivante introduit un critère alternatif fondé sur l'étude de l'énergie à partir d'une formulation hamiltonienne.

2 Définition du critère énergétique

2.1 Formulation hamiltonienne

Un système port-hamiltonien (conservatif) est de la forme [8] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = J(x)\nabla\mathcal{H}(x(t)) + B(x)u(t) \\ y(t) = B^\top(x)\nabla\mathcal{H}(x(t)) \end{cases} \quad (3)$$

avec :

- $x = [q^\top \ p^\top]^\top$ le vecteur d'état
- $q = [q^1 \ \dots \ q^n]^\top \in M$ est le vecteur des coordonnées généralisées appartenant à la variété de configuration M avec $\dim(M) = n$.
- $p = [p_1 \ \dots \ p_n]^\top \in T_q^*M$ est le vecteur des moments généralisés appartenant à l'espace co-tangent à M à la configuration q . Par conséquent, le vecteur x appartient au fibré co-tangent T^*M (appelé espace des phases) de M et $\dim(x) = 2n$.
- $\mathcal{H}(x)$ est l'hamiltonien et représente l'énergie totale du système.
- $\nabla\mathcal{H}$ représente le vecteur gradient (considéré comme un vecteur colonne).
- $J(x) = -J(x)^\top$, la matrice symplectique.
- B un vecteur colonne.

Remarque : le bilan énergétique de ce type de système est aisément obtenu : $\frac{d}{dt}\mathcal{H} = y^\top u$.

Dans ce papier, nous nous concentrerons sur des systèmes linéaires et invariants dans le temps. Ainsi, les matrices J et B sont indépendantes de x et l'hamiltonien est défini par la fonction quadratique suivante :

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}x^\top E x \quad \text{où} \quad E = E^\top \succeq 0 \quad \text{est appelée matrice énergie.}$$

Ainsi, le système présenté équation (3) a une représentation d'état (appelée *energy variable representation* [5]) suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= JEx + Bu \\ y &= B^T Ex \end{cases}$$

Remarque : la fonction hamiltonienne est définie sur le fibré co-tangent T^*M . Les vitesses généralisées $\dot{q} = [\dot{q}^1 \dots \dot{q}^n]^T$ appartiennent à l'espace tangent à M à la configuration $q : T_q M$. Dans le cas linéaire, l'énergie cinétique $E_k = p^T \mathcal{M}^{-1} p$ est égale à la co-énergie $E_k^* = \dot{q}^T \mathcal{M} \dot{q}$ (transformée de Legendre de E_k). Par conséquent, l'hamiltonien peut être également défini sur le fibré tangent $TM : \mathcal{H}(x(t)) = \mathcal{H}(q(t), p(t)) = \mathcal{H}(q(t), \dot{q}(t))$. Pour alléger les notations l'hamiltonien sera parfois écrit $\mathcal{H}(t)$.

2.2 Énergie fournie à un oscillateur harmonique

Considérons un oscillateur harmonique non amorti de la forme

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m} u(t) \quad , \quad y = \frac{dq}{dt} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (4)$$

et définissant $p = m\dot{q}$, l'hamiltonien est $\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2$ et le système peut être réécrit sous la forme (3) avec $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. La représentation en variable d'énergie est immédiatement obtenue :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} & & & \end{array} \right). \quad (5)$$

Le point clef de ce papier réside dans la proposition suivante :

Proposition 2.1. *En forçant, avec une entrée $u(t)$, un oscillateur harmonique non amorti de la forme de l'équation (4) initialement au repos et d'énergie nulle pendant un temps T , l'énergie injectée dans le système est :*

$$\boxed{\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2m} |U(\omega_0)|^2 = \frac{CB}{2} |U(\omega_0)|^2} \quad \forall t \geq T \geq 0 \quad (6)$$

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $\forall t \notin [T_i, T]$, la commande est nulle $u(t) = 0$ et où le temps T peut être fini ou infini.

De l'instant $-\infty$ à $T_i = 0$, l'oscillateur est supposé à l'équilibre avec une énergie totale nulle ($\forall t < T_i = 0, \mathcal{H}(t) = E_k(t) = E_p(t) = 0$). Par conséquent, comme le système est passif et conservatif l'énergie apportée au système constituera son énergie totale à l'instant T (fin de l'excitation) \mathcal{H}_T et restera constant après cette date $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_T \quad \forall t \geq T$. Le calcul de la transformée de Fourier de l'équation (4) donne la relation suivante : $Q(\omega) = \frac{1}{m} \frac{U(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2}$ où les quantités écrites en majuscule sont les transformées de Fourier des quantités écrites en minuscule respectives. Les singularités en $\omega = \pm\omega_0$ impliquent une indétermination dans l'expression de la transformée de Fourier inverse : $q(t) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2m\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} \exp(-j\omega t) d\omega$. Afin d'obtenir une meilleure définition, considérons $\epsilon > 0$ un coefficient de friction infinitésimal (*i.e.* ϵ^2 négligeable devant ω_0^2). La transformée de Fourier est donnée par : $Q(\omega) = \frac{1}{m} \frac{U(\omega)}{\omega_0^2 - (\omega - j\epsilon)^2}$. L'énergie fournie par la force d'entrée u est donnée par son travail : $W = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)u(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)U^*(\omega)d\omega$ où $y(t) = \dot{q}(t)$ et la deuxième égalité est une application du théorème de Parseval. De plus, les signaux $y(t)$ et $u(t)$ étant réels, les transformées de Fourier ont une symétrie hermitienne (*i.e.* $F(-\omega) = F^*(\omega)$), donc $W = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^{\infty} Y(\omega)U^*(\omega)d\omega$. Utilisant la propriété de dérivation des transformées de Fourier $Y(\omega) = j\omega Q(\omega) = j\omega \frac{1}{m} \frac{U(\omega)}{\omega_0^2 - (\omega - j\epsilon)^2}$, l'équation précédente peut s'écrire $W = \frac{1}{m\pi} \text{Re} \int_0^{\infty} \frac{j\omega}{\omega_0^2 - (\omega - j\epsilon)^2} |U(\omega)|^2 d\omega$. En se servant de la formule de Dirac-Plemelj¹ [4] :

1. aussi connue sous le nom de forme de Sokhotsky-Plemelj

$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm j\eta} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp j\pi \delta(x)$ l'équation suivante est obtenue :

$$W = \frac{1}{m} \int_0^\infty \omega \left(-\delta(\omega_0 + \omega) \mathcal{P} \frac{1}{\omega_0 - \omega} + \delta(\omega_0 - \omega) \mathcal{P} \frac{1}{\omega_0 + \omega} \right) |U(\omega)|^2 d\omega.$$

La première partie de l'intégrale étant toujours nulle, ceci donne le résultat voulu :

$$\mathcal{H}(t) = W = \frac{1}{2m} |U(\omega_0)|^2 = \frac{CB}{2} |U(\omega_0)|^2 \quad \forall t \geq T \geq 0$$

□

Plusieurs remarques peuvent être faites à propos de l'équation (6) :

1. Le travail W est toujours positif ou nul. Ceci est cohérent avec la notion de passivité des systèmes hamiltoniens.
2. Si le signal de contrôle est sinusoïdal $u(t) = \sin(\omega_u t)$, sa transformée de Fourier est $U(\omega) = \delta(\omega_u - \omega)$. Ainsi, si $\omega_u = \omega_0$, l'énergie fournie tend vers l'infinie (effet de résonance) ou sinon l'énergie est nulle.
3. Si le signal de contrôle est une impulsion unitaire $u(t) = \delta(t)$, sa transformée de Fourier est la constante unitaire $U(\omega) = 1$. L'énergie fournie est par conséquent $W = \frac{1}{2m}$. Ceci est cohérent avec la théorie des chocs (conservation de l'impulsion). En effet, par définition, la conservation de l'impulsion est donnée par : $u_{\text{moyen}} \Delta t = m \Delta v = 1$ (puisque u est une impulsion unitaire). De plus, la vitesse avant le choc étant supposée nulle, la relation $v = \frac{1}{m}$ est alors obtenue. Juste après l'impact, l'énergie fournie est uniquement l'énergie cinétique : $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2m} = W$.

2.3 Énergie fournie aux modes propres

Considérons le système port-hamiltonien suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= J \nabla_x \mathcal{H}(x) + B u \\ y &= B^\top \nabla_x \mathcal{H}(x) \end{cases} \quad \text{avec : } x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Soit Φ la matrice de transformation modale définie Section 1 et supposons (sans perte de généralité) que $\Phi^\top \Phi = \Phi \Phi^\top = I_n$. En définissant $\Theta = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}$, considérons la transformation suivante $x = \Theta \tilde{x}$. Le gradient étant un vecteur covariant ($\nabla_x = \Theta \nabla_{\Theta^\top x} = \Theta \nabla_{\tilde{x}}$) et la transformation modale étant une transformation canonique ($\Theta^\top J \Theta = J$), le système hamiltonien dans sa base modale peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= J \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{x}) + \tilde{B} u \\ y &= \tilde{B}^\top \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{x}) \end{cases} \quad (8)$$

avec :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} = \Theta^\top B, \quad \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \tilde{x}^\top \tilde{E} \tilde{x} \quad \text{et} \quad \tilde{E} = \Theta^\top E \Theta = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{K}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{M}}^{-1} \end{bmatrix}$$

Comme les modes propres sont orthogonaux, l'hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}$ est la somme des n hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}_i$ de chaque sous système hamiltonien (écrit en *energy variable representation*) :

$$\left(\frac{\tilde{A}_i \mid \tilde{B}_i}{\tilde{C}_i \mid \tilde{D}_i} \right) = \left(\frac{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{m}_i} \\ -\tilde{k}_i & 0 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b}_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & \tilde{c}_i \end{bmatrix} \mid 0} \right)$$

où \tilde{b}_i est la i ème entrée du vecteur \tilde{b} et $\tilde{c}_i = \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{m}_i}$.

En utilisant l'équation (6), $\forall t \geq T$, les n hamiltoniens modaux $\tilde{\mathcal{H}}_i$ peuvent être réécrits : $\tilde{\mathcal{H}}_i(t) = \frac{1}{2}C_i B_i |U(\omega_i)|^2$.

$$\mathcal{H}(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathcal{H}}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}C_i B_i |U(\omega_i)|^2 \quad (9)$$

3 Troncature modale fondée sur l'énergie

3.1 Étape de troncature

Pour appliquer le critère de sélection, nous avons besoin de connaître la transformée de Fourier de l'entrée. Si nous avons aucune connaissance nous pouvons considérer les deux cas suivant :

1. Impulsion (distribution de Dirac) : $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(\omega) = 1$ ce qui mène à

$$\mathcal{H}(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathcal{H}}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}C_i B_i \quad \forall t > 0 \quad (10)$$

2. Échelon (fonction de Heaviside) : $u(t) = \Gamma(t) \Rightarrow U(\omega) = \mathcal{P}\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta(\omega)$ ce qui mène à

$$\mathcal{H}(\infty) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathcal{H}}_i(\infty) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}C_i B_i \frac{1}{\omega_i^2} \quad (11)$$

Remarque : dans le cas d'un système présentant un amortissement de Rayleigh [6] ou de Caughey [3], les matrices A_i sont de la forme $\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{m}_i} \\ -\tilde{k}_i & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix}$. Une troncature modale fondée sur la norme \mathcal{H}_∞ est alors possible. La norme \mathcal{H}_∞ du i ème sous-système peut être approximée par $\|\tilde{G}_i\|_{\mathcal{H}_\infty} \simeq \frac{1}{2}C_i B_i \frac{1}{\xi_i\omega_i}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons la relation

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \sum_{i=1}^n \|\tilde{G}_i\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}C_i B_i \frac{1}{\xi_i\omega_i} \quad (12)$$

Bien qu'il n'y ait aucune relation théorique, nous pouvons noter les similitudes entre l'équation (12) et l'équation (11).

3.2 Exemple

Soit un système de la forme (7) avec

$$x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad \mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}x^t \begin{bmatrix} \mathcal{K} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{-1} \end{bmatrix} x$$

$$\mathcal{M} = I_3 \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1.7494 & 0.6791 & 1.0438 \\ 0.6791 & 3.7234 & 1.3394 \\ 1.0438 & 1.3394 & 2.5272 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad b = \begin{bmatrix} -0.8669 \\ 0.5428 \\ 6.9967 \end{bmatrix}$$

Les pulsations propres du système (fixées arbitrairement) sont $\omega_1^2 = 1$, $\omega_2^2 = 2$ and $\omega_3^2 = 5$ (en $\text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$). Les matrices \mathcal{K} et b ont été générées pseudo-aléatoirement. La représentation d'état correspondante est composée de 3 positions généralisées et 3 vitesses généralisées (soit 6 états). Afin de supprimer un mode, deux réductions basées sur le critère énergétique ont été réalisées :

1. la première réduction a été faite en utilisant un impulsion (dénnotée par l'exposant \uparrow). L'énergie fournie à chacun des trois modes est donnée dans la table suivante :

Indice du mode	i	1	2	3
Pulsation propre (rad/s)	ω_i	1.0000	1.4142	2.2361
Énergie (J)	\mathcal{H}_i^\uparrow	12.4997	4.5002	8.0000

Comme $\mathcal{H}_1^\uparrow > \mathcal{H}_3^\uparrow > \mathcal{H}_2^\uparrow$, le mode propre à éliminer est le deuxième ($\mathcal{H}_2^\uparrow = 4.5002$ J).

2. la seconde réduction a été réalisée en utilisant la fonction de Heaviside unitaire (dénotée par l'exposant \uparrow). L'énergie fournie à chacun des trois modes est donnée dans la table suivante :

Indice du mode	i	1	2	3
Pulsation propre (rad/s)	ω_i	1.0000	1.4142	2.2361
Énergie (J)	\mathcal{H}_i^\uparrow	12.5003	2.2501	1.6000

Comme $\mathcal{H}_1^\uparrow > \mathcal{H}_2^\uparrow > \mathcal{H}_3^\uparrow$, le mode à éliminer est le troisième ($\mathcal{H}_3^\uparrow = 2.2361$ J).

La différence entre \mathcal{H}_1^\uparrow et \mathcal{H}_1^\uparrow est uniquement due aux approximations numériques. Dans cet exemple, la troncature selon la fonction échelon donne le même résultat qu'une troncature traditionnelle puisque les hamiltoniens sont ordonnés comme leurs pulsations propres. En revanche, la troncature réalisée selon une impulsion ne supprime pas le même mode propre.

4 Conclusion

Cet article a proposé une nouvelle méthode de sélection des modes propres à supprimer durant une opération de troncature modale. Cette approche se fonde sur un critère énergétique défini dans le même esprit que le critère basé sur la norme \mathcal{H}_∞ pour une troncature modale d'un système amorti. Dans ce critère, aussi bien la dynamique que les matrices d'entrée/sortie sont prises en compte. La méthode proposée peut être appliquée sur les systèmes non-conservatifs mais elle ne prendra pas en compte la dissipation. Pour palier cette lacune, de futurs travaux proposeront un compromis entre l'énergie fournie et l'énergie dissipée de chaque mode propre afin de sélectionner d'une meilleure manière les états pouvant être supprimés.

Références

- [1] A.C. Antoulas. *Approximation of Large-scale Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2005.
- [2] A.C. Antoulas, D.C. Sorensen, and S. Gugercin. A survey of model reduction methods for large-scale systems. *Structured Matrices in Operator Theory, Numerical Analysis, Control, Signal and Image Processing, Contemporary Mathematics, AMS publications*, 280(6) :193–219, 2001.
- [3] T.K. Caughey and M.E.J. O'Kelly. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 32 :583–588, 1965.
- [4] F.D. Gakhov. *Boundary Value Problems*. Adiwes International Series in Mathematics, Pergamon Press, 1966.
- [5] R. Polyuga and A.J. van der Schaft. Structure preserving model reduction of port-hamiltonian systems. In *Proc. 18th Int. Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Blacksburg, VA, USA, July 28 - August 1 2008.
- [6] L. Rayleigh. *Theory of Sound (2 volumes) 1945th ed.* Dover Publications, New York, 1877.
- [7] W.H. Schilders, H.A. Vorst, and J. Rommes, editors. *Model Order Reduction : Theory, Research Aspects and Applications*. Springer, 2008.
- [8] A.J. van der Schaft. Port-Hamiltonian systems : an introductory survey. In Juan Luis Verona Joan Verdura eds. Marta Sanz-Sole, Javier Soria, editor, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume III, Invited Lectures*, pages pp. 1339–1365, Madrid, Spain, 2006.